

УДК 519.63

Решение трехмерных задач магнитотеллурики в сложных средах с использованием метода конечных элементов*

**М.Г. ПЕРСОВА, Ю.Г. СОЛОВЕЙЧИК, П.А. ДОМНИКОВ, Т.Г. ШАШКОВА,
М.В. АБРАМОВ, Ю.И. КОШКИНА**

Рассматриваются вычислительные схемы конечноэлементного моделирования трехмерных электромагнитных полей в задачах магнитотеллурических зондирований. Приводится описание математического аппарата решения трехмерной задачи на основе векторной, узловой и векторно-узловой математической постановки и примеры численных экспериментов. Оценивается вычислительная эффективность различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: 3D-моделирование, метод конечных элементов, гармонические электромагнитные поля, магнитотеллурические зондирования.

ВВЕДЕНИЕ

При проведении электроразведочных исследований важнейшую роль играет программно-математический аппарат, используемый для интерпретации полевых данных. При этом получаемые в ходе интерпретации данных геоэлектрические модели могут содержать большое количество трехмерных объектов, и разрабатываемые методы моделирования должны позволять достаточно быстро и точно выполнять расчеты не только для геоэлектрических моделей, содержащих единичные трехмерные объекты, но и для моделей, содержащих несколько десятков трехмерных объектов.

В данной работе будут рассмотрены различные математические постановки и методы решения получаемых в результате конечноэлементной аппроксимации систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На примере вычислительных экспериментов, проведенных для геоэлектрических моделей, получаемых на промежуточных этапах интерпретации данных магнитотеллурических зондирований, будет проанализирована вычислительная эффективность различных вычислительных схем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ

Известно, что одной из самых важных составляющих, обеспечивающих вычислительную эффективность конечноэлементных схем, является использование технологии разделения моделируемого поля на нормальную составляющую, создаваемую источником во вмещающей (как правило, горизонтально-слоистой) среде, и на аномальную составляющую, которая описывает поле влияния расположенных во вмещающей среде неоднородностей удельной проводимости (аномальное поле) [1–4].

При этом возможны различные математические постановки, используемые для моделирования гармонического по времени электромагнитного поля, среди которых мы будем рассматривать следующие: постановку для узлового МКЭ [5], постановку для векторного МКЭ [6], а также специальную векторно-узловую постановку.

* *Статья получена 7 октября 2012 г.*

Математическая модель для узлового МКЭ имеет следующий вид [5]

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{\mathbf{A}}^a + i\omega \sigma \vec{\mathbf{A}}^a + \sigma \text{grad} V = (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n, \quad (1)$$

$$-\text{div}(\sigma \text{grad} V) - i\omega \text{div}(\sigma \vec{\mathbf{A}}^a) = -\text{div}((\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n), \quad (2)$$

в которой под $\Delta \vec{\mathbf{A}}^a$ понимается вектор-функция, определяемая соотношением $\Delta \vec{\mathbf{A}}^a = \text{grad}(\text{div} \vec{\mathbf{A}}^a) - \text{rot}(\text{rot} \vec{\mathbf{A}}^a)$, вектор напряженности аномальной части электрического поля $\vec{\mathbf{E}}^a$ определяется соотношением $\vec{\mathbf{E}}^a = -i\omega \vec{\mathbf{A}}^a - \text{grad} V$, а вектор напряженности нормальной части электрического поля $\vec{\mathbf{E}}^n$ определяется из решения соответствующей задачи меньшей размерности в горизонтально слоистой среде. В уравнениях (1), (2) μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, i – мнимая единица, ω – круговая частота поля источника, σ – удельная проводимость трехмерной среды, σ^n – удельная проводимость вмещающей (однородной или горизонтально-слоистой) среды.

На внешней границе S расчетной области задаются однородные краевые условия на векторный потенциал $\vec{\mathbf{A}}^a$ и скалярный потенциал V

$$\vec{\mathbf{A}}^a|_S = 0, \quad V|_S = 0. \quad (3)$$

Математическая модель для векторного МКЭ имеет вид [6]

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \text{rot} \vec{\mathbf{A}}^a + i\omega \sigma \vec{\mathbf{A}}^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n, \quad (4)$$

где аномальная составляющая напряженности электрического поля $\vec{\mathbf{E}}^a$ определяется соотношением $\vec{\mathbf{E}}^a = -i\omega \vec{\mathbf{A}}^a$.

И, наконец, рассмотрим математическую модель для векторно-скалярной постановки. Эта модель так же, как и модель (1), (2), является моделью с двумя потенциалами – векторным $\vec{\mathbf{A}}^a$ и скалярным V , но в отличие от постановки (1)–(3) для узлового МКЭ в ней вектор-потенциал $\vec{\mathbf{A}}^a$ ищется в виде линейной комбинации векторных базисных функций. Соответствующая математическая модель имеет вид

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{\mathbf{A}}^a) + i\omega \sigma (\vec{\mathbf{A}}^a + \text{grad} V^a) = (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n, \quad (5)$$

$$-i\omega \text{div}(\sigma \text{grad} V^a) - i\omega \text{div}(\sigma \vec{\mathbf{A}}^a) = -\text{div}((\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n), \quad (6)$$

и для нее $\vec{\mathbf{E}}^a = -i\omega (\vec{\mathbf{A}}^a + \text{grad} V)$.

Для решения СЛАУ, получаемых в результате конечноэлементных аппроксимаций рассмотренных выше задач, вообще говоря, могут быть использованы итерационные методы на подпространствах Крылова [7], ориентированные на решение систем с несимметричными разреженными матрицами, например, метод обобщенных минимальных невязок (general minimal residual method – GMRES) [8], метод бисопряженных градиентов (bi-conjugate gradient method – BCG (иногда используется аббревиатура BiCG)) [9], локально-оптимальная схема (ЛОС) [10].

Кроме этих методов в случае, если матрица СЛАУ является комплексно-симметричной (не обязательно эрмитовой), существуют модификации метода сопряженных градиентов (Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient Method – COCG) [11] и сопряженных невязок (Conjugate A-Orthogonal Conjugate Residual Method – COCR) [12]. Эти методы имеют формулы, очень похожие на формулы методов сопряженных градиентов и сопряженных невязок для симметричных вещественнозначных матриц.

Для узлового МКЭ вычислительно эффективным является метод, рассмотренный в работе [13] и основанный на минимизации невязки с использованием блочной релаксации (МНБР).

Заметим, что при решении задач магнитотеллурики нормальная составляющая напряженности электрического поля вычислялась из решения одномерной задачи

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{d^2}{dz^2} A_\xi^n + i\omega \sigma A_\xi^n = J_\xi.$$

Электрическое поле \vec{E}^n , связанное с вектор-потенциалом \vec{A}^n соотношением $\vec{E}^n = -i\omega \vec{A}^n$, может быть получено в виде

$$\vec{E}^n = -i\omega \left(-A_\xi^{1D} \sin \alpha, A_\xi^{1D} \cos \alpha, 0 \right),$$

где α – это угол поворота токов относительно направления ξ .

При решении трехмерной задачи в качестве направления ξ обычно используется два ортогональных направления сторонних токов – вдоль осей X и Y .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной работе приведем результаты вычислительных экспериментов для геоэлектрических моделей, которые были получены на промежуточных этапах интерпретации практических данных.

В качестве первого примера рассмотрим фрагмент геоэлектрической модели, полученной на промежуточном этапе интерпретации данных МТЗ вдоль профиля ЗДВ (Северо-Западный участок) в пределах Дальневосточного Федерального округа.

При использовании узлового МКЭ итерационные методы решения СЛАУ GMRES, BCG, ЛОС и МНБР для данной задачи не сходились.

Проведем сравнение вычислительных затрат, требуемых для моделирования трехмерного электромагнитного поля при использовании A -постановки и $A-V$ -постановки.

Геоэлектрическая модель содержит 63 приповерхностных объекта с удельным сопротивлением от 0.1 Ом·м до 3000 Ом·м. Параметры горизонтально-слоистой среды приведены в табл. 1, на рис. 1 показан 3D-вид геоэлектрической модели с 63 объектами.

Вычислительные затраты, потребовавшиеся для решения конечноэлементных СЛАУ, полученных при использовании векторного МКЭ (A -постановка и $A-V$ -постановка), приведены в табл. 2.

Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что применение $A-V$ -постановки позволило сократить время решения СЛАУ на самой низкой частоте 0.00038 Гц примерно в 19 раз для X -направления тока и примерно в 40 раз для Y -направления тока. На самых высоких частотах 6.25–500 Гц время решения СЛАУ, полученных при использовании A -постановки, было меньшим, чем при использовании $A-V$ -постановки, однако время решения СЛАУ, соответствующих этим частотам, несущественно мало по сравнению со временем решения СЛАУ на низких частотах.

Таблица 1

Параметры вмещающей горизонтально-слоистой среды для задачи с 63 объектами

№	Толщина, м	Удельное сопротивление, Ом·м
1	400	1400
2	17000	10000
3	10000	700
4	22000	200
5	60000	300
6	∞	150

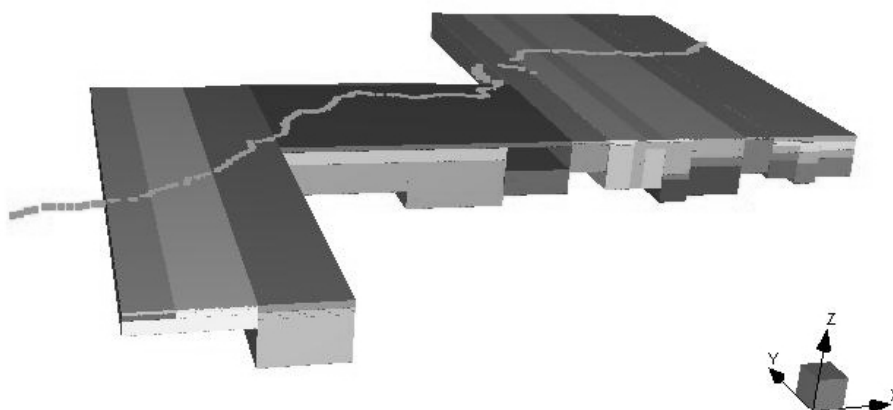


Рис. 1. 3D-вид геоэлектрической модели с 63 объектами

Общее время решения задачи для 21 частоты и двух направлений тока составило 24 ч 0 мин 37 с при использовании $A-V$ -постановки и 221 ч 22 мин 36 с при использовании A -постановки.

Проведем вычислительные эксперименты на геоэлектрической модели, полученной на одном из этапов интерпретации данных МТЗ в районе Верхне-Илимпейской параметрической скважины (это одна из обследуемых на наличие минеральных ресурсов площадей Восточной Сибири).

В геоэлектрическую модель включены массивные глубинные аномалии и множество относительно небольших аномалий, расположенных на небольших глубинах (всего 36 объектов). Параметры вмещающей горизонтально-слоистой среды приведены в табл. 3.

Таблица 2

Вычислительные затраты для магнитотеллурической задачи с 63 объектами

Ток (X или Y), частота, Гц	Векторный МКЭ, COCR(MRS), $A-V$ -постановка		Векторный МКЭ, COCR(MRS), A -постановка	
	итерации	время	итерации	время
X, 0.00038	6410	48 мин 52 с	293378	15 ч 9 мин 41 с
X, 0.00076	6427	49 мин 14 с	247750	12 ч 48 мин 12 с

Окончание табл. 2

Ток (X или Y), частота, Гц	Векторный МКЭ, СОСР(MRS), $A-V$ -постановка		Векторный МКЭ, СОСР(MRS), A -постановка	
	итерации	время	итерации	время
X , 0.00152	5197	39 мин 41 с	161885	8 ч 21 мин 57 с
X , 0.00305	6206	47 мин 18 с	124208	6 ч 25 мин 8 с
X , 0.0061	6073	46 мин 3 с	108480	5 ч 36 мин 22 с
X , 0.0122	6445	48 мин 50 с	66905	3 ч 27 мин 27 с
X , 0.02441	5475	41 мин 39 с	45317	2 ч 20 мин 31 с
X , 0.04882	5713	43 мин 22 с	30394	1 ч 34 мин 14 с
X , 0.19531	4313	32 мин 43 с	16414	50 мин 53 с
X , 0.39062	3495	26 мин 32 с	10697	33 мин 10 с
X , 0.78125	2039	15 мин 28 с	4881	15 мин 8 с
X , 1.5625	1162	8 мин 53 с	1858	5 мин 45 с
X , 3.125	681	5 мин 13 с	784	2 мин 25 с
X , 6.25	408	3 мин 10 с	566	1 мин 45 с
X , 12.5	290	2 мин 13 с	311	57 с
X , 50	151	1 мин 11 с	178	33 с
X , 100	113	54 с	110	20 с
X , 250	102	48 с	109	20 с
X , 500	102	49 с	93	17 с
Y , 0.00038	7789	59 мин 21 с	786053	40 ч 37 мин 21 с
Y , 0.00076	8288	1 ч 2 мин 58 с	575295	29 ч 43 мин 50 с
Y , 0.00152	9563	1 ч 12 мин 28 с	452159	23 ч 22 мин 1 с
Y , 0.00305	10544	1 ч 19 мин 54 с	351491	18 ч 9 мин 53 с
Y , 0.0061	11422	1 ч 26 мин 7 с	267834	13 ч 50 мин 29 с
Y , 0.0122	8944	1 ч 7 мин 37 с	206099	10 ч 39 мин 3 с
Y , 0.02441	9196	1 ч 9 мин 28 с	167597	8 ч 39 мин 40 с
Y , 0.04882	9406	1 ч 10 мин 46 с	116391	6 ч 0 мин 53 с
Y , 0.19531	10395	1 ч 18 мин 52 с	53320	2 ч 45 мин 19 с
Y , 0.39062	8896	1 ч 8 мин 1 с	37143	1 ч 55 мин 10 с
Y , 0.78125	6270	47 мин 33 с	32261	1 ч 40 мин 2 с
Y , 1.5625	4816	36 мин 25 с	17378	53 мин 53 с
Y , 3.125	3591	27 мин 22 с	10973	34 мин 1 с
Y , 6.25	1992	15 мин 13 с	4569	14 мин 10 с
Y , 12.5	1107	8 мин 27 с	1263	3 мин 54 с
Y , 50	253	1 мин 57 с	299	55 с
Y , 100	185	1 мин 26 с	197	36 с
Y , 250	157	1 мин 13 с	173	32 с
Y , 500	165	1 мин 17 с	163	30 с

Таблица 3

**Параметры горизонтально-слоистой среды
для геоэлектрической модели с 36 объектами**

№	Толщина слоя, м	Сопротивление слоя, Ом·м
1	60	100
2	490	300
3	100	20
4	650	6
5	2500	500
6	5000	700
7	25000	1000
8	1000	16
9	170000	700
10	50000	500
11	10000	100
12	∞	50

3D-вид геоэлектрической модели показан на рис. 2. Конечноэлементная сетка содержит 561759 несогласованных параллелепипедов, 588007 узлов и 1781314 ребер, из них 141399 являются терминальными ребрами и 1639915 – регулярными. Вычислительные затраты, требуемые для решения конечноэлементных СЛАУ, получающихся в результате аппроксимации задачи векторным МКЭ и узловым МКЭ, приведены в табл. 4 и 5 соответственно.

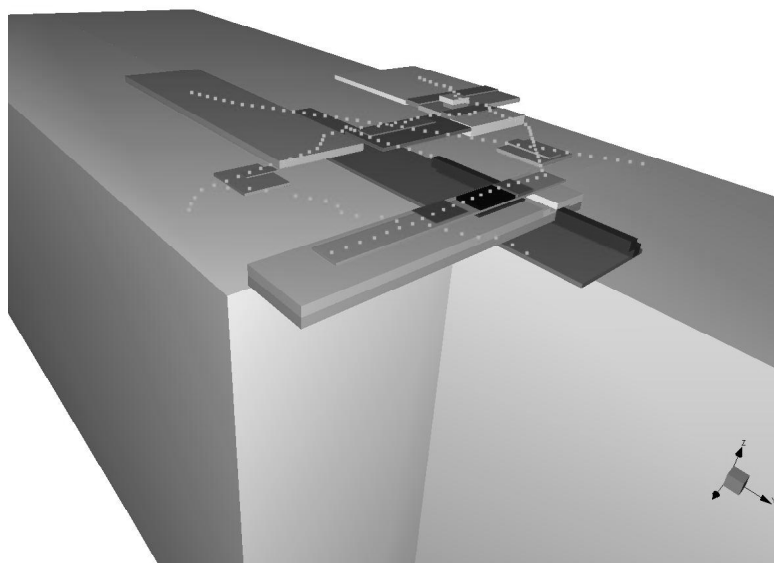


Рис. 2. 3D-вид геоэлектрической модели с 36 объектами

Таблица 4

**Вычислительные затраты для магнитотеллурической задачи
с 36 объектами при использовании векторного МКЭ**

Ток (X или Y), частота, Гц	Векторный МКЭ, СОСР(MRS), A-V-постановка		Векторный МКЭ, СОСР(MRS), A-постановка	
	итерации	время	итерации	время
X, 0.000584	3997	1 ч 53 мин 36 с	222483	50 ч 12 мин 40 с
X, 0.001166	4128	1 ч 56 мин 19 с	174904	39 ч 28 мин 23 с
X, 0.002326	4253	2 ч 0 мин 6 с	142183	32 ч 5 мин 19 с
X, 0.004642	4222	1 ч 58 мин 42 с	108071	24 ч 23 мин 24 с
X, 0.009261	4491	2 ч 5 мин 52 с	82885	18 ч 42 мин 21 с
X, 0.01848	4579	2 ч 7 мин 29 с	60696	13 ч 41 мин 53 с
X, 0.03687	3966	1 ч 50 мин 34 с	47786	10 ч 47 мин 4 с
X, 0.07356	3758	1 ч 44 мин 40 с	33717	7 ч 36 мин 33 с
X, 0.1468	2780	1 ч 17 мин 45 с	22236	5 ч 1 мин 6 с
X, 0.5843	1900	53 мин 2 с	11050	2 ч 29 мин 37 с
X, 1.166	1375	38 мин 34 с	7822	1 ч 45 мин 55 с
X, 2.326	1198	33 мин 27 с	6282	1 ч 25 мин 3 с
X, 4.642	1021	28 мин 40 с	4788	1 ч 4 мин 50 с
X, 9.261	1008	28 мин 19 с	4070	55 мин 6 с
X, 36.87	914	25 мин 42 с	2084	28 мин 13 с
X, 146.8	614	17 мин 21 с	958	12 мин 58 с
X, 316.2	410	11 мин 34 с	620	8 мин 23 с
Y, 0.000584	4564	2 ч 8 мин 54 с	237470	53 ч 35 мин 36 с
Y, 0.001166	4694	2 ч 12 мин 13 с	186039	41 ч 59 мин 10 с
Y, 0.002326	4945	2 ч 18 мин 47 с	142355	32 ч 7 мин 38 с
Y, 0.004642	4714	2 ч 12 мин 26 с	108758	24 ч 32 мин 42 с
Y, 0.009261	5151	2 ч 24 мин 37 с	89414	20 ч 10 мин 46 с
Y, 0.01848	5174	2 ч 24 мин 51 с	68948	15 ч 33 мин 38 с
Y, 0.03687	4668	2 ч 10 мин 40 с	50109	11 ч 18 мин 31 с
Y, 0.07356	4227	1 ч 59 мин 7 с	34708	7 ч 49 мин 59 с
Y, 0.1468	3146	1 ч 28 мин 6 с	23236	5 ч 14 мин 38 с
Y, 0.5843	1830	51 мин 14 с	12050	2 ч 43 мин 10 с
Y, 1.166	1381	38 мин 45 с	8383	1 ч 53 мин 30 с
Y, 2.326	1242	34 мин 42 с	7098	1 ч 36 мин 6 с
Y, 4.642	1047	29 мин 19 с	5043	1 ч 8 мин 17 с
Y, 9.261	943	26 мин 30 с	4457	1 ч 0 мин 21 с
Y, 36.87	821	23 мин 7 с	2152	29 мин 8 с
Y, 146.8	605	17 мин 8 с	942	12 мин 45 с
Y, 316.2	445	12 мин 37 с	657	8 мин 53 с

Таблица 5

**Вычислительные затраты для магнитотеллурической задачи с 36 объектами
при использовании узлового МКЭ**

Ток (X или Y), частота, Гц	Узловой МКЭ, МНБР		Узловой МКЭ, GMRES(50)	
	итерации	время	итерации	время
X , 0.000584	4	5 мин 58 с	239	5 ч 5 мин 39 с
X , 0.001166	6	10 мин 8 с	276	5 ч 52 мин 58 с
X , 0.002326	8	12 мин 42 с	328	6 ч 59 мин 28 с
X , 0.004642	14	22 мин 8 с	493	10 ч 30 мин 29 с
X , 0.009261	29	45 мин 25 с	>1000	>21 ч
Y , 0.000584	4	6 мин 31 с	262	5 ч 35 мин 3 с
Y , 0.001166	6	9 мин 44 с	286	6 ч 5 мин 45 с
Y , 0.002326	9	14 мин 24 с	357	7 ч 36 мин 33 с
Y , 0.004642	15	24 мин 3 с	712	15 ч 10 мин 33 с
Y , 0.009261	29	46 мин 17 с	>1000	>21 ч

При использовании узлового МКЭ и метода МНБР решение СЛАУ удалось получить только для нижних 5 частот от 0.000584 Гц до 0.009261 Гц. Метод GMRES позволил получить решение только для четырех нижних частот. Для остальных частот метод GMRES не смог понизить невязку до требуемого уровня за 1000 итераций (что соответствовало примерно 21 ч времени).

Общее время решения задачи (на всех частотах), полученное для A -постановки и A - V -постановка, а также для их комбинации с методом МНБР, приведено в табл. 6 (на 1 ядре и 10 ядрах). Распараллеливание выполнялось по гармоникам.

Таблица 6

Время решения задачи на всех частотах

Метод решения	Время (1 ядро)	Время (10 ядер)
Векторный МКЭ, СОСР, A -постановка	439 ч 16 мин	61 ч 44 мин
Векторный МКЭ, СОСР, A - V -постановка	46 ч 20 мин	4 ч 45 мин
Комбинирование методов МНБР и СОСР (A -постановка)	105 ч 16 мин	17 ч 34 мин
Комбинирование методов МНБР и СОСР (A - V -постановка)	28 ч 26 мин	3 ч 37 мин

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты вычислительных экспериментов показали, что время решения задач магнитотеллурики в средах с большим числом 3D-объектов на низких и средних частотах при использовании A - V -постановки на порядок меньше, чем при использовании A -постановки. Наиболее выгодным по вычислительным затратам оказалось комбинирование узлового МКЭ с решателем МНБР на низких частотах и векторного МКЭ в A - V -постановке с решателем СОСР на средних и высоких частотах.

Выявленные в результате проведенных исследований наиболее эффективные постановки и методы позволяют достаточно устойчиво и за приемлемое время получать решение самых сложных трехмерных задач магнитотеллурики и могут быть использованы для интерпретации данных магнитотеллурических зондирований.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Персова М.Г. Компьютерное моделирование геоэлектromагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович // Физика Земли, 2011. – № 2. – С. 3–14.
- [2] Соловейчик Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 896 с.
- [3] Соловейчик Ю.Г. Моделирование нестационарных электромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, В.С. Моисеев, Г.М. Тригубович // Физика Земли, 1998. – № 10. – С. 78–84.
- [4] Badea E.A. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials / E.A. Badea, M.E. Everett, G.A. Newman, O. Biro // Geophysics, 2001. – Vol. 66. – № 3. – P. 786–799.
- [5] Рояк М.Э. Конечноэлементное моделирование трехмерных гармонических электромагнитных полей в задачах аэроэлектроразведки кимберлитовых трубок / М.Э. Рояк, С.Х. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1998. – Т. 1, № 2. – С. 154–168.
- [6] Соловейчик Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учеб. пособие / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
- [7] Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов / В.П. Ильин. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ, 2007. – 371 с.
- [8] Saad Y. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M. Schultz // SIAM J. Sci. Comput. – 1986 – Vol. 7. – P. 856–869.
- [9] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems – SIAM, Philadelphia, – 2003. – 2nd ed. – 528 Pp.
- [10] Soloveichik Y.G. Iterative method for solving finite element systems of algebraic equations / Y.G. Soloveichik // Computers & Mathematics with Applications. – Vol. 33, Issue 6. – 1997. – P. 87–90.
- [11] Van der Vorst H.A. A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax=b$, where A is symmetric complex / H.A. Vorst van der, J.B.M. Melissen // IEEE Transaction on Magnetics. – Vol. 26. – № 2. – 1990. – P. 706–708.
- [12] Sogabe T. A COCR method for solving complex symmetric linear systems / T. Sogabe, S.-L. Zhang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – № 199. – 2007. – P. 297–303.
- [13] Домников П.А. Метод решения систем уравнений, возникающих при конечноэлементной аппроксимации гармонических по времени электромагнитных полей / П.А. Домников // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 2(56). – С. 41–46.

Персова Марина Геннадьевна, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики и электромеханики. Имеет более 80 публикаций, в том числе 2 монографии. E-mail persova@fpm.ami.nstu.ru

Соловейчик Юрий Григорьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: конечноэлементное моделирование электромагнитных и тепловых полей. Имеет более 100 публикаций, в том числе 2 монографии. E-mail krpmt@fpm.ami.nstu.ru

Домников Петр Александрович, аспирант кафедры прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: разработка методов решения СЛАУ, полученных в результате конечноэлементной аппроксимации в задачах электромагнетизма. Имеет 34 публикации. E-mail persova@fpm.ami.nstu.ru

Шайкова Татьяна Геннадьевна, аспирант кафедры прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики. Имеет 6 публикаций. E-mail lakrimoza3@list.ru

Абрамов Михаил Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики. Имеет 20 публикаций. E-mail mike_abramov@inbox.ru

Кожкина Юлия Георьевна, магистрант кафедры прикладной математики НГТУ. Основное направление научных исследований: решение обратных задач геоэлектроразведки. Имеет 1 публикацию. E-mail koshkina_yui@mail.ru

Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Domnikov P.A., Shashkova T.G., Abramov M.V., Koshkina Yu. I.

Solution of three-dimensional magnetotelluric problems using the finite element method in complicated media

Computational schemes for finite element modelling of 3-D electromagnetic fields in magnetotelluric sounding problems are considered. The description of mathematical apparatus for solving the 3-D problem on the basis of the vector, node and vector-node mathematical statement, and examples of numerical experiments are presented. The computational efficiency of various methods used for solving the systems of linear algebraic equations is estimated.

Key words: 3-D modeling, finite element method, harmonic electromagnetic fields, magnetotelluric soundings.