ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 55, № 2, 2014, с. 19–29

http://journals.nstu.ru/vestnik
Scientific Bulletin of NSTU
Vol. 55, No. 2, 2014, pp. 19–29

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ

AUTOMATIC CONTROL AND REGULATION

УДК 681.5.013

К синтезу систем управления с частично заданной структурой по желаемым показателям качества*

А.Р. ГАЙДУК[1], Б.В. ГУРЕНКО[2], Е.А. ПЛАКСИЕНКО[3]

[1] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, д. т. н., профессор, e-mail: gaiduk_2003@mail.ru*
[2] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, аспирант, e-mail: boris.gurenko@gmail.com*
[3] *347900, РФ, г. Таганрог, ул. Петровская, 45, Таганрогский институт управления и экономики, доцент, e-mail: pumkad@mail.ru*

При синтезе систем управления различными объектами для обеспечения желаемых показателей качества часто используются передаточные функции. В этом случае передаточные функции должны формироваться не только в соответствии с желаемыми показателями качества, но и с учетом условий физической реализуемости этих функций. Известные условия физической реализуемости передаточных функций системами управления с частично заданной структурой являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому при их применении очень часто либо задача синтеза не имеет аналитического решения, либо получаемое уравнение устройства управления невозможно реализовать точно. В последнем случае в уравнение устройства управления обычно вводятся малые постоянные времени, что приводит к приближенному решению задачи синтеза и снижению запасов устойчивости замкнутой системы. В данной работе предложены необходимые и достаточные условия, полученные на основе полиномиальных уравнений, которые связывают структуру и параметры замкнутой системы со структурой и параметрами объекта и устройства управления. Уравнение устройства управления формируется на основе принципа управления по выходу и воздействиям. Приведенные ниже условия реализуемости передаточных функций систем с частично заданной структурой обеспечивают следующие возможности в задаче синтеза замкнутых систем управления. Во-первых, можно назначать все коэффициенты знаменателя и, частично, числителей передаточных функций синтезируемой системы исходя из желаемого качества процесса управления. Во-вторых, уравнения, определяющие структуру и параметры устройства управления, являются разрешимыми, а уравнения устройства управления являются физически реализуемыми в заданных условиях. Необходимость учета приведенных условий в задачах синтеза замкнутых систем управления, а также их эффективность показана на конкретных примерах синтеза, в частности, по заданным прямым показателям качества.

Ключевые слова: система управления, объект, устройство управления, оператор, передаточная функция, порядок, структура, параметр, уравнение связи, условия реализуемости, прямые показатели качества

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, объекты управления обычно снабжаются датчиками, а также органами управления и исполнительными механизмами. Поэтому задача синтеза систем автоматического управления (САУ) заключается в определении структуры и параметров формирующей части регулятора (устройства управления) таким образом, чтобы обеспечивались устойчивость и требуемое качество замкнутой системы. Так как к моменту синтеза САУ объект управления задан, т. е. заданы структура и параметры его математической модели, то возникает задача «синтеза систем управления с частично заданной структурой» [1, 2]. Известно, что задача син-

* *Статья получена 12 января 2014 г.*

теза систем управления с заданным объектом имеет решение, если только объект является стабилизируемым, т. е. его неполная часть «достаточно» устойчива, причем является не сильно колебательной.

Во многих случаях решение задачи синтеза САУ ищется в соответствии с принципом управления по состоянию или же по выходу с применением наблюдателей состояния. В этих случаях решение задачи синтеза чаще всего является аналитическим и полностью обусловливается принятым функционалом или назначенными полюсами в случае модального управления. Физическая реализуемость устройства управления в этом подходе предусматривается постановкой задачи синтеза [2 – 4]. Если же ставится задача синтеза САУ с желаемыми значениями прямых показателей качества, то эти методы характеризуются большими трудностями. В то же время именно прямые показатели качества, по словам Б.Н. Филимонова и В.Н. Букова, «физически наиболее ясны и имеют четкие границы допустимых значений, основанные на богатом опыте конструирования систем» [5].

Как известно, прямые показатели качества САУ непосредственно связаны с их передаточными функциями или операторами уравнений «вход-выход» [4, 6, 7]. Поэтому те методы, где решение задачи синтеза САУ заданным объектом управления ищется на основе желаемых передаточных функций, являются наиболее привлекательными [6 – 9]. Однако эти методы осложнены следующей проблемой. Сложность в том, что желаемые передаточные функции синтезируемой САУ должны быть сформированы так, чтобы, во-первых, замкнутая система была устойчивой и имела желаемое качество, во-вторых, задача синтеза была разрешимой математически и, в-третьих, получаемая в результате решения задачи синтеза математическая модель «вход-выход» устройства управления (УУ) была физически реализуемой [6, 8].

Ограничения, обусловленные указанными требованиями к передаточным функциям замкнутой системы с заданным объектом управления, называются «условиями реализуемости передаточных функций системой с частично заданной структурой» [1, 2, 6 – 9]. Приведенные ниже условия реализуемости передаточных функций относятся к одномерным САУ, т. е. к системам с одним задающим воздействием, одной управляемой величиной и несколькими приложенными к объекту возмущениями. Кроме широко известных ранее ограничений приводимые ниже условия включают дополнительное ограничение на порядок реализующей системы, которое обеспечивает разрешимость задачи аналитического синтеза при произвольных полюсах передаточных функций.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА САУ

Предположим, уравнение одномерного объекта управления в операторной форме имеет вид

$$A(p)y = B_0(p)u + B_1(p)\hat{f}_1 + B_2(p)\breve{f}_2, \tag{1}$$

где y – управляемая величина, u – управление, $\hat{f}_1$ – доступное, а $\breve{f}_2$ – недоступное измерению возмущающие воздействия; $A(p)$, $B_j(p)$ – некоторые полиномы от $p = d/dt$ степеней n, m_j, $j = 0, 1, 2$ с известными числовыми коэффициентами. Для определенности примем, что полином $A(p) = \det(pE - A)$, где E – единичная, а A – числовая матрица уравнений в переменных состояния объекта (1), т. е. $A(p)$ в уравнении (1) – это нормированный по старшей степени p характеристический полином этого объекта [6 – 8].

Относительные степени передаточных функций $W_{yu}(p)$, $W_{y\hat{f}_1}(p)$, $W_{y\breve{f}_2}(p)$ объекта (1) определяются [2, 7] выражениями

$$\mu_{yu} = n - m_0, \ \mu_{y\hat{f}_1} = n - m_1, \ \mu_{y\breve{f}_2} = n - m_2. \tag{2}$$

Величину

$$\mu_{\text{об}} = \mu_{yu} \tag{3}$$

будем называть относительным порядком объекта (1).

Без потери общности примем, что объект управления (1) является полным, т. е. полностью управляемым и полностью наблюдаемым [3, 6], что эквивалентно условию

$$\text{НОД}\{A(p), B_0(p)\} = \text{const}, \tag{4}$$

или условию, что полиномы $A(p)$ и $B_0(p)$ не имеют равных корней [6]. Здесь НОД – наибольший общий делитель.

При синтезе САУ обычно принимается тот или иной принцип управления, который и определяет уравнение устройства управления. В данном случае в соответствии с принципом управления «по выходу и воздействиям» [6, 8, 10] уравнение УУ имеет вид

$$\bar{R}(p)u = Q_0(p)g - L(p)y + Q_1(p)\hat{f}_1, \tag{5}$$

где $\bar{R}(p) = R(p) + N(p)$, а $R(p)$, $N(p)$, $Q_0(p)$, $L(p)$, $Q_1(p)$ – некоторые полиномы, степени и коэффициенты которых подлежат определению в процессе решения задачи синтеза замкнутой системы (1), (5); $g = g(t)$ – задающее воздействие замкнутой системы; $\bar{R}(p)$ – характеристический полином УУ, поэтому порядок УУ (5) $r = \deg \bar{R}(p)$.

Уравнение «вход-выход» (5) описывает УУ наиболее общего вида, если в нем учитываются все сигналы, которые могут быть использованы для формирования управления $u = u(t)$. При этом важно, чтобы это устройство реализовывалось в виде единого блока с не менее чем двумя входами даже при скалярном управлении u [6, 8]. Как видно, УУ (5) в общем случае является многомерным устройством управления (МУУ).

Относительные степени передаточных функций МУУ (5) определяются, очевидно, выражениями $\mu_{ug} = r - \deg Q_0(p)$, $\mu_{uy} = r - \deg L(p)$, $\mu_{u\hat{f}_1} = r - \deg Q_1(p)$, а его относительный порядок выражением

$$\mu_{\text{уу}} = \min\{\mu_{ug}, \mu_{uy}, \mu_{u\hat{f}_1}\}. \tag{6}$$

Все полиномы МУУ (5) определяются в процессе синтеза, поэтому условие его *физической* (*технической*) *реализуемости* [6, 8, 10] определяется неравенством

$$\mu_{\text{уу}} \geq \mu^*_{\text{уу}} \geq 0, \tag{7}$$

где $\mu^*_{\text{уу}}$ – допустимое по условиям реализуемости значение относительного порядка МУУ.

Значение $\mu^*_{\text{уу}}$, практически, определяется свойствами технических элементов, на основе которых будет реализовано искомое МУУ. Например, если используемые операционные усилители являются широкополосными, то можно взять $\mu^*_{\text{уу}} = 0$. В противном случае, необходимо взять $\mu^*_{\text{уу}} \geq 1$. Это обусловлено тем, что если $\mu^*_{\text{уу}} = 0$, то при реализации в МУУ обязательно образуются *безынерционные* каналы связи между входами МУУ и его выходом. При $\mu^*_{\text{уу}} \geq 1$ такие безынерционные каналы связи не возникают. Подчеркнем, что при $\mu_{\text{уу}} < 0$ МУУ (5) является *нереализуемым*.

Нетрудно установить, что уравнениям (1), (5) соответствует уравнение «вход-выход» замкнутой системы

$$D(p)y = H_0(p)g + H_1(p)\hat{f}_1 + H_2(p)\breve{f}_2, \tag{8}$$

операторы которого определяются следующими выражениями:

$$D(p) = A(p)\bar{R}(p) + B_0(p)L(p)\,, \tag{9}$$

$$H_0(p) = B_0(p)Q_0(p)\,, \tag{10}$$

$$H_1(p) = B_0(p)Q_1(p) + B_1(p)\bar{R}(p)\,, \tag{11}$$

$$H_2(p) = B_2(p)\bar{R}(p)\,. \tag{12}$$

В соответствии с выражениями (8), (9) порядок замкнутой системы (1), (5) равен $n_{\text{сис}} = \deg D(p) = n + r$, а относительная степень μ_{yg} её передаточной функции $W_{yg}(p) = H_0(p)/D(p)$ по задающему воздействию $g(t)$ и относительный порядок $\mu_{\text{сис}}$ системы определяются при $\mu_{\text{уу}} = \mu_{uy}$ выражениями

$$\mu_{\text{сис}} = \mu_{yg} = \deg D(p) - \deg H_0(p) = n + r - [\deg B_0(p) + \deg Q_0(p)]$$

или

$$\mu_{\text{сис}} = \mu_{\text{об}} + \mu_{\text{уу}}\,. \tag{13}$$

Таким образом, при $\mu_{\text{уу}} = \mu_{uy}$ относительный порядок замкнутой системы равен сумме относительных порядков объекта и УУ.

Исходя из требований к устойчивости и прямым показателям качества синтезируемой системы, можно всегда сформировать полиномы $D^*(p)$ и $H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$ желаемых передаточных функций $W_{yg}^*(p) = H_0^*(p)/D^*(p)$, $W_{y\hat{f}_1}^*(p) = H_1^*(p)/D^*(p)$, $W_{y\breve{f}_2}^*(p) = H_2^*(p)/D^*(p)$ синтезируемой системы. Если в выражениях (9) – (12) заменить $D(p)$ на $D^*(p)$ и $H_j(p)$ на $H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$, то эти выражения будут *разрешающими уравнениями* задачи аналитического синтеза линейных САУ [6, 8]. Неизвестными в этих уравнениях, очевидно, будут полиномы МУУ (5), а известными – полиномы $A(p)$, $B_j(p)$, а также полиномы $D^*(p)$ и $H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$. В работах [6, 8, 10] показано, что все полиномиальные уравнения (9) – (12) эквивалентны некоторым системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полиномов $\bar{R}(p)$, $L(p)$, $Q_0(p)$ и $Q_1(p)$. Условия разрешимости этих уравнений или систем и являются искомыми «условиями реализуемости передаточных функций или операторов системой с частично заданной структурой» [2, 8, 10].

Таким образом, для того чтобы задача аналитического синтеза системы (1), (5) имела решение, необходимо найти такие ограничения на передаточные функции $W_{yg}^*(p)$, $W_{y\hat{f}_1}^*(p)$, $W_{y\breve{f}_2}^*(p)$ или на операторы $D^*(p)$ и $H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$, при которых выполняются следующие условия:

а) всем коэффициентам (корням) знаменателей $D^*(p)$, а также, частично, числителей $H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$ передаточных функций $W_{yg}^*(p)$, $W_{y\hat{f}_1}^*(p)$, $W_{y\breve{f}_2}^*(p)$ можно придавать произвольные значения, исходя из желаемых прямых показателей качества процесса управления;

б) система уравнений (9) – (12) при $D(p) = D^*(p)$ и $H_j(p) = H_j^*(p)$, $j = 0, 1, 2$ разрешима относительно полиномов $\bar{R}(p)$, $L(p)$, $Q_0(p)$ и $Q_1(p)$;

в) система (1), (5) является устойчивой и имеет желаемое качество;

г) соответствующее уравнение МУУ (5) удовлетворяет условиям (6), (7).

2. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ

В работах [6, 8] было показано, что условия реализуемости передаточных функций замкнутой системы существенно зависят от того, как назначены корни характеристического полинома системы (далее они называются полюсами). Если полюсы системы назначены без учета свойств объекта, то она называется «системой с независимыми полюсами». Если же полюсы назначены так, что часть из них совпадает (согласованы) с нулями передачи объекта по управлению и (или) с корнями характеристического полинома объекта, то система называется «*системой с согласованными полюсами*». В данной работе ограничимся рассмотрением систем с согласованными полюсами, так как в этом случае условия реализуемости передаточных функций наименее жесткие [6, 8].

Так как для устойчивости системы (8) необходимо, чтобы все корни полинома (9) имели отрицательные вещественные части, то обычно проводится факторизация полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$ из уравнения (1) следующим образом:

$$A(p) = A^-(p)A^+(p)\,,\ B_0(p) = \beta_{m_0} B^-(p)B^+(p)\,, \tag{14}$$

где $A^-(p)$, $A^+(p)$ и $B^-(p)$, $B^+(p)$ – нормированные по старшей степени полиномы; β_{m_0} – коэффициент полинома $B_0(p)$ при старшей степени p. Здесь $A^-(p)$ и $B^-(p)$ полиномы, корни которых равны корням полиномов $A(p)$ и $B_0(p)$ со строго отрицательными вещественными частями. Будем считать, что все корни полиномов $A^-(p)$ и $B^-(p)$ включаются в число корней характеристического полинома замкнутой системы. Отметим, что в общем случае каждый из полиномов $A^-(p)$, $A^+(p)$ и $B^-(p)$, $B^+(p)$ может быть равен 1.

В случае систем с согласованными полюсами полиномы из уравнения МУУ (5) берутся в виде

$$\bar{R}(p) = B^-(p)\tilde{R}(p)\,,\ L(p) = A^-(p)\tilde{L}(p)\,,\ Q_0(p) = A^-(p)M^-(p)\tilde{Q}_0(p)\,, \tag{15}$$

где $\tilde{R}(p)$, $\tilde{L}(p)$, $\tilde{Q}_0(p)$, $M^-(p)$ – вспомогательные полиномы, определяемые в процессе решения задачи синтеза. Из выражений (9), (10), (14) и (15) несложно вывести, что в общем случае полиномы $H_0(p)$ и $D(p)$ системы (1), (5) или (8) с согласованными полюсами, посредством которой реализуется желаемая передаточная функция по задающему воздействию $W_{yg}^*(p) = H_0^*(p)/D^*(p)$, имеют вид

$$H_0(p) = A^-(p)B^-(p)H_0^*(p)M^-(p)\,, \tag{16}$$

$$D(p) = A^-(p)B^-(p)D^*(p)M^-(p)\,. \tag{17}$$

Полиномы $\tilde{R}(p)$, $\tilde{L}(p)$, $\tilde{Q}_0(p)$ в равенствах (15) определяются решением систем линейных алгебраических уравнений, соответствующих полиномиальным уравнениям, вытекающим из уравнений (9), (10) с учетом равенств (14) – (17) [6, 8, 10].

Условия реализуемости передаточной функции по задающему воздействию. Из выражений (8) – (10) и (14) – (17) следует, что передаточная функция $W_{yg}^*(p) = H_0^*(p)/D^*(p)$ может быть реализована системой с согласованными полюсами и частично заданной структурой, если только выполняются следующие условия:

$$\mu_{yg}^* = \deg D^*(p) - \deg H_0^*(p) \geq \mu_{\text{об}} + \mu_{\text{уу}}^*\,,\ H_0^*(p) = B^+(p)\bar{H}_0^*(p)\,, \tag{18}$$

$$n_{\text{сис}} = \deg D(p) \geq 2n + \mu_{yy}^* - 1\,. \tag{19}$$

Если ограничиться случаем реализующих систем минимального порядка, то из неравенств (7) и (19) на степень полинома $M^-(p)$ из (15) – (17) вытекает условие

$$\deg M^-(p) = \max\{0;\ 2n-1+\mu_{уу}^* - \deg[A^-(p)B^-(p)D^*(p)]\}. \quad (20)$$

Выражения (18) и (19), (20) представляют собой условия реализуемости передаточной функции $W_{yg}^*(p)$ системой с частично заданной структурой. Отметим, что условия (18) хорошо известны и приводятся в работах Я.З. Цыпкина, C.T. Chen и других авторов [1, 2]. Условия (19), (20) получены в работах [6, 8] и в более ранних работах не встречались.

Дополнительные условия (19), (20) фактически обеспечивают, во-первых, разрешимость полиномиального уравнения (9) относительно полиномов $\bar{R}(p)$, $L(p)$ при условии (7), а во-вторых, возможность придавать всем коэффициентам полинома $D^*(p)$ произвольные значения, исходя из желаемых показателей качества процесса управления. При этом полином $M^-(p)$ вводится в равенства (14) – (17) для того, чтобы увеличить до необходимой величины порядок системы, реализующей заданную передаточную функцию $W_{yg}^*(p)$, удовлетворяющую условиям (18), в тех случаях, когда степень её знаменателя удовлетворяет условиям

$$n - \deg B^-(p) + \mu_{уу}^* \le \deg D^*(p) < \mu_{об} + \mu_{уу}^* + \deg[B^+(p)A^+(p)] - 1.$$

Можно показать, что при выполнении условий (18) $\deg D^*(p) \ge n - \deg B^-(p) + \mu_{уу}^*$, а при $\deg D^*(p) \ge \mu_{об} + \mu_{уу}^* + \deg[B^+(p)A^+(p)] - 1$, согласно (20) $\deg M^-(p) = 0$, т. е. в последнем случае можно полагать $M^-(p) = 1$

Для большей ясности покажем далее *необходимость* всех условий (18) – (20).

Необходимость первого условия (18). Предположим, необходимо синтезировать замкнутую систему управления объектом (1) при $\hat{f}_1 = \breve{f}_2 = 0$, где полиномы $B_0(p) = \beta_0$, $A(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p$, причем $\beta_0 \ne 0$ и $\alpha_1 \ne 0$, т. е. $\mu_{об} = 1$, а МУУ реализуемо при $\mu_{уу}^* = 0$. Исходя из требований к качеству системы, сформирована передаточная функция $W_{yg}^*(p) = (\eta_0^* + \eta_1^* p + \eta_2^* p^2)/(\delta_0^* + \delta_1^* p + \delta_2^* p^2)$, где η_i^* и δ_i^* – желаемые значения коэффициентов. Очевидно, относительная степень желаемой передаточной функции $\mu_{yg} = 0$, т. е. даже при $\mu_{уу}^* = 0$ первое условие (18) не выполняется.

Если не обращать внимания на этот факт, а сразу подставить заданные полиномы $A(p)$, $B_0(p)$ и полином $D(p) = D^*(p) = \delta_0^* + \delta_1^* p + \delta_2^* p^2$ в уравнение (9), то оно примет вид $(\alpha_0 + \alpha_1 p)\bar{R}(p) + \beta_0 L(p) = \delta_0^* + \delta_1^* p + \delta_2^* p^2$. Нетрудно установить [9, 10], что при $R(p) = \rho_0 + \rho_1 p$ и $L(p) = \lambda_0$ последнее эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \rho_0 \\ \rho_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0^* \\ \delta_1^* \\ \delta_2^* \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы определяет значения коэффициентов λ_0, ρ_0 и ρ_2. Аналогично, подставив полиномы $B_0(p) = \beta_0$ и $H_0(p) = H_0^*(p) = \eta_0^* + \eta_1^* p + \eta_2^* p^2$ в уравнение (10) и решив его, получим $Q_0(p)=\beta_{m_0}^{-1}(\eta_0^*+\eta_1^* p+\eta_2^* p^2)$. Таким образом, в данном случае $r=1$, $\mu_{uy}=1-0=1$, а $\mu_{ug}=1-2=-1$, т. е. согласно (6) $\mu_{yy}=\min\{1;\ -1\}=-1$. Другими словами, в этом случае условие физической реализуемости (7) не выполняется, и точно реализовать соответствующее МУУ невозможно.

Необходимость второго условия (18). Необходимость этого условия следует из условия разрешимости полиномиального уравнения (10) относительно полинома $Q_0(p)$. Действительно, полином $D(p)$, как характеристический полином замкнутой системы, не может содержать в качестве сомножителя полином $B^+(p)$ по условиям устойчивости, поэтому в общем случае $D(p)$ может иметь только вид (17). Тогда из выражений (8), (10) и (14) следует, что передаточная функция $W_{yg}(p)$ системы (1), (5) имеет вид

$$W_{yg}(p)=\frac{H_0(p)}{D(p)}=\frac{\beta_{m_0}B^+(p)B^-(p)Q_0(p)}{A^-(p)B^-(p)D^*(p)M^-(p)}.$$

Полагая здесь $Q_0(p)=\tilde{Q}_0(p)A^-(p)M^-(p)$, получим

$$W_{yg}(p)=\frac{H_0(p)}{D(p)}=\frac{\beta_{m_0}B^+(p)\tilde{Q}_0(p)}{D^*(p)}.$$

Отсюда при $\tilde{Q}_0(p)=\beta_{m_0}^{-1}\bar{H}_0^*(p)$ следует общий вид оператора $H_0(p)$ (16) и необходимость второго условия (18).

Необходимость условий (19) и (20). Покажем нетривиальность этих условий на конкретных примерах. Пусть в уравнении (1) при $\hat{f}_1=\breve{f}_2=0$ полиномы $A(p)=(p+2)(p^2-4p)$, $B_0(p)=(p+5)(-0{,}4p+3{,}2)$. Желаемая передаточная функция замкнутой системы управления $W_{yg}^*(p)=(-p+8)/(p^2+\delta_1^* p+\delta_0^*)$, а МУУ реализуемо при $\mu_{yy}^*=0$. В данном случае $\mu_{\text{об}}=1$, $A^-(p)=p+2$, $A^+(p)=p^2-4p$, $B^-(p)=p+5$, $B^+(p)=p-8$, $\beta_2=-0{,}4$; $H_0^*(p)=-p+8$, $D^*(p)=p^2+\delta_1^* p+\delta_0^*$, $\mu_{yg}^*=1$. Условия (4) и (18), очевидно, выполнены.

В соответствии с условием (20) в данном случае $\deg M^-(p)=1$, т. е. необходимо ввести в соотношения (15) – (17) полином $M^-(p)\neq \text{const}$. Если же, игнорируя этот факт, взять $M^-(p)=1$, то по (17) $D(p)=(p+5)(p+2)(p^2+\delta_1^* p+\delta_0^*)$, т. е. $n_{\text{сис}}=\deg D(p)=4$, а по формуле $n_{\text{сис}}=n+r$ будем иметь $r=4-3=1$. Далее по (15) находим $\deg\tilde{R}(p)=0$, $\deg\tilde{L}(p)=0$, т. е. $\tilde{L}(p)=\lambda_0$, $\tilde{R}(p)=\rho_0$, а $\bar{R}(p)=\rho_0(p+5)$, $L(p)=\lambda_0(p+2)$. При этом полиномиальное уравнение (9), после сокращения множителей $(p+5)$ и $(p+2)$ в обеих его частях, принимает вид $(p^2+\delta_1^* p+\delta_0^*)=(p^2-4p)\rho_0+(-0{,}4p+3{,}2)\lambda_0$. Этому уравнению, очевидно, соответствует следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} 3{,}2 & 0 \\ -0{,}4 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \rho_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_0^* \\ \delta_1^* \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Если коэффициенты δ_0^*, δ_1^* имеют *произвольные* значения, то система (21), очевидно, не имеет решения. Если же коэффициент $\delta_1^* = -(\delta_0^* + 32)/8$, то эта система уравнений формально имеет решение, но при этом даже устойчивость САУ придать невозможно.

В общем случае можно, конечно, ставить задачу синтеза регулятора пониженного порядка. То есть задачу поиска таких значений λ_0, ρ_0, при которых алгебраическая система, аналогичная (21), приводит, например, при $B_0(p) = (\beta_1 p + \beta_0)$ и $\beta_1 > 0,\ \beta_0 > 0$, к некоторому полиному $\bar{D}(p)$, вещественные части корней которого отрицательны, а качество САУ приемлемо [9, 11]. Однако в этом случае решение задачи синтеза ищется в «прокрустовом ложе» нехватки параметров и существует далеко не всегда.

Чтобы корни (или коэффициенты) полинома $D^*(p)$ могли быть назначены, исходя из требований к качеству САУ, необходимо иметь возможность назначать их *произвольно*. Именно это, как отмечалось выше, обеспечивается условием (19) и вытекающим из него равенством (20) в случае системы минимального порядка. При учете условий (19), (20) в рассматриваемом примере имеем $\deg M^-(p) = 1$, т. е. по (17) $n_{\text{сис}} = \deg D(p) = 5$, а так как $n_{\text{сис}} = n + r$, то теперь $r = 5 - 3 = 2$. При тех же условиях имеем $\deg \tilde{R}(p) = 1$, $\deg \tilde{L}(p) = 1$, т. е. полиномы $\tilde{L}(p) = \lambda_1 p + \lambda_0$ и $\tilde{R}(p) = \rho_1 p + \rho_0$ имеют четыре неизвестных коэффициента, а эквивалентная уравнению (9) алгебраическая система содержит четыре уравнения, так как теперь $\deg D^*(p) + \deg M^-(p) = 3$. Эта система имеет решение, поскольку по условию объект управления является полным, т. е. $\text{НОД}\{A^+(p), B^+(p)\} = \text{const}$.

Пусть в уравнении (1) по-прежнему $A(p) = (p+2)(p^2 - 4p)$, $B_0(p) = (p+5)(-0{,}4p + 3{,}2)$, $\hat{f}_1 = \breve{f}_2 = 0$. Поставим задачу синтезировать при $\mu_{yy}^* = 0$ систему управления, которая имеет астатизм первого порядка к задающему воздействию; переходная функция не имеет перерегулирования, а её длительность не более 2 с. Сформированная по этим условиям желаемая передаточная функция с учетом условий (18) имеет вид $W_{yg}^*(p) = (-p+8)/(p^2 + 6p + 8)$. Положим $M^-(p) = p + 3$, тогда уравнение (9) при указанных выше условиях принимает вид $(p^2 - 4p)(\rho_1 p + \rho_0) + (-0{,}4p + 3{,}2)(\lambda_1 p + \lambda_0) = (p^2 + 6p + 8)(p + 3)$, а ему эквивалентна система

$$\begin{bmatrix} 3{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}4 & 3{,}2 & -4 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \rho_0 \\ \rho_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 26 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Решение этой системы позволяет с помощью равенств (15) записать полиномы $\bar{R}(p) = (p + 33{,}25)(p+5)$, $L(p) = 2{,}5(20{,}25p + 3)(p+2)$. Аналогично, решение уравнения (10) с учетом соотношений (15) и (16) определяет полином $Q_0(p) = 2{,}5(p+2)(p+3)$. Подставляя эти полиномы в уравнение МУУ (5), получим

$$(p + 33{,}25)(p+5)u = 2{,}5(p+2)(p+3)g - 2{,}5(20{,}25p+3)(p+2)y. \tag{23}$$

С целью получения более простой схемы МУУ заменим g суммой $\varepsilon + y$, где $\varepsilon = g - y$ – измеряемое отклонение, и представим уравнение (23) следующим образом:

$$\zeta_1 = \frac{(p+3)\varepsilon - 19{,}25py}{p+5}, \quad u = \frac{2{,}5(p+2)}{p+33{,}25}\zeta_1.$$

Далее, применяя к этим выражениям соотношения канонической управляемой формы [4], получим следующие уравнения искомого МУУ в переменных состояниях:

$$\dot{z}_1 = -5z_1 - 2\varepsilon + 96,25y;\quad \dot{z}_2 = -33,25z_2 - 78,125\zeta_1;$$
$$\zeta_1 = z_1 + \varepsilon - 19,25y;\qquad u = z_2 + 2,5\zeta_1.$$

Обе подсистемы полученного МУУ, очевидно, удовлетворяют условию реализуемости (7) при заданном $\mu_{yy}^* = 0$. Найденное МУУ и заданный объект с правым нулем передачи, описываемый уравнением $(p+2)(p^2-4p)y = (p+5)(-0,4p+3,2)u$, образуют замкнутую систему 5-го порядка, показатели качества которой, как видно на рис. 1, удовлетворяют заданным значениям. Отрицательное перерегулирование в начале переходного процесса обусловлено положительным нулем передачи объекта, который, естественно, сохраняется и в замкнутой системе.

Приведенные примеры наглядно свидетельствуют: чтобы задача аналитического синтеза системы с заданным объектом управления имела решение, и при этом всем коэффициентам знаменателя и частично числителя её передаточной функции $W_{yg}(p)$ можно было назначать значения, исходя из желаемого качества процесса управления, а МУУ было физически реализуемым при заданных условиях, необходимо выполнить условия (18) – (20).

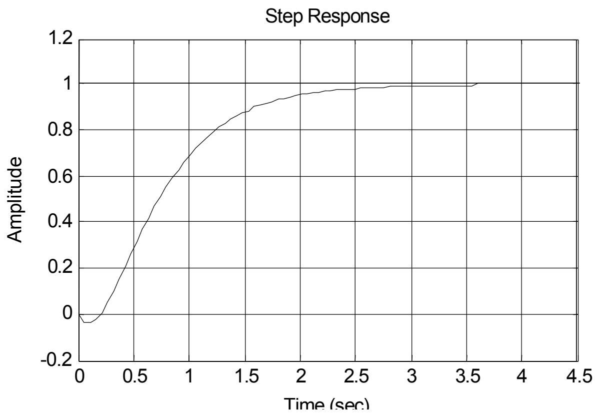

Рис. 1. Переходная функция замкнутой системы

Измеряемые возмущения. Прежде всего, заметим, что в выражениях (15) полином $\tilde{R}(p)$ можно взять в виде $\tilde{R}(p) = \Phi(p)\vec{R}(p)$, полиномы $\tilde{L}(p)$ и $\tilde{Q}_0(p)$ – так, чтобы $\tilde{L}(p) - \tilde{Q}_0(p) = G(p)\vec{L}(p)$, где $\vec{R}(p)$ и $\vec{L}(p)$ – некоторые полиномы, а $Q_1(p) = F_1(p)\ddot{Q}_1(p)$. При этом $\Phi(p) = \text{НОК}\{G(p), F_1(p), F_2(p)\}$, полиномы $G(p)$, $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – суть $K(p)$ – изображения задающего воздействия $g(t)$, возмущений $\hat{f}_1(t)$ и $\breve{f}_2(t)$; $\ddot{Q}_1(p)$ – некоторый полином, степень которого не более $r - \mu_{yy}^* - \deg F_1(p)$, а условие (19) заменяется неравенством $\deg D(p) \ge 2n + \deg\Phi(p) + \mu_{yy}^* - 1$ [6, 8, 10]. Отметим, что если $\hat{f}_1(t) \equiv 0$ и (или) $\breve{f}_2(t) \equiv 0$, то $F_1(p) = 1$ и (или) $F_2(p) = 1$.

При этих условиях из выражений (8), (10), (11) и (14) – (17) следует, что передаточная функция по ошибке от задающего воздействия и передаточные функции по измеряемым возмущениям типа $\hat{f}_1(t)$, реализуемые системой (1), (5), имеют вид

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{\ddot{H}_0(p)G(p)}{D^*(p)},\quad W_{y\hat{f}_1}(p) = \frac{\tilde{H}_1^*(p)F_1(p)}{A^-(p)D^*(p)M^-(p)}.$$

Здесь $\ddot{H}_0(p) = A^+(p)\Phi_0(p)\vec{R}(p) + \beta_{m_0}B^+(p)\vec{L}(p)$ и $\tilde{H}_1(p) = \beta_{m_0}B^+(p)\ddot{Q}_1(p) + B_1(p)\Phi_1(p)\vec{R}(p)$ – полиномы, часть коэффициентов которых могут быть назначены с целью придания желаемых свойств замкнутой системе по каналу $g \to y$ и по каналу $\widehat{f}_1 \to y$; полиномы $\Phi_0(p) = G^{-1}(p)\Phi(p)$, а $\Phi_1(p) = F_1^{-1}(p)\Phi(p)$ [10].

Неизмеряемые возмущения. Передаточные функции по неизмеряемым возмущениям типа $\breve{f}_2(t)$, реализуемые системой (1), (5) с согласованными полюсами при указанных выше условиях, имеют вид

$$W_{y\widehat{f}_2}(p) = \frac{\vec{R}_2(p)B_2(p)F_2(p)}{A^-(p)D^*(p)M^-(p)},$$

где $\vec{R}_2(p) = F_2^{-1}(p)\tilde{R}(p)$. Отметим, что полиномы $G(p)$ и $F_1(p)$, $F_2(p)$ могут использоваться для обеспечения астатизма некоторого порядка или селективной инвариантности по отношению к задающему воздействию и возмущениям. При этом вследствие применения принципа управления по выходу и воздействиям, не возникает известных сложностей обеспечения устойчивости системы при высоком порядке астатизма [6, 8, 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что при синтезе систем управления заданным объектом необходимо учитывать соответствующие условия физической реализуемости передаточных функций замкнутых систем. В данной работе приведены условия реализуемости передаточных функций, все коэффициенты (корни) знаменателя и, частично, числителя которых могут быть назначены произвольно, практически, в соответствии с желаемым качеством системы управления в переходном и в установившемся режиме. Эти условия включают ограничения на относительную степень и нули желаемых передаточных функций, а также на минимальный порядок реализующей системы с частично заданной структурой и согласованными полюсами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Цыпкин Я.З.** Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 278 с.

[2] **Chen C.T.** Linear system. Theory and Design. – 3-rd ed. – New York: Oxford Univ. Press, 1999. – 334 p.

[3] **Уонэм М.** Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 376 с.

[4] **Тютиков В.В., Тарарыкин С.В.** Робастное модальное управление технологическими объектами. – Иваново: ИГЭУ, 2006. – 255 с.

[5] **Филимонов Н.Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 12. – С. 2–10.

[6] **Гайдук А.Р.** Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 1. – С. 11–16.

[7] **Ким Д.П.** Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2007. – 310 с.

[8] **Гайдук А.Р.** Принципы построения и аналитический синтез систем автоматического управления минимальной сложности с управлением по состоянию и воздействиям: дис. … д-ра техн. наук. – СПб., 1987.

[9] **Воевода А.А.** Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сб. науч. тр. НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.

[10] **Гайдук А.Р.** Абсолютно инвариантное управление силовой установкой летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 11. – С. 65–68.

[11] **Вороной В.В.** Краткий обзор методов синтеза регуляторов пониженного порядка // Сб. науч. тр. НГТУ. – 2010. – № 4 (62). – С. 25–34.

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – теория систем автоматического управления, анализ и синтез. Имеет более 250 публикаций. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Гуренко Борис Викторович, магистр техники и технологии, аспирант кафедры электротехники и робототехники Южного федерального университета. Основное направление научных исследований – управление движением, подводные роботы. Имеет более 6 публикаций. E-mail: boris.gurenko@gmail.com

Плаксиенко Елена Анатольевна, доцент. Основное направление научных исследований – управление в технических и экономических системах. Имеет более 40 публикаций. E-mail: pumkad@mail.ru

*Design of control systems with a partially specified structure based on desirable performance**

A.R. GAIDUK[1], *B.V. GURENKO*[3], *E.A. PLAKSIENKO*[2]

[1] *Southern Federal University, 44 Nekrasovskiy Lane, Taganrog, 347928, Russian Federation, D.Sc. (Eng.), professor, e-mail: gaiduk_2003@mail.ru*

[2] *Southeren Federal University, 44 Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russian Federation, post-graduate student, e-mail: boris.gurenko@gmail.com*

[3] *Taganrog Institute of Management and Economics, 45, Petrovskaya Street, Taganrog, 347928, Russian Federation, senior lecturer, e-mail: pumkad@mail.ru*

Transfer functions are frequently used in designing plant control systems to provide the necessary performance. In doing so transfer functions are to be formed not only according to the desirable performance, but also with regard to conditions of physical realizability of these functions. The known conditions of physical realizability of the transfer functions by control systems with a partially specified structure are necessary, but not sufficient. Therefore when these conditions are applied, the design problem either has no analytical solution, or a derived equation of the control device cannot be accurately realized. In the latter case small time constants are usually added to the equation of the control device, which results in the approximate solution of the problem of the control system design and reduction in the stability factor of the closed system. In this work the necessary and sufficient conditions are proposed. They are received on the basis of polynomials equations which connect the structure and parameters of the closed system with the structure and parameters of the plant and the control device. The equation of the control device is formed on the basis of the control principle by output and impacts. The realizability conditions of the transfer functions of the systems with a partially prescribed structure given below provide the following possibilities for solving the problem of the closed control systems design. First, it is possible to appoint all factors of the denominator and, in part, numerators of transfer functions of the synthesized system according to the desirable performance of the control process. Second, the equations determining the structure and parameters of the control device are solvable, and the equations of the control device are physically realized in the given conditions. The necessity of taking into account the above conditions in the problems of the closed control system design as well as their efficiency are shown on concrete examples of the control system design and, in particular, in terms of the specified direct performance values of a control system.

Keywords: control system, plant, control device, operator, transfer function, order, structure, parameter, connection equation, realizability condition, direct performance

REFERENCES

[1] Tsypkin Y.Z. *Teoreticheskie osnovy avtomaticheskikh sistem* [Theory bases of automatic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 278 p.

[2] Chen C.T. *Linear system. Theory and Design.* 3rd ed. New York, Oxford University Press Publ., 1999. 334 p.

[3] Wonham W.M. *Linear multivariable systems: a geometric approach*. 2rd ed. New York, Springer-Verlag Publ., 1978. 315 p. (Russ. ed.: Uonem M. *Lineinye mnogomernye sistemy upravleniia. Geometricheskii podkhod*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 376 p.).

[4] Tyutikov V.V., Tararykin S.V. *Robustnoe modal'noe upravlenie tekhnologicheskimi ob"ektami* [Robust modal control of the technological plants]. Ivanovo, ISPU Publ., 2006. 255 p.

[5] Filimonov N.B. Problema kachestva protsessov upravleniya: smena optimizatsionnoj paradigmy [The Problem of Quality of Control Processes: Change of an Optimizing Paradigm]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, automation, control*, 2010, no. 12, pp. 2-10.

[6] Gaiduk A.R. Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniia po peredatochnym funktsiiam [Synthesis of automatic control systems on the transfer functions]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 1980, vol. 41, no. 1, pp. 11-16.

[7] Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo* upravleniia. *T. 1. Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 310 p.

[8] Gaiduk A.R. *Printsipy postroeniia i analiticheskii sintez sistem avtomaticheskogo upravleniia minimal'noi slozhnosti s upravleniem po sostoianiiu i vozdeistviiam*. Diss. dokt. teh. nauk [Construction principles and analytical synthesis of automatic control systems of minimum complexity with control on status and impacts. Dr. tech. sci. diss.]. St. Petersburg, 1987.

[9] Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoj sistemy: polinomialynyj metod sinteza dvukhkanalynoyj sistemy [Stabilization of two-mass system: polynomial method for design of two-channel system]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU* [Collection of Scientific Papers of Novosibirsk State Technical University], 2009, no. 58, vol. 4, pp. 121-124.

[10] Gaiduk A.R. Absolyutno invariantnoe upravlenie silovoj ustanovkoj letatel'nogo apparata [Absolutely invariant control of the power-plant of a flying device]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, automation, control*, 2010, no. 11, pp. 65-68.

[11] Voronoy V.V. Kratkij obzor metodov sinteza pegulyatorov ponizhennogo poryadka [The short review of synthesis methods of the lowered order regulators]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU* [Collection of Scientific Papers of Novosibirsk State Technical University], 2010, vol. 62, no. 4, pp. 25-34.

* *Manuscript received on 14 January 2014.*