

УДК 629.78.054.01.1:621.396

Оценка распределения мод реверберационной камеры*

Е.А. ЛЫСЕНКО, Е.В. ОВЧИННИКОВА, В.А. БЕРНС

Предложен подход к решению задачи определения количества и плотности мод с учетом граничных условий, искажающих условия идеального отражения звуковой энергии от стен реверберационной камеры. Результаты математических исследований показывают, что окна для излучения звука (рупора) в стенах камеры и неточности изготовления не могут существенно повлиять на частотную область применения испытательной установки.

Ключевые слова: реверберационная камера, диффузное поле, мода, собственное значение, спектр, резонанс, волновое уравнение.

В настоящее время пока невозможно спроектировать конструкцию космического аппарата (КА) с требуемой акустической выносливостью, поэтому испытания на акустических установках остаются главным критерием оценки качества конструкции как на этапах наземной экспериментальной обработки, так и перед пуском каждого летного образца.

Среди установок для испытаний КА в целом на акустическую прочность наибольшее распространение получили реверберационные камеры, в которых основная часть колебательной энергии создается за счет резонансных свойств замкнутого объема помещения.

При этом стремятся сформировать звуковое поле, приближающееся к диффузному, со спектром, сформированным в соответствии с ожидаемым спектром акустических нагрузок. Чтобы получить такое поле, необходимо иметь высокую плотность мод реверберационной камеры с достаточно равномерным их распределением по частоте.

Точное число мод, которое возбуждается в данной полосе частот для параллелепипеда, может быть определено по выражению

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}, \quad (1)$$

вытекающему из решения общего волнового уравнения $\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \psi}{dt^2}$, где ∇^2 – оператор, указывающий на частные производные второго порядка по направлениям x , y и z ; ψ – потенциал скоростей ($\nabla \psi = v(x, y, z, t)$), $\frac{d\psi}{dt} = P = P(x, y, z, t)$ – функция давления; c – скорость

звука; t – время; f – частота собственных колебаний звукового давления внутри замкнутого объема (параллелепипеда); ω – круговая частота; l_x , l_y , l_z – линейные размеры ребер параллелепипеда; n_x , n_y , n_z – целые числа.

Каждую из этих частот нормальных мод можно рассматривать как вектор в частотном пространстве с ортогональными осями f_x , f_y и f_z . Общее число мод ниже частоты f приближенно определяют следующим выражением (для параллелепипеда):

$$N = \frac{4\pi}{3c^3} Vf^3, \quad (2)$$

где V – объем камеры.

* Статья получена 22 ноября 2012 г.

Дифференцирование уравнения (2) дает выражение для числа мод ΔN в пределах полосы Δf с центральной частотой f :

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 \Delta f. \quad (3)$$

Если реверберационную камеру используют для проведения испытаний на акустическую прочность, то необходимо связать свойства камеры с реакцией конструкции. Такую зависимость можно получить исходя из того, что большая часть энергии, возбуждающей конструкцию, находится вблизи ее собственных частот.

Ширину полосы Δf для собственной частоты f испытываемой конструкции с коэффициентом относительного демпфирования ξ аппроксимируют выражением

$$\Delta f = 2f\xi. \quad (4)$$

Согласуя это выражение с уравнением (3) можно получить число мод, которое возбуждается в пределах ширины полосы резонанса конструкции, а именно:

$$N_{\Delta f} = \frac{8\pi V \xi f^3}{c^3}. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет число мод камеры, которое должно быть в пределах ширины полосы резонансной кривой испытываемой конструкции на частоте f и при относительном коэффициенте демпфирования ξ .

Выражение (3) дает хорошие результаты при граничных условиях, когда на границах этого объекта производная от вектора скорости частиц воздуха имеет максимальное значение в направлении перпендикулярном плоскости границ и принимает нулевые значения в плоскости границ объема.

Реальная же конструкция реверберационной камеры имеет окна для излучения колебательной энергии (рупора) и окно для выпуска нагнетаемого рупорами воздуха. Площадь таких окон существенно снижает общую площадь отражения звуковых волн и соответственно искажает картину звукового поля, определенную по уравнению (1).

Предлагается подход к решению задачи определения количества мод и плотности мод с учетом новых граничных условий, искажающих условия идеального отражения звуковой энергии от стен реверберационной камеры.

Полагаем стенки $x=0$, $x=l_x$, $y=0$, $z=0$, $z=l_z$ жесткие, на границе $y=l_y$ расположены звуковые излучатели. Задание распределения источников на некоторой поверхности эквивалентно заданию граничных условий на этой поверхности.

Пусть на границе $y=l_y$ задано общее однородное краевое условие

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=l_y} = Y(x, z, \omega) \times \psi(x, l_y, z).$$

Для решения краевой задачи воспользуемся функцией Грина.

Функция Грина для случая, когда нормальная составляющая градиента равна нулю на границах $x=0$, $x=l_x$, $y=0$, $z=0$, $z=l_z$ и равна $Y\psi$ при $y=l_y$ имеет вид [3]:

$$G(r|r_0|\omega) = -\frac{4\pi}{l_x l_z} \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \frac{\cos\left(\frac{\pi m x_0}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{l_z}\right)}{k_{mn} \sin(k_{mn} l_y)} \cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l_z}\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \cos(k_{mn}y_0) \cos[k_{mn}(l_y - y)], & y > y_0, \\ \cos(k_{mn}y) \cos[k_{mn}(l_y - y_0)], & y < y_0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } k_{mn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{l_z}\right)^2.$$

Теорема Грина утверждает, что акустическое поле внутри некоего произвольного объема целиком определяется полем и его нормальной производной на поверхности, ограничивающей данный объем. Поскольку нормальная производная этой функции равна нулю на граничных поверхностях $x=0$, $x=l_x$, $y=0$, $z=0$, $z=l_z$

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} G(x, y, z | x_0, l_y, z_0 | \omega) \left[\frac{\partial}{\partial y_0} \psi(x_0, y_0, z_0) \right]_{y_0=l_y} dz_0 dx_0 = \\ &= -\frac{1}{l_x l_z} \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \frac{\cos\left(\frac{\pi m x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l_z}\right) \cos(k_{mn} y)}{k_{mn} \sin(k_{mn} l_y)} \times \\ &\int_0^{l_x} \int_0^{l_z} Y(x_0, z_0, \omega) \psi(x_0, l_y, z_0) \cos\left(\frac{\pi m x_0}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n z_0}{l_z}\right) dz_0 dx_0. \end{aligned}$$

Это равенство представляет собой интегральное уравнение для неизвестной функции ψ . Отметим, что функция $G(x, y, z | x_0, l_y, z_0 | \omega)$ разрывна на этой части границы. Всюду, кроме точек разрыва на части границы $y = l_y$, решение ψ представимо в виде ряда

$$\psi(x, y, z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} F_{mn}(y) \cos\left(\frac{\pi k x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi l z}{l_z}\right) e^{-i\omega t}. \quad (8)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (7) приходим к уравнениям для определения функции F_{mn}

$$F_{mn}(y) = -\frac{\cos(k_{mn} y)}{k_{mn} \sin(k_{mn} l_y)} \sum_{k,l=0}^{\infty} Y_{mnkl} F_{kl}(l_y), \quad (9)$$

где

$$k_{mn} \operatorname{tg}(k_{mn} l_y) = r_{mn}.$$

Полагая в уравнении (9) $y = l_y$, получим

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} Y_{mnkl} F_{kl}(l_y) + k_{mn} \operatorname{tg}(k_{mn} l_y) F_{mn}(l_y) = 0. \quad (11)$$

В уравнении (11) величины Y_{mnl} , $k_{mn} \operatorname{tg}(k_{mn} l_y)$ являются функциями от ω . Ненулевое решение этой однородной системы существует, если обращается в нуль определитель из коэффициентов при неизвестных F_{mn} . Это приводит к уравнению

$$\left| k_{mn} \operatorname{tg}(k_{mn} l_y) \delta_{(mn)(kl)} - Y_{mnl} \right| = 0, \quad (12)$$

где $\delta_{(mn)(kl)} = \begin{cases} 1, & m = k \text{ и } n = l; \\ 0, & m \neq k \text{ или } n \neq l. \end{cases}$

Значения ω , для которых уравнение (11) имеет нетривиальное решение, являются собственными частотами системы, и соответствующие величины k_{mn} и F_{mn} позволяют вычислить собственные функции.

Численно решая уравнение (12), получим

$$k_{mn} \operatorname{tg}(k_{mn} l_y) = r_{mn}.$$

Это равенство, в свою очередь, представляет собой трансцендентное уравнение относительно k_{mn} , которое имеет множество решений $\pi i + e_{mjn}$, где j – целое число, а $|e_{mjn}| < \frac{\pi}{2}$. Собственное значение ω определяется равенством

$$\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{l_y} + \frac{e_{mjn}}{\pi l_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_z}\right)^2},$$

или

$$f^* = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{l_y}\right)^2 \left(1 + \frac{e_{mjn}}{\pi j}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_z}\right)^2}. \quad (13)$$

Поскольку $\frac{e_{mjn}}{\pi j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, то для достаточно больших f^* общее число мод ниже частоты f по-прежнему приближенно определяется выражением (2). Однако, возможно совпадение частот, соответствующих различным наборам m, j, n , что было исключено при однородных граничных условиях, так как отношение размеров реверберационной камеры было иррациональным $l_x : l_y : l_z = 1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4}$. Совпадение частот уменьшает их общее количество, без учета кратности, общее количество уменьшается не более чем в два раза. Кроме того, в зависимости от величин e_{010} и e_{001} ($|e_{mjn}| < \frac{\pi}{2}$, могут быть и отрицательными) может существенно измениться нижняя рабочая частота реверберационной камеры.

При однородных граничных условиях нижняя рабочая частота составляет

$$f_h = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{0}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_z}\right)^2} = \frac{c}{2} \times \frac{1}{l_z}.$$

Неоднородные условия на границе $y = l_y$ могут увеличить это значение до величины

$$\begin{aligned} \tilde{f}_h &= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_y}\right)^2 \left(0 + \frac{e_{001}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_z}\right)^2} \leq \\ &\leq \frac{c}{2} \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{l_z/\sqrt[3]{2}}\right)^2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_z}\right)^2 = \frac{c}{2} \times \frac{1}{l_z} \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2 + (1)^2} = f_h \times 1,18, \end{aligned}$$

или уменьшить до величины

$$\begin{aligned} \tilde{f}_h &= \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_y}\right)^2 \left(1 - \frac{|e_{010}|}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{0}{l_z}\right)^2} \geq \\ &\geq \frac{c}{2} \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{l_z/\sqrt[3]{2}}\right)^2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{c}{2} \times \frac{1}{l_z} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = f_h \times 0,63. \end{aligned}$$

Нижняя рабочая частота реверберационной камеры в зависимости от граничных условий на стенах, может составить величину

$$0,63 f_h \leq \tilde{f}_h \leq 1,18 f_h. \quad (14)$$

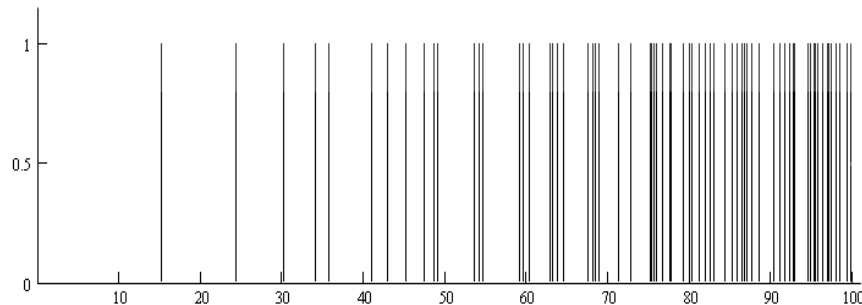


Рис. 1. Наложение графиков распределения мод для идеальных (иррациональных) соотношений ребер параллелепипеда) и реальных размеров реверберационной камеры

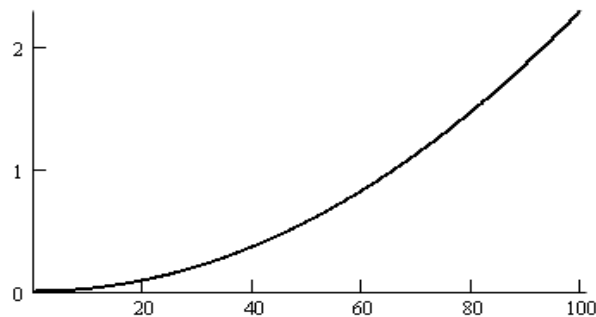


Рис. 2. График плотности мод в зависимости от частоты

Проведенные расчеты по формулам (1) и (13) показывают (рис. 1), что реальные размеры камеры практически не изменяют картины распределения мод идеальной камеры, а в частотной полосе выше 90 Гц (рис. 2) плотность мод превышает критерий: 2 моды на 1 Гц.

Начиная с частоты 90 Гц спектр можно считать сплошным, а поле диффузным.

Если в формуле (4) принять коэффициент равным $\xi = 0,02$, то из формулы (3) критерий возбуждения резонанса конструкции 6 модами наступает начиная с частоты ≈ 90 Гц. Такой результат согласуется с требованиями к виброакустическим испытаниям:

– Sin-вибрация в диапазоне (5–100) Гц ;

– акустическая широкополосная вибрация в диапазоне (100–5000) Гц.

Полученный результат (14) не может существенно повлиять на частотную область применения камеры и изменить требуемую мощность звукового излучения вблизи f_h , так как очевидно из графиков, что частоты функционирования установки должна быть $f \geq 40$ Гц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- [1] Красильников В.А. Введение в физическую акустику / В.А. Красильников, В.В. Крылов. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
[2] Лепендин Л.Ф. Акустика / Л.Ф. Лепендин. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.
[3] Морс Ф.М. Методы теоретической физики / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: ИЛ, 1958. –Т. 1. – 930 с.; 1960. – Т. 2. – 896 с.

Лысенко Евгений Александрович, заместитель начальника отдела отработки статико-динамической прочности ОАО «ИСС» им. академика М.Ф. Решетнева, доцент кафедры Космических аппаратов Красноярского аэрокосмического университета. Область научных интересов статико-динамические испытания аппаратов. Имеет 13 публикаций, изобретения, 1 учебное пособие.

Овчинникова Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности Сибирского Федерального университета. Область научных интересов: вычислительная математика, механика жидкости и газа, интегрируемые уравнения, системы компьютерной алгебры. Имеет 3 публикации, 2 учебных пособия.

Бернс Владимир Андреевич, доктор технических наук, профессор кафедры Прочности летательных аппаратов факультета летательных аппаратов НГТУ, начальник отдела Сибирского научно-исследовательского института авиации (СибНИА). Имеет 32 публикации, 2 монографии, 2 изобретения.

E.A. Lysenko, E.V. Ovchinnikova, V.A. Berns

Estimate of the distribution of the mod of the dominant reverberation chambers

An approach is proposed to solution of problem of determining the number and the density of the mod with given boundary conditions, distorting the conditions of an ideal reflection of sound energy from the walls of dominant reverberation chamber. The results of mathematical studies show that the window for the emission of sound (voice) in the walls of the cell and inaccuracies of manufacture may not significantly affect the frequency area of application of the test installation.

Key words: reverberation chamber, diffuse-field, fashion, eigenvalue spectrum, resonance, the wave equation.