ISSN 2782-2001
Системы анализа и обработки данных
том 82, № 2, 2021, с. 7–18

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data processing systems
Vol. 82, No. 2, 2021, pp. 7–18

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS, COMPPUTER ENGINEERING AND CONTROL

УДК 517.95: 519.24

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-2-7-18

Параболическая модель в форме пространства состояний динамики накоплений*

Г.А. АБДЕНОВА[a], **К.М. БАЗИКОВА**[b], **Ж.М. КЕНЖЕҒАЛЫМ**[c]

010008, Республика Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

[a] *gauhar.phd@gmail.com* [b] *kmbazikova@mail.ru* [c] *zhangul_flower@mail.ru*

Важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности, представитель класса так называемых параболических уравнений. Известно, что для проверки корректности математической модели, основанной на параболическом уравнении, очень важно существование ее решения, так как математическая модель не всегда адекватна конкретному явлению, и из существования решения реальной прикладной задачи не следует существование решения соответствующей математической задачи. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений в частных производных – как аналитических, так и численных – всегда актуальны.

В настоящее время вычислительный эксперимент стал мощным средством теоретических исследований. Он проводится над математической моделью исследуемого объекта, но при этом по одним параметрам модели вычисляются другие параметры и делаются выводы о свойствах изучаемого объекта или явления. В работе рассматривается задача пассивной параметрической идентификации систем с распределенными параметрами для динамики аккумуляции ресурсов множества домохозяйств, а также преобразование ее в модель в форме пространства состояний с учетом белых шумов модели динамики исследуемого объекта и измерительной системы линейного типа. Используя метод конечных разностей, решение уравнений с частными производными параболического типа свели к решению системы линейных конечно-разностных и алгебраических уравнений. Для более точного оценивания поведения объекта было предложено использование алгоритма фильтрации по схеме Калмана.

Осуществлены расчеты с помощью математической системы Matlab на основе данных наблюдений за пять лет, взятых с сайта «Бюро национальной статистики Агентства по стратегическому планированию и реформам Республики Казахстан». Оценивание коэффициентов уравнений аккумуляции ресурсов домохозяйств в форме пространства состояний с использованием данной методики в достаточной степени универсально и может быть применено и в других областях науки и техники.

* *Статья получена 18 января 2021 г.*
Исследование выполнено в Евразийском национальном университете имени Л.Н. Гумилева Республики Казахстан.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, стохастическая динамическая система, входные и выходные данные наблюдений, пассивная идентификация, аддитивный белый шум, линейное конечно-разностное уравнение, уравнение параболического типа, модель в пространстве состояний, фильтр Калмана

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время построение динамических моделей для трудно формализуемых областей, использующих дифференциальные уравнения с частными производными [1] и учитывающих случайные факторы и аддитивные шумы, вызывает особый интерес. Так, для моделирования аккумулирования ресурсов исследуемого объекта будем использовать стохастическую параболическую распределенную модель, описывающую динамику накоплений домохозяйств, в виде уравнений с частными производными, а модель измерительной системы – в виде линейных стохастических алгебраических моделей с аддитивными белыми шумами.

Анализ современных научных исследований показывает эффективность решения задач идентификации с использованием моделей пространства состояний (ПС) [2–4]:

$$U(t+1) = \Phi U(t) + B\nu(t), \quad U(1) = \bar{U}_1\,, \tag{1}$$

$$Y(t+1) = HU(t+1) + w(t+1), \quad t = 1,\ 2,\ldots, \tag{2}$$

где t – время; $U(t)$ – n-вектор состояния; Φ – переходная матрица состояния, размерность $n \times n$; $\nu(t)$ – r-вектор управления; B – переходная матрица управления, размерность $n \times r$; $U(1)$ – n-вектор начального состояния; $Y(t)$ – m-вектор выходных данных; H – матрица наблюдения, размерность $m \times n$; $w(t)$ – n-вектор белого шума измерительной системы, имеющий нулевое математическое ожидание и неизвестную ковариационную матрицу R.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что исследуемые объекты в каждый момент времени распределены неравномерно. В работах [5, 6] на основе применения принципа сплошных сред и введения функции, которая опишет распределение домохозяйств по аккумуляции ресурсов, получено параболическое уравнение с частными производными вида (3), которому удовлетворяет плотность исследуемых объектов на пространстве u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((c+F)u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) + df\,, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x(t)\big|_{t=0} = \bar{x}_0\,, \tag{4}$$

где $x(t)|_{t=0}$ – гауссовская величина с математическим ожиданием $\bar{x}_0$ и дисперсией P_0.

В уравнении (3) $u(x, t)$ – искомые значения состояний эволюции аккумуляции ресурсов домохозяйств распределенного типа; $F(x, t)$ – заданная функция распределенного типа; c, b, d – постоянные коэффициенты; $f(x, t)$ – число домохозяйств, которые попадут из других множеств домохозяйств на отрезок единичной длины пространства накоплений за единичный интервал времени в окрестности x и t. Уравнение (3) называется дифференциальным уравнением параболического типа, описывающим накопления множества домохозяйств. С учетом аддитивных шумов процесса аккумуляции ресурсов уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((c+F)u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) + df + p_1 w, \tag{5}$$

где $p_1 = Q(x_k, t_s)$ – шумовой коэффициент в уравнении состояния; w – аддитивные белые шумы измерителей.

Предположим, что за исследуемыми объектами можно вести наблюдение, поэтому уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} &y(x_k, t_s) = hu(x_k, t_s) + p_2\varepsilon(x_k, t_s), \\ &k = \overline{1,n}, \quad s = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $u(x, t)$ – пространственно-временная функция состояния, измеряемая в дискретных точках x_k и t_s: $\{u(x, t) \approx u(x_k, t_s) = u_{k,s}, \quad k = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, m}\}$; $y(x_k, t_s)$ – выходные наблюдения; h – весовой коэффициент; $\{\varepsilon(x_k, t_s) = \varepsilon_{k,s}, \quad k = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, m}\}$ – белый шум системы с неизвестной ковариацией $p_2 = R(x_k, t_s)$.

Учитывая указанные условия на основе дискретного выхода наблюдаемой системы $y(x_k, t_s)$ распределенного типа и начальное условие (4), можно сформулировать задачу оценивания параметров c, b, d, p_1, p_2.

2. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ АККУМУЛЯЦИИ РЕСУРСОВ

Для реализации решения задачи пассивной идентификации используем дискретную форму выражения (5) в частных производных [7, 8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a_1\frac{\partial}{\partial x}u + b_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + d_1 f + p_1 w, \tag{7}$$

где $a_1 = c + F$, $b_1 = b/2$, $d_1 = d$, p_1 – коэффициенты; t – время, $t \ge 0$; x – координата, $0 \le x \le L$; $w(x, t)$ – белый шум с неизвестной ковариацией Q и нулевым математическим ожиданием; $u(x, t)$ – состояние эволюции аккумуляции ресурсов домохозяйств распределенного типа с граничным и начальным условиями:

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \tilde{u}_0, \quad \text{или} \quad u(x, t)|_{x=0} = \tilde{u}_0, \tag{8а}$$

$$u(x, t)|_{x=L} = \tilde{u}_L, \tag{8б}$$

$$u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0) = u_0(x). \tag{9}$$

Для t и x интервалы квантования приравняем: $\Delta t = 1$ и $\Delta x = 1$, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{k,s+1} - u_{k,s}) = \frac{b_1}{\Delta x^2}(u_{k,s+1} - 2u_{k,s} + u_{k,s-1}) -$$

$$-\frac{a_1}{\Delta x}(u_{k,s+1} - u_{k,s}) + d_1 f_{k,s} + p_1 w_{k,s},$$

где $k = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, m}$.

Значения функций $u(x, t)$ объединим по координатам k, s узлов сетки при интервалах $\Delta t = 1$ и $\Delta x = 1$.

Получим систему уравнений при $k = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{cases} u_{1,s+1} = c_1 u_{0,s} - c_2 u_{1,s} + c_3 u_{2,s} + u_{1,s} + d_1 f_{1,s} + p_1 w_{1,s}, \\ u_{2,s+1} = c_1 u_{1,s} - c_2 u_{2,s} + c_3 u_{3,s} + u_{2,s} + d_1 f_{2,s} + p_1 w_{2,s}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_{n,s+1} = c_1 u_{n,s} - c_2 u_{n,s} + c_3 u_{n+1,s} + u_{1,s} + d_1 f_{n,s} + p_1 w_{n,s}. \end{cases} \tag{10}$$

Сделаем следующие обозначения:

$$U_{s+1} \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} u_{1,s+1} \\ u_{2,s+1} \\ \vdots \\ u_{n,s+1} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad U_s \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} u_{1,s} \\ u_{2,s} \\ \vdots \\ u_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad F_s \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} f_{1,s} \\ f_{2,s} \\ \vdots \\ f_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1};$$

$$W_s \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} w_{1,s} \\ w_{2,s} \\ \vdots \\ w_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad E_2 \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad B_2 \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_3 \end{pmatrix}_{n\times 1}. \tag{11}$$

Граничные условия примут вид

$$\theta_s = u_{0,s} = 0; \quad \eta_s = u_{n+1,s}. \tag{12}$$

Уравнение (7) в векторно-матричной форме примет вид

$$M \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} -c_2 & c_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & -c_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 & -c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 & -c_2 \end{pmatrix}_{n\times n}; \tag{13}$$

$$\overline{G} \stackrel{\Delta}{=} d_1 E; \qquad \Omega \stackrel{\Delta}{=} p_1 E, \tag{14}$$

где E – единичная матрица размерностью $n \times n$. Используя (11)–(14), выражение (10) представим в векторно-матричной форме:

$$U_{s+1} = MU_s + \overline{G}U_s + NF + \Omega W_s + \left(E_2\theta_s + B_2\eta_s\right). \tag{15}$$

В [9, 10] приведены обозначения, которые позволяют представить соотношение (15) в виде модели в ПС.

В итоге уравнение (10) запишется в виде

$$U_{s+1} = MU_s + GH_s + NF + \Omega W_s. \tag{16}$$

Соотношение (16) по виду соответствует выражению (1), где время может иметь значения: $s = \{1,\ 2, \ldots,\ m\}$, а начальные условия можно записать следующим образом:

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{n,0} \end{pmatrix}_{n\times 1}. \tag{17}$$

Далее, при условии h = const, введем обозначения для уравнения (6):

$$Y_s = \begin{pmatrix} y_{1,s} \\ y_{2,s} \\ \vdots \\ y_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad U_s = \begin{pmatrix} u_{1,s} \\ u_{2,s} \\ \vdots \\ u_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,s} \\ \varepsilon_{2,s} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,s} \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

$$Y_0 = y_0 / h. \tag{18}$$

В итоге уравнение (6) запишем в векторном виде

$$Y_s = hU_s + p_2\varepsilon_s, \qquad s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m. \tag{19}$$

Полученные соотношения (16), (17), (19) – модель стохастической системы с распределенными параметрами, представленные как модель ПС (1)–(2).

При значениях n и s сгруппируем в (16) дискретные данные наблюдений $u_{k,j}$ за четыре года и выведем четыре уравнения с неизвестными $c_1,\ -c_2,\ c_3,\ d_1$:

$$\begin{cases} u_{n-4,s+1} = c_1u_{n-5,s} - c_2u_{n-4,s} + c_3u_{n-3,s} + \\ \qquad + u_{n-4,s} + d_1f_{n-4,s} + p_1w_{n-4,s}; \\ u_{n-3,s+1} = c_1u_{n-4,s} - c_2u_{n-3,s} + c_3u_{n-2,s} + \\ \qquad + u_{n-3,s} + d_1f_{n-3,s} + p_1w_{n-3,s}; \\ u_{n-2,s+1} = c_1u_{n-3,s} - c_2u_{n-2,s} + c_3u_{n-1,s} + \\ \qquad + u_{n-2,s} + d_1f_{n-2,s} + p_1w_{n-2,s}; \\ u_{n-1,s+1} = c_1u_{n-2,s} - c_2u_{n-1,s} + c_3u_{n,s} + \\ \qquad + u_{n-1,s} + d_1f_{n-1,s} + p_1w_{n-1,s}. \end{cases} \tag{20}$$

В уравнениях (16) и (19) p_1, p_2 есть коэффициенты при шумовых неконтролируемых переменных W и ε, которые дают количественную характеристику дисперсии аддитивных шумов динамики и измерительной системы, являются белыми гауссовскими последовательностями с нулевым средним и дисперсиями, равными единице. В работах [11–13] предлагается использование алгоритма расчета всех дисперсионных характеристик модели динамики и измерительной системы с учетом совокупности выходных данных $\left\{y_{k,s},\ k=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m}\right\}$.

Можно найти средние оценки дисперсий для $p_1 \approx \widehat{Q} = Q$ и $p_2 \approx \widehat{R} = R$. Данный алгоритм можно использовать для каждой строки $k=\overline{1,n}$. Оценки дисперсий используются при параметрической идентификации состояния объекта с применением калмановской фильтрации [2, 11, 13, 14].

В дальнейшем для расчетов оценок коэффициентов $c_1,\ -c_2,\ c_3,\ d_1$ можно использовать уравнения фильтра Калмана. Если рассматривать систему (21) как систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, то можно рассчитать четверку оценок $c_1,\ -c_2,\ c_3,\ d_1$ [15] на основе следующих формул:

$$\widehat{a}_1 = \left(\frac{u_{n-1,s+1} - u_{n-1,s}}{u_{n,s}} - \frac{u_{n-2,s+1} - u_{n-2,s}}{u_{n-1,s}}\right) \Bigg/ \left(\frac{u_{n-2,s} - 2u_{n-1,s} + u_{n,s}}{u_{n,s}} - \frac{u_{n-3,s} - 2u_{n-2,s} + u_{n-1,s}}{u_{n-1,s}}\right), \qquad (21)$$

$$\widehat{b}_1 = \frac{u_{n-2,s+1} - u_{n-2,s}}{u_{n-1,s}} - a_1\left(\frac{u_{n-3,s} - 2u_{n-2,s} + u_{n-1,s}}{u_{n-1,s}}\right). \qquad (22)$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ

Для примера возьмем данные аккумуляции ресурсов домохозяйств за четыре года (2014–2017 гг.).

Пример.

а) Чтобы осуществить расчеты для проведения исследований на основе вычисления коэффициентов уравнений накоплений домохозяйств и в последующем для получения наиболее достоверных оценок поведения исследуемого объекта, по схеме фильтра Калмана промоделируем значения при следующих значениях индексов узлов сетки модели: $n = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $s = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Данный пример рассчитывался в математической системе Matlab [16].

б) Задача численного оценивания коэффициентов распределенного уравнения параболического типа аккумуляции ресурсов множества домохозяйств при заданных данных наблюдений и краевых, начальных условиях. Получили значения коэффициентов уравнений: $\widehat{c}_1 = -0.0006477$; $\widehat{c}_2 = 1.000606$; $\widehat{c}_3 = -0.018023$; $\widehat{a}_1 = 74.6055$, использовав выражения (21), (22). Смоделированы значения наблюдений расходов R_0 и R_1 исследуемого объекта за 2014–2017 гг.

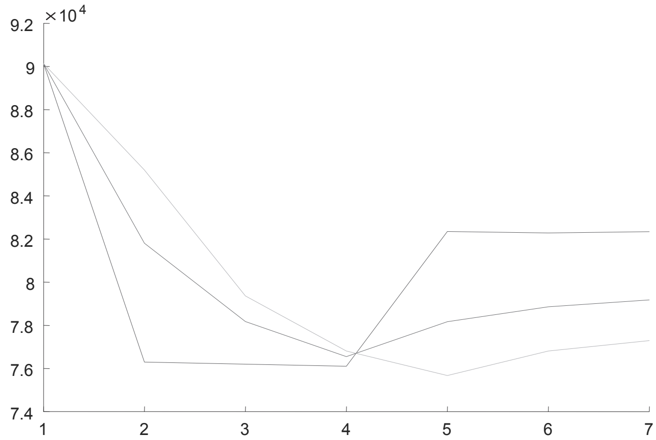
в) Более точно была решена задача оценивания состояния динамики объекта с применением калмановской фильтрации [11, 13]. Для расчета оценок предсказаний и оценок фильтрации использованы данные наблюдений: n = 24, y = [76200 76097 82343 82285 82339 79187 79111 79013 82485 82393 82307 83346 83286 83161 90188 90049 89992 86508 86425 86299 91191 91025 90960 94894]; дисперсия динамики объекта Q = 1282; дисперсия измерительной системы R = 33177; расчетные коэффициенты дифференциального уравнения: a = 0.7012; b = 21997.

Результаты расчета и графики поведений наблюдений, оценок предсказания и фильтрации представлены на рисунке.

xp = [90132 85198 79357 76812 75670 76806 77289]; (Пр) – % оценки предсказания.

xf = [90132 81803 78173 76544 78164 78853 79176]; (Ф) – % оценки фильтрации.

yS = [90132 76291 76200 76097 82343 82285 82339]; (Н) – % наблюдения.



Графики наблюдений, оценок предсказания и фильтрации

Plots of Observation and Prediction and Filtering Estimates

г) Обратная задача оценивания коэффициентов уравнения аккумуляции ресурсов домохозяйств решена с применением фильтрационных оценок поведения объекта по схеме Калмана. Расчетные оценки $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$, $\hat{d}_1$ были использованы для наиболее точного моделирования выходных данных системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный алгоритм оценивания коэффициентов параболического уравнения аккумуляции ресурсов множества домохозяйств с дальнейшим применением фильтра Калмана более достоверен по сравнению с остальными численными методами. Для нахождения более точных значений коэффициентов уравнения (7) можно воспользоваться современными методами планирования эксперимента, использовать другие приближенные формулы для внутренних узлов сетки и уменьшить шаг сетки между соседними точками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

2. *Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М.* Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.

3. *Анисимов А.С.* Идентификация объектов управления: учебное пособие. – Новосибирск: НЭТИ, 1985. – 80 с.

4. *Mehra R.R.* Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – Servey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. 19, iss. 6. – P. 753–768. – DOI: 10.1109/TAC.1974.1100701.

5. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. – Минск: Изд-во БГУ, 2004. – 245 с.

6. *Чернавский Д.С., Попков Ю.С., Рахимов А.Х.* Математические модели типологии семейных накоплений // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, вып. 2. – С. 98–106.

7. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

8. *Абденова Г.А.* Структурно-параметрическая идентификация систем с распределенными параметрами с использованием модели типа «вход–состояние–выход» // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (38). – С. 9–16.

9. *Абденов А.Ж., Абденова Г.А.* Методика пассивной идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности с учетом ошибок оценок состояния объекта и измерительной системы // Автометрия. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 43–51. – DOI: 10.15372/AUT20160205.

10. Оценивание коэффициентов уравнения теплопроводности с учетом шумов измерительной системы / А.Ж. Абденов, Ж.К. Нурбекова, В.Б. Уткин, Г.А. Абденова // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – 2015. – № 4 (107). – С. 5–13.

11. *Mehra R.R.* Identification and adaptive Kalman filtering // Mechanics. – 1971. – N 3. – P. 34–52.

12. *Абденова Г.А., Воевода А.А.* Оценивание параметров и характеристик шумов нестационарных процессов в стохастических системах, описываемых в пространстве состояний // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 3 (61). – С. 11–18.

13. *Абденова Г.А.* Прогнозирование значений уровня временного ряда на основе уравнений фильтра Калмана // Ползуновский вестник. – 2010. – № 2. – С. 4–6.

14. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 680 с.

15. *Abdenov A., Abdenova G., Kulbaev D.* Estimation of equation coefficients of free and forced string vibrations in continuous medium with consideration of dynamic noise and measurement // Materials Today: Proceedings. – 2019. – Vol. 16. – P. 336–342.

16. *Дьяконов В.П.* MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.

Абденова Гаухар Амирзаевна, доцент кафедры «Математическое и компьютерное моделирование» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, кандидат технических наук, PhD. Область научных интересов: математическое моделирование в экономике, параметрическая идентификация систем. Автор более 40 научных работ. E-mail: gauhar.phd@gmail.com

Базикова Карлыгаш Манаповна, докторант специальности «Математическое и компьютерное моделирование» Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. Направление научных интересов – математическое и компьютерное моделирование. Имеет 2 печатные работы. E-mail: kmbazikova@mail.ru

Кенжегалым Жангүл Медетқызы, магистрант специальности «Математическое и компьютерное моделирование» Евразийского национального университета им. Л.Н. Гу-

милева. Направление научных интересов – математическое и компьютерное моделирование. Научных работ и учебных пособий пока не имеет. E-mail: zhangul_flower@mail.ru

Abdenova Gaukhar A., associate professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Faculty of Mechanics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, PhD (Eng.). Her research interests are focused on mathematical modeling in economics and parametric identification of systems. She has more than 40 scientific publications. E-mail: gauhar.phd@gmail.com

Bazikova Karlygash M., a postdoctoral student specializing in "Mathematical and Computer Modeling", L.N. Gumilyov Eurasian National University. Her research interests are focused on mathematical and computer modeling. She has 2 scientific publications. E-mail: kmbazikova@mail.ru

Kenzhegalym Zhangul M., a master degree student specializing in "Mathematical and Computer Modeling", L.N. Gumilyov Eurasian National University. His research interests include mathematical and computer modeling. He has not published any papers yet. E-mail: zhangul_flower@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2021-2-7-18

A parabolic model in the form of space states of the dynamics of savings[*]

G.A. ABDENOVA[a], *K.M. BAZIKOVA*[b], *Zh.M. KENZHEGALYM*[c]

L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpayev Street, Nur-Sultan, 010008, Republic of Kazakhstan

[a] *gauhar.phd@gmail.com* [b] *kmbazikova@mail.ru* [c] *zhangul_flower@mail.ru*

Abstract

An important place in the theory of partial differential equations and its applications is occupied by the heat equation, a representative of the class of the so-called parabolic equations. It is known that to check the correctness of a mathematical model based on a parabolic equation, the existence of its solution is very important since a mathematical model is not always adequate to a specific phenomenon and the existence of a solution to a corresponding mathematical problem does not follow from the existence of a solution to a real applied problem. Therefore, methods for solving partial differential equations, both analytical and numerical, are always relevant.

Nowadays, a computational experiment has become a powerful tool for theoretical research. It is carried out over a mathematical model of the object under study, but at the same time, other parameters are calculated using one of the parameters of the model and conclusions are drawn about the properties of the object or phenomenon under study. The problem of passive parametric identification of systems with distributed parameters for resource accumulation dynamics of many households using a stochastic distributed model in the form of a state space with regard to the white noise of the dynamics model of the object under study and the white noise of the model of a linear-type measuring system is considered in the paper. The use of the finite difference method allowed us to reduce the solution of partial differential equations of a parabolic type to the solution of a system of linear finite difference and algebraic equations represented by models in the form of a state space. It was also proposed to use a filtering algorithm based on the Kalman scheme for reliable estimation of the object behavior.

Calculations were carried out using the Matlab mathematical system based on statistical data for five years, taken from the site "Agency for Strategic Planning and Reforms of the Republic of Kazakhstan Bureau of National Statistics". Estimation of the coefficients of the equa-

[*] *Received 18 January 2021.*

tions for the household resource accumulation in the form of a state space using this technique is sufficiently universal and can be applied in other fields of science and technology.

Keywords: partial differential equation, stochastic dynamical system, input and output observational data, passive identification, additive white noise, linear finite-difference equation, parabolic equation, model in the form of a state space, Kalman filter

REFERENCES

1. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody matematicheskoi fiziki* [Numerical methods of mathematical physics]. Moscow, Nauchnyi mir Publ., 2003. 316 p.

2. Gorskii V.G., Adler Yu.P., Talalai A.M. *Planirovanie promyshlennykh eksperimentov (modeli dinamiki)* [Planning of industrial experiments. Models of dynamics]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1978. 112 p.

3. Anisimov A.S. *Identifikatsiya ob"ektov upravleniya* [Identifying control objects]. Novosibirsk, NETI Publ., 1985. 80 p.

4. Mehra R.R. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – Servey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, iss. 6, pp. 753–768. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100701.

5. Erofeenko V.T., Kozlovskaya I.S. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi i matematicheskie modeli v ekonomike* [Equations with private derivatives and mathematical models in economics]. Minsk, BSU Publ., 2004. 245 p.

6. Chernavskii D.S., Popkov Yu.S., Rakhimov A.Kh. Matematicheskie modeli tipologii semeinykh nakoplenii [Mathematical models of family savings typology]. *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods* , 1994, vol. 30, iss. 2, pp. 98–106.

7. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.

8. Abdenova G.A. Strukturno-parametricheskaya identifikatsiya sistem s raspredelennymi s ispol'zovaniem modeli tipa "vkhod-sostoyanie-vykhod" [Structural and parametric identification of the systems with distributed parameters of using the model of the type "entry-state-exit"]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 1 (38), pp. 9–160.

9. Abdenov A.Zh., Abdenova G.A. Metodika passivnoi identifikatsii koeffitsientov uravneniya teploprovodnosti s uchetom oshibok otsenok sostoyaniya ob"ekta i izmeritel'noi sistemy [Passive identification of heat equation coefficients with account for errors in estimating the state of the object and measuring system]. *Avtometriya = Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 43–51. DOI: 10.15372/AUT20160205. (In Russian).

10. Abdenov A.Zh., Nurbekova Zh.K., Utkin V.B., Abdenova G.A. Otsenivanie koeffitsientov uravneniya teploprovodnosti s uchetom shumov izmeritel'noi sistemy [Coefficients evaluation of heat equation with account of noise measuring system]. *Vestnik ENU im. L.N. Gumileva = Herald of the L.N. Gumilyov Eurasian National University*, 2015, no. 4 (107), pt. 1, pp. 5–13.

11. Mehra R.R. Identification and adaptive Kalman filtering. *Mechanics*, 1971, no. 3, pp. 34–52.

12. Abdenova G.A., Voevoda A.A. Otsenivanie parametrov i kharakteristik shumov nestatsionarnykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, opisyvaemykh v prostranstve sostoyanii [The parameters estimation and noise characteristics of time-varying processes in the stochastic systems in the state space]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 3 (61), pp. 11–18.

13. Abdenova G.A. Prognozirovanie znachenii urovnya vremennogo ryada na osnove uravnenii fil'tra Kalmana [Prediction of time series level values based on Kalman filter equations]. *Polzunovskii vestnik = Polzunov Bulletin*, 2010, no. 2, pp. 4–6.

14. Eykhoff P. *System identification*. London, New York, Wiley-Interscience, 1974 (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya*. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).

15. Abdenov A., Abdenova G., Kulbaev D. Estimation of equation coefficients of free and forced string vibrations in continuous medium with consideration of dynamic noise and measurement. *Materials Today: Proceedings*, 2019, vol. 16, pp. 336–342.

16. D'yakonov V.P. *MATLAB. Polnyi samouchitel'* [MATLAB. Complete tutorial]. Moscow, DMK Press Publ., 2012. 768 p.

Для цитирования:

Абденова Г.А., Базикова К.М., Кенжегалым Ж.М. Параболическая модель в форме пространства состояний динамики накоплений // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 2 (82). – С. 7–18. – DOI: 10.17212/2782-2001-2021-2-7-18.

For citation:

Abdenova G.A., Bazikova K.M., Kenzhegalym Zh.M. Parabolicheskaya model' v forme prostranstva sostoyanii dinamiki nakoplenii [A parabolic model in the form of space states of the dynamics of savings]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2021, no. 2 (82), pp. 7–18. DOI: 10.17212/2782-2001-2021-2-7-18.