Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 1(50)

УДК: 629.7.018.4:620.178.3

Проблемы экспериментального модального анализа конструкций ограниченным числом сил возбуждения колебаний*

В.А. БЕРНС, Е.А. ЛЫСЕНКО

Задачей экспериментального модального анализа конструкций является определение обобщенных динамических характеристик их собственных тонов колебаний в заданном частотном диапазоне. В работе рассматриваются проблемы определения этих характеристик числом сил возбуждения, меньшим числа исследуемых собственных тонов.

Ключевые слова: вибрационные испытания, экспериментальный модальный анализ, ограниченное число сил возбуждения.

В экспериментальном модальном анализе собственные тона выделяются в режиме фазового резонанса из условия равенства нулю синфазной (в фазе с возбуждением) составляющей перемещений или ускорений контрольных точек конструкций. В таких испытаниях практически всегда количество исследуемых собственных тонов колебаний и число точек, в которых регистрируется отклик конструкции, превышает число сил возбуждения. В этом случае во всех точках измерения не удается точно выполнить условие равенства нулю синфазной составляющей вынужденных колебаний для определения собственных частот и векторов. Поэтому для оценки отклика системы вводятся некоторые критерии, и подбор возбуждения производится по этим критериям, а динамические свойства конструкции выявляются с помощью анализа соотношений между собственными и вынужденными монофазными колебаниями [1].

Целью настоящей работы являются исследования факторов, влияющих на выбор необходимого числа сил возбуждения колебаний.

Отметим, что вынужденные колебания динамических систем являются монофазными, если различия в фазах колеблющихся точек равны 0 или π, т. е.

$$U = \lambda V, \tag{1}$$

где U – синфазная, а V – квадратурная составляющая перемещений; λ – действительное число, равное котангенсу фазового сдвига между откликом системы и возбуждением.

Термин «монофазный отклик» впервые употреблен в работе [2]. Здесь же, а затем и в [3] совокупность сил возбуждения, фазы которых отличаются на 0 или π, названа монофазным силовым распределением или просто монофазным возбуждением.

Свойства монофазных колебаний при монофазном и немонофазном возбуждении изложены в работе [3]. Здесь же отметим только, что если на некоторых частотах вынужденных колебаний подбором монофазного возбуждения удается сделать нулевым вектор синфазных составляющих перемещений U, т. е. $\lambda = 0$, то этими частотами являются собственные частоты системы без демпфирования, а монофазные колебания совпадают с собственными. На этом основании собственные колебания являются частным случаем вынужденных монофазных колебаний.

Ограниченным числом сил возбуждения невозможно точно выполнить условие (1), поэтому будем считать, что возбуждением в L точках реализуется режим вынужденных моно-

* *Статья получена 21 сентября 2012 г.*

фазных колебаний в N точках системы ($L \le N$), если в этом режиме достигается минимум величины

$$R = \frac{(U^T - \lambda V^T)(U - \lambda V)}{V^T V}.$$

Для линейной системы отклик на гармоническое возбуждение $E = \tilde{E}\xi$ есть величины синфазной $U = \tilde{U}\xi$ и квадратурной $V = \tilde{V}\xi$ составляющих перемещений. Столбцами матриц $\tilde{E}(N \times L)$, $\tilde{U}(N \times L)$ и $\tilde{V}(N \times L)$ являются, соответственно, векторы сил, синфазных и квадратурных составляющих перемещений конструкции в L независимых испытаниях. Вектор ξ, а также параметр λ, при монофазном возбуждении определяются из условий минимума величины R. Эти условия приводят к задаче о собственных значениях $(D - \alpha B)\,\xi = 0$, и искомым вектором ξ является собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению α. Здесь $D = \tilde{U}^T\tilde{U} - 2\lambda\tilde{V}^T\tilde{U} + \lambda^2\tilde{V}^T\tilde{V}$, $B = \tilde{V}^T\tilde{V}$. Величина λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\xi^T\tilde{V}^T\tilde{U}\xi}{\xi^T\tilde{V}^T\tilde{V}\xi}, \tag{2}$$

в которую входит вектор ξ, соответствующий наименьшему значению λ. Поэтому λ определяется так же как величина, при которой достигается минимум наименьшего собственного значения. Для этой цели используется итерационный процесс.

Показано [1], что определение собственных частот из условия равенства нулю параметра λ (2) и по минимуму квадрата длины вектора синфазных составляющих перемещений

$$\min \frac{\xi^{\mathrm{T}}\tilde{U}^{\mathrm{T}}\tilde{U}\xi}{\xi^{\mathrm{T}}\tilde{V}^{\mathrm{T}}\tilde{V}\xi}$$

приводит к одинаковым значениям для этих частот независимо от свойств динамической системы.

Наряду с собственными частотами обобщенными динамическими характеристиками собственных тонов колебаний являются обобщенные массы и обобщенные коэффициенты демпфирования. Для определения обобщенной массы (a_i) и обобщенного коэффициента демпфирования (h_i) i-го собственного тона колебаний использовались следующие формулы [1]:

$$a_i = \frac{V_i^T(\lambda_i E_i - F_i)}{(1+\lambda_i^2)(p_i^2 - \omega^2)V_i^{*2}}, \quad h_i = \frac{V_i^T(E_i + \lambda_i F_i)}{(1+\lambda_i^2)V_i^{*2}}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Здесь E_i, F_i – векторы синфазной и квадратурной составляющих сил возбуждения, обеспечивающие выделение i-го тона колебаний на частоте ω (если собственный тон можно выделить без введения квадратурной составляющей возбуждения, то такой случай отмечается условием $F = 0$); p_i – собственная частота тона, определяемая по переходу λ_i через 0; V_i^* – квадратурная составляющая перемещения точки нормирования формы тона. Если положить $\lambda_i = 0$ при $F \neq 0$ (условие «фиктивного» фазового резонанса), то получим известную формулу определения обобщенных масс введением квадратурной составляющей возбуждения (см., например, [4]).

Особенности определения обобщенных характеристик собственных тонов колебаний конструкций ограниченным числом сил возбуждения колебаний исследовались расчетными методами.

В численном эксперименте получены количественные оценки точности определения обобщенных характеристик собственных тонов. Эти оценки показали, что в отсутствии тонов с близкими собственными частотами характеристики тонов определяются с приемлемой точностью даже при одноточечном (для конструкций, имеющих плоскость симметрии – двухточечном) возбуждении колебаний. Некоторые результаты таких исследований представлены в работе [5].

Методом статистического моделирования исследовано влияние случайных ошибок измерения перемещений на точность определения обобщенных масс, обобщенных коэффициентов демпфирования и собственных частот [6]. При этом варьировались уровни ошибок измерений и способы настройки чувствительности измерительного оборудования, число исследуемых собственных тонов, количество сил возбуждения, уровни демпфирования колебаний. Погрешности подбора сил определялись погрешностями измерения перемещений. Показано, что с увеличением количества сил возбуждения резко снижается точность определения обобщенных характеристик.

В исследованиях полагалось, что ошибки измерений синфазной и квадратурной составляющих перемещений распределяются по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Для моделирования ошибок использовался датчик случайных чисел. Создание ошибок требуемого уровня осуществлялось соответствующим изменением дисперсии с использованием свойства нормального распределения – случайная величина x с вероятностью 0,997 удовлетворяет соотношению $|x| \le 3\sigma$, где σ – дисперсия. Вычисление дисперсии по формуле $\sigma = \varepsilon/300$, где ε – величина ошибки измерений в процентах, означает, что с вероятностью 0,997 погрешности измерений не превышают ε.

Расчеты относительной погрешности определения обобщенной массы ε_a, обобщенного коэффициента демпфирования ε_h и собственной частоты ε_p низшего тона колебаний приведены на рис. 1–2, на которых символом δ обозначен логарифмический декремент колебаний, а L – число сил возбуждения. Введен также безразмерный параметр частоты $\Omega = \omega/p_i^*$, где p_i^* – собственная частота тона, найденная из условия $\lambda_i = 0$. Использование параметра Ω объясняется тем, что по результатам резонансных испытаний определяется не точное значение собственной частоты i-го тона p_i, а величина p_i^*. Для практических же целей представляет интерес оценка точности определения обобщенных характеристик тона вблизи экспериментально найденной собственной частоты.

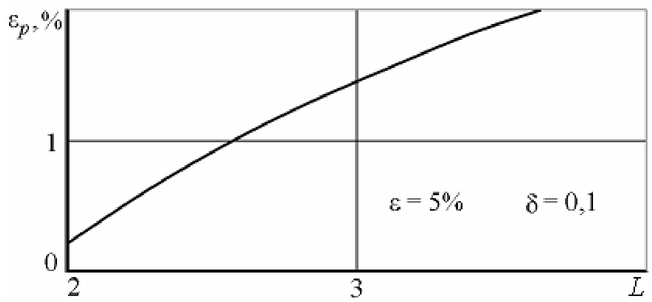

Рис. 1. Погрешности определения собственной частоты при различном числе сил возбуждения

Изучено взаимное влияние тонов с близкими собственными частотами на точность определения обобщенных характеристик собственных тонов колебаний. Рассмотрены варианты:

а) На колебания в окрестности собственной частоты i-го тона p_i оказывает влияние j-й тон с частотой p_j. Вводится допущение о том, что этим влиянием можно пренебречь.

Получена зависимость параметра монофазных колебаний от характеристик собственных тонов:

$$æ = p_j / p_i;\ \eta_{i,j} = h_{i,j} \Big/ \left(p_{i,j}^2 a_{i,j} \right) = \delta_{i,j} / \pi;\ \tilde{\omega} = \omega \big/ p_i;\ \zeta = w_{ij}^2\, a_i / a_j;$$

где a_i и a_j – обобщенные массы тонов, w_{ij} – коэффициент, характеризующий вклад j-го тона в колебания системы, δ_i, δ_j – обобщенные декременты колебаний тонов.

По переходу λ через нуль от положительных значений к отрицательным определяются собственные частоты системы из уравнения

$$f(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega}^2 - 1)\left[(\tilde{\omega}^2 - \text{æ}^2)^2 + \eta_j^2 \text{æ}^4\right] + \zeta(\tilde{\omega}^2 - \text{æ}^2)\left[(\tilde{\omega}^2 - 1)^2 + \eta_i^2\right] = 0 \qquad (3)$$

(собственным частотам соответствует переход $f(\tilde{\omega})$ от отрицательных значений к положительным). Установлены соотношения между частотой фазового резонанса p_i^* и собственными частотами тонов: относительная собственная частота $\tilde{p}_i > 1$ при æ >1; $\tilde{p}_i = 1$ при æ = 1; $\tilde{p}_i < 1$ при æ < 1. Здесь $\tilde{p}_i = p_i^* / p_i$.

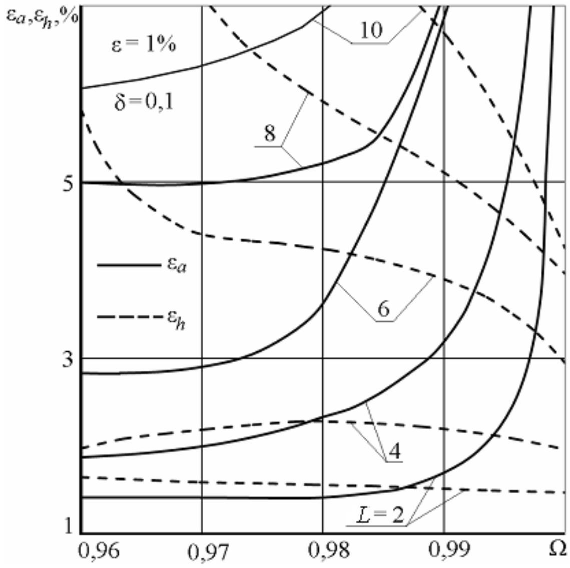

Рис. 2. Погрешности определения обобщенной массы и обобщенного коэффициента демпфированиядля различного числа сил возбуждения

Если уравнение (3) имеет только один действительный положительный корень, что имеет место, когда параметры ζ, æ, η_i и η_j удовлетворяют неравенству

$$4\, d^3 + 27\, c^2 > 0,$$

где

$$d = -\frac{1}{3\text{в}_1^2} + \text{в}_2, \quad c = \frac{2}{27\text{в}_1^3} - \frac{1}{3\text{в}_1 \text{в}_2} + \text{в}_3, \quad \text{в}_1 = -\frac{\text{æ}^2(2+\zeta) + 1 + 2\zeta}{1+\zeta},$$

$$\text{в}_2 = \frac{\text{æ}^4\eta_j^2 + 2\,\text{æ}^2(1+\zeta) + \zeta(1+\eta_i^2)}{1+\zeta}, \quad \text{в}_3 = -\frac{\text{æ}^4\eta_j^2 + \text{æ}^2\zeta\eta_i^2}{1+\zeta},$$

то собственная частота p_i^* может быть как частотой i-го, так и частотой j-го тона. Показано [7], что частота p_i^* соответствует i-му тону, если при æ < 1 оба корня уравнения $f'(\tilde{\omega}) = 0$ меньше, а при æ > 1 больше корня уравнения (3). В противном случае i-й тон не будет обнаружен в процессе испытаний: в этом случае одноточечное возбуждение не позволяет выделить исследуемый тон колебаний.

б) Учитывается влияние j-го тона на колебания системы в окрестности собственной частоты i-го тона, так как не удается выделить «чистый» тон с использованием одноточечного возбуждения. В отличие от предыдущего случая, здесь в выражение для параметра монофазных колебаний входит величина $\alpha = w_{ij}/w_{ji}$ в нечетной степени:

$$\lambda(\tilde{\omega}) = \frac{-\tau_1\tau_2 + (d_2\tau_2 - d_1\tau_1)(d_2\tau_1 + d_1\tau_2)}{\tau_2^2 + (d\tau_1 + d_1\tau_2)},$$

где

$$\tau_1 = \frac{(\tilde{\omega}^2 - 1)\left[(\tilde{\omega}^2 - æ^2)^2 + \eta_j^2 æ^4\right] + \zeta(\tilde{\omega}^2 - æ^2)\left[(\tilde{\omega}^2 - 1)^2 + \eta_j^2\right]}{\left[\zeta(\tilde{\omega}^2 - 1) + (\tilde{\omega}^2 - æ^2)\right]^2 + \left(\zeta\eta_i + \eta_j æ^2\right)^2},$$

$$\tau_2 = \frac{\eta_i(\tilde{\omega}^2 - æ^2)^2 + \eta_j æ^2 \zeta(\tilde{\omega}^2 - 1)^2 + \eta_i\eta_j æ^2\left(\eta_i\zeta + \eta_j æ^2\right)}{\left[\zeta(\tilde{\omega}^2 - 1) + (\tilde{\omega}^2 - æ^2)\right]^2 + \left(\zeta\eta_i + \eta_j æ^2\right)^2}, \quad \alpha = \frac{w_{ij}}{w_{ji}},$$

$$d_1 = \frac{в_1 в_2 + \alpha\left(\zeta\eta_i + æ^2\eta_j\right)\left(\zeta\eta_i + \alpha w_{ji}^2\eta_j\right)}{\alpha^2 w_{ji} c}, \quad d_2 = \frac{в_1\left(\zeta\eta_i + æ^2\eta_j\right) - \alpha в_2\left(\zeta\eta_i + \alpha w_{ji}^2\eta_j\right)}{\alpha^2 w_{ji} c},$$

$$в_1 = \lambda\zeta(\tilde{\omega}^2 - 1) + \lambda^2 w_{ji}^2(\tilde{\omega}^2 - æ^2), \; в_2 = \zeta(\tilde{\omega}^2 - 1) + (\tilde{\omega}^2 - æ^2), \; c = в_1^2 + \left(\zeta\eta_i + æ^2\eta_j\right)^2$$

Это означает, что взаимное влияние определяется не только параметрами, но свойствами этих тонов. Наименьшие погрешности определения обобщенных характеристик соответствуют совокупности симметричного и антисимметричного тонов. С нарушением симметрии системы погрешности резко увеличиваются (рис. 3–5; здесь $\tilde{p}_i$, $\tilde{a}_i$, $\tilde{h}_i$ – отношения определяемых собственных частот, обобщенных масс и обобщенных коэффициентов демпфирования к соответствующим точным значениям).

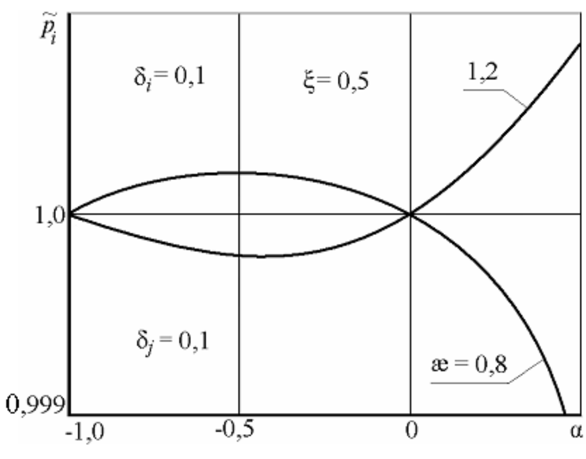

Рис. 3. Оценки собственной частоты в зависимости от параметра α

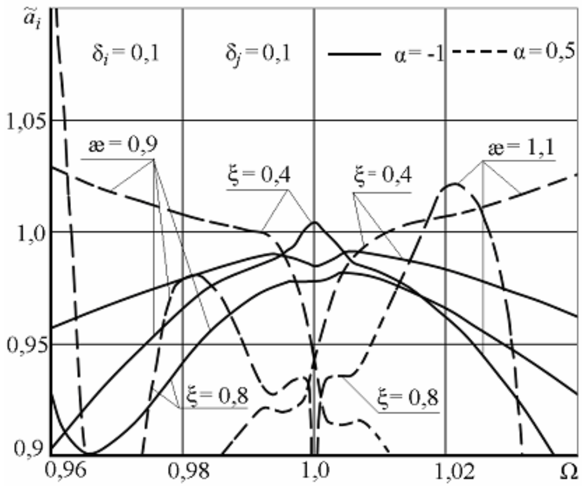

Рис. 4. Оценки обобщенной массы при различных величинах ξ и æ

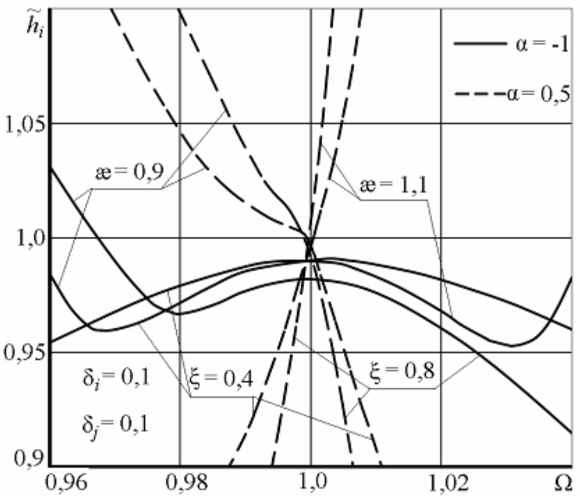

Рис. 5. Оценки обобщенного коэффициента демпфирования при различных величинах ξ и æ

Полученные в работе результаты исследований позволяют установить оптимальное количество сил возбуждения колебаний в экспериментальном модальном анализе конструкций с учетом точностных характеристик испытательного оборудования и соотношений между параметрами тонов с близкими собственными частотами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Бернс В.А.** Модальная идентификация динамических систем на основе монофазных колебаний / В.А. Бернс // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 3 (40). – С. 99–109.

[2] **Микишев Г.Н.** Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г.Н. Микишев, Б.И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.

[3] **Кононенко В.О.** Методы идентификации механических нелинейных колебательных систем / В.О. Кононенко, Н.П. Плахтиенко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 114 с.

[4] **Смыслов В.И.** Об экспериментальных способах исследования колебаний летательных аппаратов / В.И. Смыслов // Тр. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. – 1970. – Вып. 1217. – С. 3–63.

[5] **Бернс В.А.** Построение расчетных моделей динамических систем по результатам испытаний / В.А. Бернс // Известия ТПУ. – 2011. – Т. 318, № 2. – С. 15–20.

[6] **Бернс В.А.** Оценка точности определения характеристик собственных тонов при наличии случайных ошибок в экспериментальных данных / В.А. Бернс // Вестник СибГАУ. – 2010. – № 5 (31). – С. 208–212.

[7] **Бернс В.А.** Погрешности определения характеристик собственных тонов при близких собственных частотах / В.А. Бернс // Контроль. Диагностика. – 2011. – № 3 (153). – С. 12–16.

Бернс Владимир Андреевич, доктор технических наук, начальник отдела динамической прочности ФГУП «СибНИА им. С.А. Чаплыгина». Основное направление научных исследований: динамика и прочность летательных аппаратов. Имеет больше 20 публикаций. E-mail: v.berns@yandex.ru

Тел. (383) 278 70 42

Евгений Александрович Лысенко, заместитель начальника отдела ОАО «ИСС» им. академика М.Ф. Решетнева. Основное направление научных исследований: вибрационная прочность космических аппаратов. Имеет 16 публикаций. E-mail: mla340@iss-reshetnev.ru

Тел. (3919) 72-80-08

V.A. Berns, E.A. Lysenko

Problems of the experimental modal analysis of structures by limited number of excitation forces of vibration

The task of experimental modal analysis of structures is definition of the generalized dynamic characteristics of their own tones of vibration in the set frequency range. In work problems of definition of these characteristics by number of excitation forces, smaller numbers of studied own tones are considered.

Key words: vibration testing, experimental modal analysis, limited number of excitation forces.