

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 681.5.013

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-21-38

Полиномиальное матричное разложение при синтезе неквадратных САУ*

А.А. ВОЕВОДА^а, В.Ю. ФИЛЮШОВ^б

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

^а ucit@ucit.ru ^б filiushov.vladislav@gmail.com

Рост сложности объектов управления вынуждает использовать всё более продвинутые методы синтеза. Относительно простые объекты представляются в виде одноканальной системы или в виде комбинации таковых и рассчитываются отдельно. Более сложные системы необходимо рассматривать как многосвязные. Для этого существует несколько подходов. В рамках настоящей работы рассмотрим синтез системы, представленной в виде полиномиального матричного разложения. Оно позволяет записать замкнутую систему в таком виде, что по аналогии с одноканальными системами удастся выделить «числитель» и «знаменатель» не только объекта и регулятора, но и всей системы. Для многоканальных объектов они запишутся в матричном виде, позволяя выделить характеристическую матрицу, определитель которой является характеристическим полиномом.

В работе рассматривается вывод четырех вариантов полиномиально матричного разложения (ПМР) замкнутой системы. Такая разнообразность представления замкнутой системы вытекает из эквивалентной записи передаточной матрицы в виде левого и правого ПМР объекта или регулятора. Из четырех вариантов записи системы выделены два варианта характеристической матрицы – левая и правая. При преобразовании их к диагональному виду элементы, стоящие на главной диагонали, содержат в себе полюса замкнутой системы по соответствующему каналу. Из приведенного в конце статьи примера видно, что для неквадратного объекта (количество входных и выходных величин не равно, non-square object) с количеством входных воздействий, превышающим количество выходных величин, удобнее использовать левую характеристическую матрицу потому, что она имеет меньшую размерность. Правая характеристическая матрица также может быть применена для синтеза такого объекта управления, но полученное решение более сложное и неочевидное. Ситуация меняется на противоположную, если рассматривать объект с количеством входов меньшим, чем количество выходов. В таком случае правая характеристическая матрица будет меньшего размера и более подходящей для синтеза. Из этого следует вывод, что процедура синтеза системы управления для неквадратных объектов отличается в зависимости от количества входов и выходов.

* Статья получена 23 октября 2020 г.

Ключевые слова: многоканальный, многосвязный, неквадратный, полиномиальное матричное разложение, характеристическая матрица, синтез, матрица Сильвестра, диофантово уравнение

ВВЕДЕНИЕ

Синтез систем управления в пространстве состояний впервые появился в 1960-х и до 1980-х отмечен в большинстве книг по управлению. Применение описания системы в пространстве состояний позволило систематизировать изучение многоканальных систем (MIMO – multi input multi output) управления. Основные идеи такого описания: наблюдаемость и управляемость системы, переход к каноническим видам, расчет регулятора в обратной связи и вычисление недостающих элементов вектора состояния при помощи наблюдателя состояния.

Альтернативным подходом синтеза многоканальных систем, который был предложен в 1970-х годах, является описание через полиномиальные матрицы [1–4] или дифференциальные операторы. Так же как и описание системы в пространстве состояний, полиномиальное матричное описание позволяет представлять многоканальные объекты в удобном для синтеза виде, поэтому синтез системы управления, не отличаясь сложностью, имеет ряд преимуществ.

Многоканальные линейные объекты разделяют на несколько видов. В зависимости от соотношения количества входных воздействий и выходных величин они могут быть *квадратными* (*square*) и *неквадратными* (*non-square*). Синтез систем в полиномиальном матричном представлении для квадратных объектов хорошо описан в работах [5–7]. В [8] решена задача поиска регулятора пониженного порядка путем дифференцирования характеристического полинома. Такой подход позволяет уменьшить порядок рассчитываемого регулятора, но при этом вводятся некоторые ограничения на полученную динамику процессов. В [9] описан модальный метод синтеза для объектов в полиномиальном матричном разложении. В работе [10] найдено решение для регулятора повышенного порядка, где полученные при повышении порядка системы свободные параметры используются для достижения дополнительных качественных характеристик системы.

Множество объектов управления имеют неквадратную структуру. Синтез системы управления для таких объектов представляется более интересной задачей. Перевернутый маятник [11], являясь неустойчивым и не минимально фазовым объектом, выступает ярким примером неквадратной системы, имеющей одно входное воздействие (приложенная к основанию сила) и две выходные величины (угол отклонения маятника и положение каретки). Синтез такой системы различными методами представлен в работах [12–16], также расчет регулятора пониженного порядка для двойного перевернутого маятника представлен в работе [17]. Для повышения качества стабилизации перевернутый маятник можно представить в виде нелинейного объекта управления. В таком случае применима *линеаризация по обратной связи* [18–20] (*linearization by output injection*). Синтез такой модели представлен в работах [21–24]. Линейная модель бокового движения высокоманевренного летательного аппарата на больших углах атаки [25]

является неквадратным объектом, где угол скольжения, угловая скорость крена, угловая скорость рыскания и угол крена являются выходными величинами, а угол отклонения элеронов и угол отклонения руля направления – входными. Разработку алгоритмов синтеза для такого рода объектов можно найти в работах [25–28].

В рамках настоящей работы постараемся показать некоторые основные понятия, необходимые для полиномиального синтеза не квадратных объектов, а именно вывод четырех вариантов разложения замкнутой системы объект–регулятор. Для случая, где входов больше, чем выходов, в работе рассчитан регулятор [29] для правого полиномиального разложения. В работах [30, 31] рассчитан регулятор для объекта с одним входом и двумя выходами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

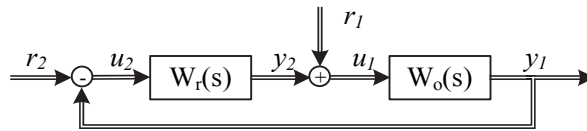
Синтез системы управления выполним заданием желаемых полюсов замкнутой системы для объекта с *матричной передаточной функцией* (далее МПФ) $W_o(s) \in R(s)^{p \times m}$, имеющего $u_1(s) \in R^m(s)$ входных воздействий и $y_1(s) \in R^p(s)$ выходных величин, который записывается *полиномиальным матричным разложением* (*polynomial matrix description*), далее ПМР, в следующем виде:

$$W_o(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s), \quad (1)$$

где $D(s) \in R[s]^{m \times m}$, $\tilde{D}(s) \in R[s]^{p \times p}$, $N(s), \tilde{N}(s) \in R[s]^{p \times m}$. Система управления состоит из регулятора $W_r(s) \in R[s]^{m \times p}$, стоящего в прямой связи и имеющего следующее ПМР:

$$W_r(s) = X(s)Y^{-1}(s) = \tilde{Y}^{-1}(s)\tilde{X}(s),$$

где $Y(s) \in R[s]^{p \times p}$, $\tilde{Y}(s) \in R[s]^{m \times m}$, $X(s), \tilde{X}(s) \in R[s]^{m \times p}$, а также имеющего $u_2(s) \in R(s)^p$ и $y_2(s) \in R(s)^m$. На рисунке представлена структурная схема системы.



Структурная схема «объект–регулятор»

An object-regulator structural scheme

Передаточная матрица имеет левое или правое ПМР. Таким образом, имея одну передаточную матрицу объекта и одну – регулятора, можно получить четыре варианта записи замкнутой системы. Ниже представлена теорема

[1, с. 301], которая служит для выбора порядка регулятора, а также описывает характеристическую матрицу замкнутой системы (далее ХМЗС) и передаточную матрицу замкнутой системы.

Теорема. Объект описан строго правильной рациональной матрицей $W(s)$ размером $p \times m$. Пусть $W(s)$ разложена на $W(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$, где $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$ – взаимно простые слева и $\tilde{D}(s)$ – строчно правильная со степенями строк v_i , $i=1\dots p$. Пусть μ – столбцовый индекс $W(s)$ и пусть $m_i \geq \mu - 1$. Тогда для любой строчно и столбцово правильной полиномиальной матрицы $C(s)$ размером $p \times p$ такой, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}(s^{-v_1}, s^{-v_2}, \dots, s^{-v_p}) C(s) \text{diag}(s^{-m_1}, s^{-m_2}, \dots, s^{-m_p}) = C_h$$

– несингулярная числовая матрица, существует такой правильный регулятор $W_r(s) = X(s)Y^{-1}(s)$, где $Y(s)$ – столбцово правильная со степенями столбцов m_i такая, что

$$\tilde{D}(s)Y(s) + \tilde{N}(s)X(s) = \tilde{C}(s), \quad (2)$$

и передаточная матрица вход системы выход объекта следующая:

$$W_{cl}(s) = I - Y(s)\tilde{C}^{-1}(s)\tilde{D}(s). \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает передаточную матрицу замкнутой системы с левой характеристической матрицей (2). Определитель характеристической матрицы $\det \tilde{C}(s)$ является характеристическим полиномом замкнутой системы. В данной теореме приведено решение для объекта в левом полиномиально матричном представлении и регулятора – в правом.

2. ВАРИАНТЫ ПОЛИНОМИАЛЬНО МАТРИЧНОГО ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ

Существуют и другие варианты представления, которые рассмотрены в работе [4]. Ниже представим вывод четырех вариантов разложения и покажем, что они эквивалентны.

Введем дополнительные переменные $z_{1,2}(s)$ и $\tilde{z}_{1,2}(s)$, тогда уравнения объекта и регулятора можно записать в следующих четырех вариантах:

$$D(s)z_1(s) = u_1(s), \quad y_1(s) = N(s)z_1(s), \quad (4)$$

или

$$\tilde{D}(s)\tilde{z}_1(s) = \tilde{N}(s)u_1(s), \quad y_1(s) = \tilde{z}_1(s), \quad (5)$$

и регулятора:

$$Y(s)z_2(s) = u_2(s), \quad y_2(s) = X(s)z_2(s), \quad (6)$$

или

$$\tilde{Y}(s)\tilde{z}_2(s) = \tilde{X}(s)u_2(s), \quad y_2(s) = \tilde{z}_2(s), \quad (7)$$

где $z_1(s), u_1(s), y_2(s) \in R^m(s)$ и $z_2(s), u_2(s), y_1(s) \in R^p(s)$. Стоит заметить, что $(\tilde{D}(s), \tilde{N}(s))$ и $(\tilde{Y}(s), \tilde{X}(s))$ должны быть взаимно простыми слева, а $(D(s), N(s))$ и $(Y(s), X(s))$ – взаимно простыми справа.

По рис. 1 выпишем уравнения входов объекта и регулятора

$$u_1(s) = r_1(s) + y_2(s), \quad u_2(s) = r_2(s) - y_1(s), \quad (8)$$

где $r_1(s) \in R^m(s)$, $r_2(s) \in R^p(s)$. Дополнительные выходы и входы $u_1(s)$, $u_2(s)$ и $y_1(s)$ позволяют представить уравнения замкнутой системы в виде блочных матриц, что упрощает анализ и дает дополнительные возможности для синтеза.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Покажем эквивалентность записи объекта и регулятора в различных полиномиальных разложениях, для этого рассмотрим вывод четырех разложений системы управления. Далее для компактности будем писать аргументы у функций только в случае неоднозначности описания, в остальных случаях опустим.

1. Правое полиномиально матричное разложение объекта (4) и левое разложение регулятора (7). В уравнение (8) вместо y_1 и y_2 подставим их из (4) и (7) и получим $u_1 = r_1 + \tilde{z}_2$, $u_2 = r_2 - Nz_1$. Далее, подставив полученные уравнения входных воздействий в (4) и (7), соответственно получим $Dz_1 = r_1 + \tilde{z}_2$, $\tilde{Y}\tilde{z}_2 = \tilde{X}(r_2 - Nz_1)$, перегруппируем, тогда $Dz_1 - \tilde{z}_2 = r_1$, $\tilde{Y}\tilde{z}_2 + \tilde{X}Nz_1 = \tilde{X}r_2$, или в виде блочных матриц

$$\begin{pmatrix} D & -I \\ \tilde{X}N & \tilde{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Также можно вывести следующую запись замкнутой системы. Возьмем уравнение (4) $Dz_1 = u_1$, подставим u_1 из уравнения (8): $Dz_1 = r_1 + y_2$, далее вместо y_2 подставим разложение регулятора $Dz_1 = r_1 + \tilde{Y}^{-1}\tilde{X}u_2$, затем из уравнения (8) – значение u_2 , тогда $Dz_1 = r_1 + \tilde{Y}^{-1}\tilde{X}(r_2 - y_1)$, после этого подставим из уравнения (4) $y_1 = Nz_1$ и получим

$$Dz_1 = r_1 + \tilde{Y}^{-1}\tilde{X}(r_2 - Nz_1) \rightarrow (\tilde{Y}D + \tilde{X}N)z_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

при этом $y_1 = Nz_1$, $u_1 - r_1 = y_2 \rightarrow Dz_1 - r_1 = y_2$, или

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ D \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Подставив ранее полученный z_1 , получим следующую запись замкнутой системы левого разложения регулятора и правого разложения объекта:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} (\tilde{Y}D + \tilde{X}N)^{-1} (\tilde{Y} \quad \tilde{X}) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

При рассмотрении задания r_2 и выходной величины y_1 получим следующую замкнутую систему:

$$y_1 = N(\tilde{Y}D + \tilde{X}N)^{-1} \tilde{X}r_2, \quad (10)$$

или $y_1 = NC^{-1} \tilde{X}r_2$, где

$$C = \tilde{Y}D + \tilde{X}N. \quad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой правую характеристическую матрицу системы, представленной на рис. 1.

2. Левое ПМР объекта (5) и правое – регулятора (6). Выполним аналогичные операции, как для первого случая, тогда получим записи, аналогичные уравнениям (9), (10), (11):

$$\begin{pmatrix} D & -\tilde{N}X \\ I & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -Y \\ X \end{bmatrix} (\tilde{D}Y + \tilde{N}X)^{-1} (-\tilde{N} \quad \tilde{D}) + \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем необходимую для синтеза передаточную матрицу выхода y_1 от входа r_2 :

$$y_1 = (I - Y(\tilde{D}Y + \tilde{N}X)^{-1} \tilde{D})r_2. \quad (12)$$

Распишем уравнение (12) $y_1 = r_2 - Y(\tilde{D}Y + \tilde{N}X)^{-1} \tilde{D}$ и выполним замену переменной: $\hat{y}_1 = r_2 - y_1$, тогда $\hat{y}_1 = Y(\tilde{D}Y + \tilde{N}X)^{-1} \tilde{D}r_2$, или $\hat{y}_1 = Y\tilde{C}^{-1} \tilde{D}r_2$, где

$$\tilde{C} = \tilde{D}Y + \tilde{N}X. \quad (13)$$

Полюса систем (10) и (12) одинаковы, что говорит о том, что если система (10) устойчива, то и система (12) будет устойчива. Полученная левая характеристическая матрица (13) и уравнение (2) из теоремы одинаковы.

3. Левое ПМР объекта (5) и регулятора (7). Подставим в уравнение (8) значения выходов y_1, y_2 из уравнения (5) и (7), а затем полученное выражение подставим в уравнения входов u_1, u_2 (5) и (7), получим следующую запись:

$$\begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N} \\ \tilde{X} & \tilde{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix}.$$

4. Правое ПМР объекта (4) и регулятора (7). Подставим в уравнение (8) значения выходов y_1, y_2 из уравнения (4) и (7), а затем полученное выражение подставим в уравнения входов u_1, u_2 (4) и (7), получим следующую запись:

$$\begin{pmatrix} D & -X \\ N & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (11) и (13) описывают характеристическую матрицу замкнутой системы, которая используется в дальнейшем для задания желаемых полюсов замкнутой системы, причем по каналу каждого управления возможно задавать собственные полюса.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Характеристическая матрица для эквивалентных взаимно простых полиномиально матричных описаний системы различна, но ее определитель, т. е. характеристический полином, инвариантен к выбору разложения. Покажем, что ХМЗС замкнутых систем одинаковы, для этого перепишем их в виде уравнения вход–выход:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N}X \\ I & Y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -I \\ \tilde{X}N & \tilde{Y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N} \\ \tilde{X} & \tilde{Y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -X \\ N & Y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Эти передаточные матрицы, описывающие одну и ту же систему, эквивалентны при условии, что объект и регулятор взаимно простые. Тогда характеристические полиномы будут иметь одинаковые корни:

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N}X \\ I & Y \end{pmatrix} \sim \det \begin{pmatrix} D & -I \\ \tilde{X}N & \tilde{Y} \end{pmatrix} \sim \det \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N} \\ \tilde{X} & \tilde{Y} \end{pmatrix} \sim \det \begin{pmatrix} D & -X \\ N & Y \end{pmatrix}.$$

Покажем это, воспользовавшись формулой преобразования определителя блочной матрицы [32], которая записывается в следующем виде:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det (D - CA^{-1}B) = \det (A - BD^{-1}C) \det D.$$

Рассмотрим случаи левого ПМР объекта и правого ПМР регулятора (14):

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N}X \\ I & Y \end{pmatrix} = \det \tilde{D} \det (Y + \tilde{D}^{-1}\tilde{N}X) = \det (\tilde{D}Y + \tilde{N}X) = \det \tilde{C},$$

или правое ПМР объекта и левое ПМР регулятора (15):

$$\det \begin{pmatrix} D & -I \\ \tilde{X}N & \tilde{Y} \end{pmatrix} = \det D \det (\tilde{Y} + \tilde{X}ND^{-1}) = \det (\tilde{Y}D + \tilde{X}N) = \det C.$$

Рассмотрим случаи левого ПМР объекта и левого ПМР регулятора (16):

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N} \\ \tilde{X} & \tilde{Y} \end{pmatrix} &= \det \tilde{D} \det (\tilde{Y} + \tilde{X}\tilde{D}^{-1}\tilde{N}) = \det (\tilde{Y} + \tilde{X}ND^{-1}) \det \tilde{D} = \\ &= \det (\tilde{Y}D + \tilde{X}N) \det D^{-1} \det \tilde{D}. \end{aligned}$$

Так как $\det(D) = \alpha \det(\tilde{D})$, то $\det \begin{pmatrix} \tilde{D} & -\tilde{N} \\ \tilde{X} & \tilde{Y} \end{pmatrix} = \alpha \det(\tilde{Y}D + \tilde{X}N) = \alpha C$, где α – константа. Далее найдем аналогично для правого ПМР объекта и регулятора (17):

$$\det \begin{pmatrix} D & -X \\ N & Y \end{pmatrix} = \det D \det (Y + ND^{-1}X) = \det D \det \tilde{D}^{-1} \det (Y\tilde{D} + \tilde{N}X),$$

или $\alpha \det(Y\tilde{D} + \tilde{N}X) = \alpha \tilde{C}$. Таким образом, в свернутом виде полюса системы можно задавать с помощью двух матричных уравнений $C \in R[s]^{m \times m}$ и $\tilde{C} \in R[s]^{p \times p}$, описываемых выражениями (11) и (13).

5. ПРИМЕР СИНТЕЗА

На примере неустойчивого и не строго правильного объекта $W(s) \in R(s)^{p \times m}$ с передаточной матрицей

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 1 & \frac{1}{s-2} \\ 1 & \frac{1}{s-3} & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

покажем возможность синтеза неквадратной САУ через найденные уравнения характеристических матриц (11) и (13). На первом этапе рассчитаем регулятор от левого полиномиального матричного разложения объекта, а на втором – от правого.

Левое взаимно простое и строчно правильное ПМР передаточной матрицы (18) имеет следующий вид:

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} (s-1)(s-2) & 0 \\ 0 & s-3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(s) = \begin{pmatrix} s-2 & (s-1)(s-2) & s-1 \\ s-3 & 1 & s-3 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где в соответствии с (1) $m=3$, $p=2$. При помощи *двойного взаимно простого разложения (doubly coprime factorization)* [33] найдено взаимно простое и столбцово приведенное правое ПМР объекта от левого (19), которое имеет следующий вид:

$$D(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s-1 \\ 0 & s-3 & 0 \\ s-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} 1 & s-3 & 1 \\ s-2 & 1 & s-1 \end{pmatrix}.$$

Из вида правого ПМР видно, что столбцовый индекс [2] равен $\mu=1$, тогда из условий **теоремы** минимальная степень регулятора равна $m_{1,2} \geq \mu - 1 = 0$.

Синтез для левого полиномиального матричного разложения объекта произведем, используя характеристическую матрицу (13), затем перейдем от левого ПМР объекта к правому и от правого ПМР регулятора – к левому. Полученные разложения подставим в характеристическую матрицу (11) и сравним полученные результаты. Расчеты приведены в сокращенном виде.

Уравнения характеристических матриц (11) и (13) являются разновидностью диофантового уравнения, решение которого возможно различными способами. В нашем случае была применена матрица Сильвестра [10], где неизвестные и известные коэффициенты уравнения записаны в выражении $\tilde{\mathfrak{R}}\tilde{\mathfrak{Z}} = \tilde{\mathfrak{S}}_d$, где $\tilde{\mathfrak{R}}$ – числовая матрица неизвестных коэффициентов регулятора, $\tilde{\mathfrak{Z}}$ – числовая матрица Сильвестра, составленная из коэффициентов объекта, и $\tilde{\mathfrak{S}}_d$ – желаемая числовая характеристическая матрица коэффициентов. В общем случае $\tilde{\mathfrak{Z}}$ не квадратная, и для единственного решения необ-

ходимо линейно зависимые строки, содержащие свободные параметры, перенести в матрицу $\tilde{\mathfrak{K}}_d$. Таким образом получим решение вида

$$\tilde{\mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{K}}_d \tilde{\mathfrak{S}}^{-1}, \quad (20)$$

где матрица Сильвестра $\tilde{\mathfrak{S}}$ квадратная и имеет полный ранг. Зададим для передаточной матрицы объекта (18) характеристическую матрицу (13) вида $\tilde{C}^*(s) = \text{diag}(s^2 + 2s + 1, s + 1)$, тогда правое ПМР регулятора при $\tilde{C}(s) = \tilde{C}^*(s)$ следующее:

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(s) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_r(s) = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -20 & -4 \\ -9 & -36 \end{pmatrix}.$$

При помощи двойного взаимно простого разложения перейдем от правого ПМР регулятора к левому, тогда

$$\tilde{X}(s) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 20 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Передаточная матрица замкнутой системы $y_1 = W_{cl} r_2$, одинаковая для (14), (15), (16), (17), и правая характеристическая матрица, полученная подстановкой левого ПМР регулятора и правого ПМР объекта в уравнение (11), равны

$$W_{cl}(s) = \begin{pmatrix} \frac{5s-1}{(s+1)^2} & \frac{4s-12}{s+1} \\ \frac{5s^2-15s+10}{(s+1)^2} & \frac{4}{s+1} \end{pmatrix}, \quad C(s) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & s-5 \\ -(s+3) & -\frac{1}{4}(s+1) & -(s+4) \\ s+7 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Нулевой порядок регулятора (П-регулятор) обеспечивает необходимые полюса замкнутой системы, при этом получены следующие установившиеся значения: $W_{cl}(0) = (-1 \ -12; \ 10 \ 4)$. Для достижения заданных значений в установившемся режиме необходимо повысить порядок регулятора и поставить интегратор после регулятора, тогда $\tilde{C}^*(s) = \text{diag}(s^3 + 3s^2 + 3s + 1, s^2 + 2s + 1)$, а регулятор, выполняющий $\tilde{C}(s) = \tilde{C}^*(s)$, следующий:

$$Y = -\frac{s}{5} \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 51 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -40 & 0 \\ 7s-21 & 27s-1 \\ 51s+33 & s-2 \end{pmatrix}, \quad W_r = \begin{pmatrix} \frac{32}{277s} & \frac{216}{277s} \\ \frac{27-281s}{277s} & \frac{113-27s}{277s} \\ \frac{-5s-6}{277s} & \frac{-(275s+179)}{277s} \end{pmatrix},$$

а его левое полиномиальное матричное разложение

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{277} \begin{pmatrix} -277 & -1869.75 \\ 108 - 1124s & 452 - 108s \\ 511 & -221 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}(s) = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -277s & 0 & 0 \\ 0 & 128s & 0 \\ 60 & -64 & 32 \end{pmatrix}.$$

Ниже не будет приведена правая характеристическая матрица $C(s)$ из-за ее сложной и не подходящей для понимания структуры. Матричная передаточная функция замкнутой системы с регулятором первого порядка следующая:

$$W_{cl}(s) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{7s^3 + 9s^2 + 19s + 5}{(s+1)^3} & \frac{27s(s-3)}{(s+1)^2} \\ \frac{51s(s^2 - 3s + 2)}{(s+1)^3} & \frac{s^2 + 22s + 5}{(s+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Первый порядок регулятора (ПИ-регулятор) обеспечивает заданные полюса замкнутой системы, а также удовлетворительную статику $W_{cl}(0) = \text{diag}(1, 1)$. Передаточная матрица замкнутой системы правильная, но не строго правильная. Для ее строгой правильности необходимо рассчитать строго правильный регулятор, который получится при увеличении порядка.

Синтез для правого полиномиального матричного разложения объекта. Используем характеристическую матрицу (11). По аналогии с (20) для правого ПМР объекта решение диофантова уравнения $\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{S}}^{-1} \bar{\mathfrak{K}}_d$. После вычислений получаем следующее левое разложение и передаточную матрицу регулятора:

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \frac{7}{36} & \frac{7}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{(s+5)}{16} & 1 \\ \frac{(s+7)}{7} & \frac{(4s-8)}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{(8-4s)}{7} & 0 \end{pmatrix}, \quad W_r = \begin{pmatrix} -\frac{4s+20}{s-75} & \frac{-64}{s-75} \\ \frac{80}{s-75} & \frac{16}{s-75} \\ \frac{9s+45}{s-75} & \frac{144}{s-75} \end{pmatrix}.$$

Замкнутые передаточная и характеристическая матрицы следующие:

$$W_{cl}(s) = \begin{pmatrix} \frac{5s-1}{(s+1)^2} & \frac{16s-48}{(s+1)^2} \\ \frac{5s^2-15s+10}{(s+1)^2} & \frac{16}{(s+1)^2} \end{pmatrix}, \quad C(s) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & 0 & \frac{7}{36}(s-5) \\ 0 & -\frac{1}{16}(s+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7}(s+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем от левого к правому ПМР регулятора и, подставив его в (13), получим

$$Y(s) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{16}(s+5) & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}, \quad X(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(s+1)^2}{9} \\ \frac{(s+1)^2}{16} & 0 \end{pmatrix},$$

или эквивалентно $\bar{Y}(s) = Y(s)G$, $\bar{X}(s) = X(s)G$, где $G = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ -5 & s+5 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(s) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tilde{C}}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Как видим, $\det \tilde{C} = \alpha \det C = \beta \det \bar{\tilde{C}}$, где β константа.

Для левого разложения объекта рассчитан регулятор первого порядка с астатизмом по заданию. Для правого разложения объекта так же был рассчитан регулятор первого порядка, но без астатизма. Так как число входов не равно числу выходов, то характеристическая матрица может быть разного размера, и для синтеза следует выбирать такое разложение, в котором она меньше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены четыре эквивалентных описания замкнутой системы (14), (15), (16), (17), представленной на рис. 1, каждое из них по-своему раскрывает свойства системы. В настоящей работе делается упор на два описания – левое ПМР объекта и правое – регулятора, а также правое ПМР объекта и левое – регулятора. Они в первую очередь необходимы для синтеза системы управления, так как позволяют выделить характеристическую матрицу замкнутой системы: в уравнении (11) – правую и в уравнении (13) – левую. В рассматриваемом примере неквадратного объекта они различного размера: левая 2×2 и правая 3×3 . Характеристическая матрица меньшего размера более приспособлена для расчета регулятора. Так, для регулятора нулевого порядка, рассчитанного для левого объекта по формуле (13), левая ХМЗС имеет диагональный вид, а после перехода к правой по формуле (11) – недиагональный и содержит в себе элементы с правыми корнями. Тем не менее характеристический полином левой и правой ХМЗС одинаков. То есть при интуитивно удобной записи левой желаемой ХМЗС в диагональном виде ее правое представление не диагонально и имеет в своем составе полиномы с отличными от желаемых корнями. Проверив обратное, получим, что расчет регулятора для правого ПМР объекта по формуле (11) так же не диагонально и имеет полиномы с положительными корнями, тем не менее синтезирован

ная система устойчива и имеет заданные полюса. Левая ХМЗС рассчитанной системы имеет диагональный вид с заданными полюсами. Из этого можно сделать вывод, что рассчитывать систему управления для ПМР объекта и регулятора возможно по формулам (11) и (13), но для случая объекта с количеством входов большим, чем выходов ($m > p$), предпочтительно использовать формулу (13) для левой ХМЗС. В дальнейших работах будет показано, что для случая $m < p$ предпочтительно использовать формулу (11) для правой ХМЗС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen C.T. Linear system theory and design. – 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
2. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 1. – San Rafael, CA: Morgan and Claypool, 2011. – 184 p.
3. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 2. – San Rafael, CA: Morgan and Claypool, 2011. – 227 p.
4. Antsaklis P.J., Michel A.N. Linear systems. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 670 p.
5. Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В. Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений при стабилизации трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 2 (43). – С. 39–46.
6. Воевода А.А. Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.
7. Бобобеков К.М. Полиномиальный метод синтеза многоканальных систем посредством перехода к матричному полиномиальному представлению // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 1. – С. 7–25.
8. Шоба Е.В. Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.
9. Вороной В.В. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
10. Бобобеков К.М. Полиномиальный метод синтеза многоканальных регуляторов с использованием матрицы Сильвестра: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – СПб., 2019. – 168 с.
11. Матухина О.В. О задаче управления движением колесной системы с перевернутым маятником // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – № 24. – С. 235–237.
12. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве / А.В. Рязских, М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын, О.И. Конищева, А.А. Демчук, П.А. Мелешенко // Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 41–50.
13. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 68–76.
14. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью: перевернутый маятник // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 49–60.
15. Филюшов В.Ю. Примеры использования нелинейных обратных связей для нелинейных объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 61–70.
16. Воевода А.А., Шипагин В.И. Синтез нейросетевого регулятора управления нелинейной моделью перевернутого маятника на тележке // Научный вестник НГТУ. – 2020. – № 2–3 (79). – С. 25–36.
17. Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В. О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

18. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
19. Slotine J.J.E., Li W. Applied nonlinear control. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991. – 459 p.
20. Marino R., Yomei P. Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust. – London; New York: Prentice Hall, 1995. – 396 p.
21. Филушов В.Ю. Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.
22. Воевода А.А., Вороной В.В. Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.
23. Филушов В.Ю. Линеаризация нелинейного трехканального динамического объекта обратной связью // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 1 (66). – С. 74–85.
24. Воевода А.А., Филушов В.Ю. Линеаризация двухканальной системы с нелинейным выходом при помощи обратной связи // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 49–61.
25. Буков В.Н., Рябченко В. Вложение систем. Синтез регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 7. – С. 3–14.
26. Вложение систем / В.Н. Буков, В.С. Калабухов, И.М. Максименко, В.Н. Рябченко // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 8. – С. 61–73.
27. Буков В.Н. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2006. – № 3. – С. 41–48.
28. Буков В.Н., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н. Вложение систем. Полиномиальные уравнения // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 7. – С. 12–23.
29. Воевода А.А., Бобобеков К.М., Филушов В.Ю. Полиномиальный метод синтеза для объекта с двумя входами и одним выходом // Сборник научных трудов НГТУ. – 2019. – № 3–4 (96). – С. 17–32.
30. Шипагин В.И., Воевода А.А. Пример полиномиального синтеза регулятора для объекта с одним входом и двумя выходами // Наука. Технологии. Инновации: сборник научных трудов. – Новосибирск, 2020. – Ч. 1. – С. 84–88.
31. Филушов В.Ю. Управление неквадратным объектом полиномиальным методом // Наука. Промышленность. Оборона: труды XXI Всероссийской научно-технической конференции. – Новосибирск, 2020. – Т. 3. – С. 36–40.
32. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
33. Воевода А.А. Матричные передаточные функции. (Основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (специальность 2101). – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных систем, нейронные регуляторы. Имеет более 300 печатных работ и учебных пособий. E-mail: ucit@ucit.ru

Филушов Владислав Юрьевич, аспирант кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных систем, нелинейные системы. Имеет более 20 печатных работ и учебных пособий. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Voevoda Alexander A., PhD (Eng), professor at the Automation Department of Novosibirsk State Technical University. His research interests include multichannel systems synthesis and neural network regulators. He has more than 300 publications and teaching manuals. E-mail: ucit@ucit.ru

Filiushov Vladislav Yu., postgraduate student at the Automation Department of Novosibirsk State Technical University. His research interests include multichannel systems synthesis. He has more than 20 publications and teaching manuals. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Polynomial matrix decomposition for the synthesis of non-square control systems*A.A. VOEVODA^a, V.Yu. FILIUSHOV^b

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a ucit@ucit.ru ^b filiushov.vladislav@gmail.com**Abstract**

The application of advanced synthesis methods is due to the increasing complexity of control objects. Relatively simple objects are represented as a single-channel system or as a combination of such systems and are calculated separately. More complex systems must be viewed as multi-input and multi-output systems. There are several approaches to this. Within the framework of this paper we will consider the synthesis of a system presented in the form of a polynomial matrix decomposition. It allows us to write a closed loop system in such a way that, by analogy with single-channel systems, it is possible to single out the "numerator" and "denominator" not only of the object and the controller, but of the entire system. For multi-channel objects, they will be written in a matrix form allowing you to select the characteristic matrix whose determinant is the characteristic polynomial.

In this paper, an emphasis is placed on the derivation of four variants of the polynomial matrix description (PMD) of a closed system. Such a variety of representation of a closed-loop system follows from the equivalent writing of the transfer matrix in the form of left and right PMD of an object or controller. Of the four options for recording the system, two options – left and right – for the characteristic matrix are distinguished. When they are reduced to a diagonal form, the elements on the main diagonal contain the poles of a closed system along the corresponding channel. From the example given at the end of the paper, it can be seen that it is more convenient to use the left characteristic matrix because it has a lower dimension for a non-square object (the number of input and output quantities is not equal), with the number of input actions exceeding the number of output quantities. The right characteristic matrix can also be used to synthesize such a control object, but the resulting solution is more complicated and not obvious. The situation is reversed if we consider an object with fewer inputs than outputs. In this case, the right characteristic matrix will be smaller and more suitable for synthesis. It follows from this that the procedure for synthesizing a control system for non-square objects differs depending on the number of inputs and outputs.

Keywords: multichannel, interconnection, non-square, polynomial matrix description, characteristic matrix, synthesis, Sylvester matrix, Diophantine equation

REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 2nd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.
2. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 1. San Rafael, CA, Morgan and Claypool, 2011. 184 p.
3. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 2. San Rafael, CA, Morgan and Claypool 2011. 227 p.
4. Antsaklis P.J., Michel A.N. *Linear systems*. New York, McGraw-Hill, 1997. 670 p.

* Received 23 October 2020.

5. Voevoda A.A., Chekhonadskih A.V., Shoba E.V. Modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya: razdelenie dvizhenii pri stabilizatsii trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis method using a polynomial decomposition: the separation of motions in the stabilization of the three-mass plant]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2 (43), pp. 39–46.
6. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Stabilization of two-mass system: polynomial method of synthesis of two-channel system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.
7. Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh sistem posredstvom perekhoda k matrichnomu polinomial'nomu predstavleniyu [Polynomial method for the synthesis of multichannel systems by transition to matrix polynomial representation]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* = *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 7–25.
8. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.
9. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.
10. Bobobekov K.M. *Polinomial'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh regulyatorov s ispol'zovaniem matritsy Sil'vestra*. Diss. kand. tekhn. nauk [Polynomial control method for multi-channel dynamic system by Sylvester matrix. PhD eng. sci. diss.]. St. Petersburg, 2019. 168 p.
11. Matukhina O.V. O zadache upravleniya dvizheniem kolesnoi sistemy s perevernutym mayatnikom [About moving control of wheels system with inverted pendulum]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* = *Bulletin of the Kazan Technological University*, 2014, no. 24, pp. 235–237.
12. Ryaghsikh V.I., Semenov M.E., Rukavicin A.G., Kanishcheva O.I., Demchuk A.A., Meleshko P.A. Stabilizatsiya obratnogo mayatnika na dvukhkolesnom transportnom sredstve [Stabilization of inverted pendulum on a two-wheeled vehicle]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika* = *Bulletin of the South Ural State University Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 41–50.
13. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu [Feedback linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 68–76.
14. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: perevernutyi mayatnik [Feedback linearization: inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 49–60.
15. Filyushov V.Yu. Primery ispol'zovaniya nelineinykh obratnykh svyazei dlya nelineinykh ob"ektov [Examples of applying of nonlinear output injection for nonlinear objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 61–70.
16. Voevoda A.A., Shipagin V.I. Sintez neirosetevogo regulyatora upravleniya nelineinoi model'yu perevernutogo mayatnika na telezhke [Synthesis of a neural network control regulator of a nonlinear model of an inverted pendulum on a cart]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 2–3 (79), pp. 25–36.

17. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoynogo perevernutoho mayatnika [Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya = Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian).
18. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
19. Slotine J.J.E., Li W. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1991. 459 p.
20. Marino R., Yomei P. *Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust*. London, New York, Prentice Hall, 1995. 396 p.
21. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.
22. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Sintez nelineinogo regul'yatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.
23. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya nelineinogo trekhkanal'nogo dinamicheskogo ob"ekta obratnoi svyaz'yu [Linearization of multichannel object by output injectio]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 1 (66), pp. 74–85.
24. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya dvukhkanal'noi sistemy s nelineinym vykhodom pri pomoshchi obratnoi svyazi [Linearization by feedback of two channel object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 49–61.
25. Bukov V.N., Ryabchenko V. Vlozhenie sistem. Sintez regul'yatorov [System embedding. Controller design]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no 7, pp. 3–14. (In Russian).
26. Bukov V.N., Kalabukhov V.S., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N. Vloghenie system [System embedding]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1999, no. 8, pp. 61–73. (In Russian).
27. Bukov V.N. Analiticheskii podkhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem [Analytical approach for analysis and synthesis of matrix systems]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya Southem Federal University. Engineering sciences*, 2006, no 3, pp. 41–48.
28. Bukov V.N., Kosyanchuk V.V., Ryabchenko V.N. Vlozhenie sistem. Polinomial'nye uravneniya [Systems embedded. Polynomial equations]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2002, no. 7, pp. 12–23. (In Russian).
29. Voevoda A.A., Bobobekov K.M., Filiushov V.Yu. Polinomial'nyi metod sinteza dlya ob"ekta s dvumya vkhodami i odnim vykhodom [Polynomial synthesis method for objects with two inputs and one output]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2019, no. 3–4 (96), pp. 17–32.
30. Shipagin V.I., Voevoda A.A. [Polynomial regulator synthesis example for object with one input and two ouputs]. *Nauka. Tekhnologii. Innovatsii* [Science. Technologies. Innovations], Novosibirsk, 2020, pt. 1, pp. 84–88. (In Russian).
31. Filiushov V.Yu. [Non square object control by polynomial method]. *Nauka. Promyshlennost'. Oborona: trudy XXI Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Science. Industry. Defense: Proceedings of 21st Russian scientific and technical conference], Novosibirsk, 2020, vol. 3, pp. 36–40. (In Russian).

32. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p.
33. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii (Osnovnye ponyatiya): konspekt lektsii po kursu "Proektirovanie sistem upravleniya"* [Matrix transfer functions (Basic concepts): a summary of lectures on the course "Designing of control systems"]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

Для цитирования:

Воевода А.А., Филушов В.Ю. Полиномиальное матричное разложение при синтезе не-квадратных САУ // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 1 (81). – С. 21–38. – DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-21-38.

For citation:

Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Polinomial'noe matrichnoe razlozhenie pri sinteze nekvad-ratnykh SAU [Polynomial matrix decomposition for the synthesis of non-square control systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and data processing systems*, 2021, no. 1 (81), pp. 21–38. DOI: 10.17212/2782-2001-2021-1-21-38.