*ISSN 2782-2001*
*Системы анализа*
*и обработки данных*
*том 85, № 1, 2022, с. 83–92*

*http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Analysis and data*
*processing systems*
*Vol. 85, No. 1, 2022, pp. 83–92*

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND MANAGEMENT

УДК 519.873

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-83-92

# Оценивание параметров дифференциального уравнения, описывающего процессы запуска и останова насосного агрегата*

**А.В. МАЙСТРЕНКО [a], А.А. СВЕТЛАКОВ [b]**

*634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 40, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники*

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *svetlakov.38@mail.ru*

В настоящей статье приведены результаты исследования различных переходных режимов насосного агрегата нефтеперекачивающей станции, в частности, токи статора приводного электродвигателя и скоростной характеристики вращения его ротора. Характеристики насосного агрегата могут весьма существенно изменяться в процессе работы. Это обусловлено тем, что параметры перекачиваемой нефти практически непрерывно изменяются, также происходит физический износ деталей насосного агрегата, особенно подвержено износу рабочее колесо. Входной и выходной переменными данного объекта являются, соответственно, время и угловая скорость вращения его ротора. Совокупность приведенных выше факторов оказывает значительное влияние на изменение скорости вращения ротора в процессе эксплуатации, что может отрицательно сказаться на работе системы в целом. С целью устранения влияния внешних факторов на работу насосного агрегата зависимость между входной и выходной переменными была описана обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Цель работы заключается в том, чтобы проиллюстрировать возможности и «технологию» применения алгоритма чувствительности для оценивания параметров данного уравнения и показать, что предложенные метод и реализующий его численный алгоритм позволяют вполне успешно решать рассматриваемую задачу, и они пригодны для решения многих подобных прикладных задач, связанных с оцениванием параметров обыкновенных дифференциальных уравнений.

По результатам работы предлагаемые метод и реализующий его численный алгоритм показали свою работоспособность и могут быть в дальнейшем использованы для автоматизации реальных объектов управления в различных отраслях науки и техники.

**Ключевые слова**: дифференциальное уравнение, алгоритм чувствительности, метрика, объект управления, асинхронный электродвигатель переменного тока, математическая модель, экстремальная задача, частоты вращения ротора

---

* *Статья получена 11 мая 2021 г.*

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2], для описания количественных связей между переменными, характеризующими поведение динамических объектов во времени, часто применяются всевозможные классы дифференциальных уравнений [3–5]. Выбор класса такого уравнения должен учитывать известные теоретические представления в физике, химии, экономике и т. д., а также основополагающие процессы и механизмы, определяющие функционирование изучаемого объекта [6–9]. Определение значений параметров выбранного класса дифференциального уравнения при этом сводится к задаче минимизации какой-либо метрики, характеризующей расстояние между измеренными значениями выхода объекта и решениями дифференциального уравнения, вычисленными при тех же значениях входа объекта, соответствующих измеренным значениям его выхода [10–12].

Для нахождения значений параметров дифференциального уравнения воспользуемся алгоритмом чувствительности [13], суть которого приводится ниже.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве исходных данных в выполненных нами исследованиях были использованы данные, полученные путем непосредственных измерений на реальном объекте в лаборатории НИИ ЭлеСи. На рис. 1–3 приведены зависимости момента, скорости вращения ротора и токов статора от времени приводного электродвигателя насосного агрегата (НА) при различных режимах его эксплуатации. Для исследований и моделирования были использованы файлы данных формата dat.

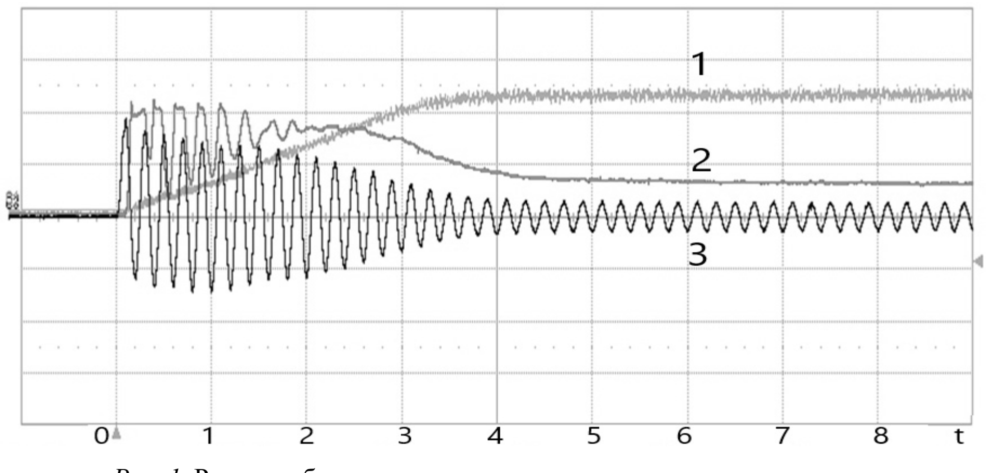


*Рис. 1.* Режим работы электродвигателя с номинальным моментом

*Fig. 1.* The operating mode of the electric motor with a rated torque

На рис. 1–3 цифрой 1 обозначена зависимость скорости вращения ротора НА от времени $\omega(t)$, цифрой 2 – переменное напряжение питания электродвигателя $u(t)$ и цифрой 3 – ток статора $i(t)$.

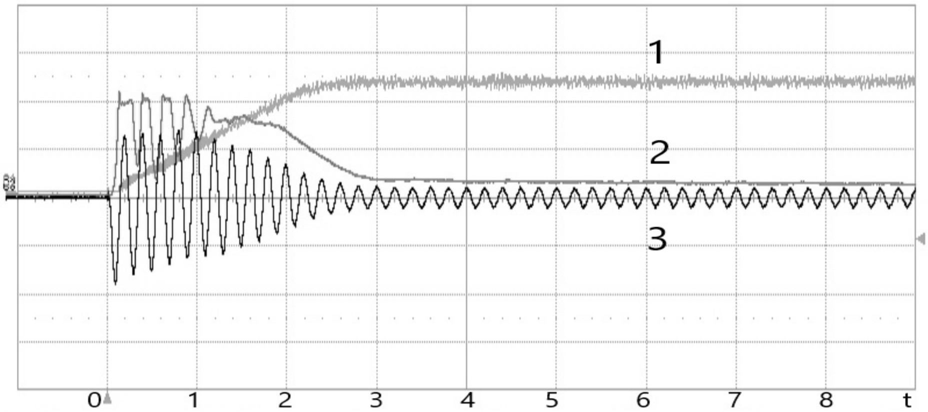


*Рис. 2.* Режим работы электродвигателя на холостом ходу

*Fig. 2.* The mode of operation of the electric motor at idle speed

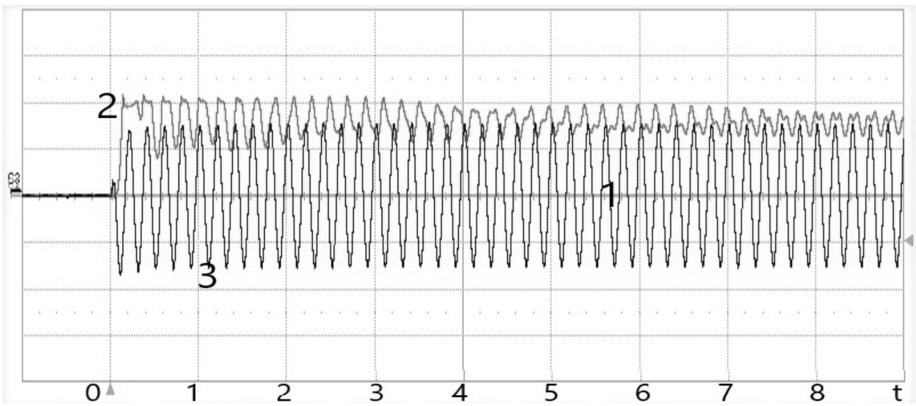


*Рис. 3.* Режим работы электродвигателя на упор

*Fig. 3.* The mode of operation of the electric motor at the stop

Кроме отмеченного выше, в качестве исходной информации были использованы некоторые данные, содержащиеся в руководящих документах (РД), определяющих требования к проектированию магистральных нефтепроводов.

## 2. ВЫБОР КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения поставленной задачи с учетом существующих ограниченных возможностей по сбору измеренных значений частоты вращения ротора приводящего электродвигателя или, что то же самое, вала насоса и тока статора было решено использовать один из классов дифференциальных уравнений.

Выбор дифференциального уравнения для моделирования процесса запуска и выхода на установившийся режим асинхронного электродвигателя, приводящего в действие насосный агрегат, осуществлялся исходя из физических особенностей процесса и объекта. Для реализации поставленной задачи были проведены экспериментальные исследования различных классов дифференциальных уравнений, сравнительные характеристики применения которых для моделирования рассматриваемого процесса приведены в таблице. В результате проделанной работы было выбрано дифференциальное уравнение второго порядка с тремя слагаемыми (таблица), которое описывает исследуемый процесс с требуемой точностью. Определение значений параметров выбранного класса дифференциального уравнения сводилось к задаче минимизации квадратичной метрики [6].

Для реализации поставленной цели была написана программа в среде моделирования Matlab, с помощью которой были проведены все экспериментальные исследования.

**Классы дифференциальных уравнений**

**Classes of differential equations**

| Вид дифференциального уравнения | $S$, шум 0 % | $S$, шум 5 % | $S$, шум 10 % |
|---|---|---|---|
| $\frac{d\omega}{dt} = a_1\omega + a_2 u(t) + \varepsilon(t)$ | 0,0042 | 0,01 | 0,08 |
| $\frac{d\omega}{dt} = a_1\omega + \varepsilon(t)$ | 0,0045 | 0,01 | 0,08 |
| $\frac{d^2\omega}{dt^2} = a_1\frac{d\omega}{dt} + a_2\omega + a_3 u(t) + \varepsilon(t)$ | 0,0037 | 0,008 | 0,04 |
| $\frac{d^2\omega}{dt^2} = a_1\frac{d\omega}{dt} + a_2\omega + \varepsilon(t)$ | 0,0038 | 0,0082 | 0,041 |

В таблице $S$ – метрика между измеренными и вычисленными значениями частоты вращения ротора при различных уровнях шумов; $u(t)$ – переменное напряжение питание электродвигателя, при моделировании данная функция использовалась еще и как единичная функция $u(t) = 1$; $\varepsilon(t)$ – функция, характеризующая внешнее возмущение, задавалась с помощью специальной программы, генерирующей шумы с нормальным законом распределения.

Объектом исследования является разгонная характеристика электродвигателя. Входной и выходной переменными объекта являются время и скорость вращения ротора двигателя, связь между данными переменными описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, определяемым с точностью до набора его постоянных коэффициентов, численные значения которых нам неизвестны. Для нахождения этих коэффициентов была сформулирована следующая вычислительная задача.

Во-первых, в результате экспериментов было установлено, что скорость вращения ротора электродвигателя $\omega$ от времени $t$ с высокой точностью описывается при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = a_1\frac{d\omega}{dt} + a_2 w + \varepsilon(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon(t)$ – функция, определяющая внешнее воздействие.

Во-вторых, предполагалось, что существует конечное число $N$ пар измерений вида

$$\tilde{\omega}_i,\, t_i,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{2}$$

где $\tilde{\omega}_i$ – значение скорости вращения вала в момент времени $t_i$ .

В-третьих, для оценки ошибки описания измерений уравнением (1) воспользуемся хорошо известной евклидовой метрикой $S$, вычисляемой в соответствии с соотношением

$$S=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{\omega}_i-\omega(\vec{a},\ t_i)\right)^2\right]^{1/2}, \tag{3}$$

где $\tilde{\omega}_i$ и $\omega\left(\vec{a},\ t_i\right)$ – соответственно измеренные и вычисленные значения частоты вращения ротора электродвигателя.

Как непосредственно видно из равенства (3), метрика $S$ является функцией оценок $\vec{a}$ неизвестных параметров уравнения (1), и, таким образом, ее использование позволяет свести задачу отыскания данных оценок к решению экстремальной задачи вида

$$\vec{a}=\arg\min S. \tag{4}$$

В равенстве (4) символ $\arg\min$ означает, что необходимо выбирать такие оценки $\vec{a}$ , при которых метрика $S$ принимает минимальное значение. Выбор именно таких оценок $\vec{a}$ в оговоренных выше условиях является, очевидно, вполне разумным и логически обоснованным.

## 3. НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Для решения экстремальной задачи (4) применим хорошо известный алгоритм чувствительности, основанный на использовании функций чувствительности $W_i(\vec{a},\ t)$ по оценкам параметров $a_i$ , определяемых соотношениями

$$W_i(\vec{a},\ t)=\frac{\partial\omega(\vec{a},\ t)}{\partial a_i},\ \ i=\overline{1,4}. \tag{5}$$

Данный алгоритм является итерационным, на каждой итерации выполняется последовательность численных операций, необходимых для формирования и решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [14, 15] относительно оценок $\vec{a}$ . Допустим, что уже выполнено $l-1$ итераций и вектор оценок $\vec{a}^{l-1}$ вычислен. Представим вектор новых оценок параметров $\vec{a}^l$ соотношением вида

$$\vec{a}^l=\vec{a}^{l-1}+\Delta\vec{a}^l, \tag{6}$$

где $\Delta\vec{a}^l$ – вектор поправок оценок $\vec{a}^{l-1}$.

Разложим функцию $\omega(\vec{a}^{\,l},\,t)$ в окрестности значений $\vec{a}^{\,l-1}$ в ряд Тейлора, ограничившись линейным приближением. В результате получим

$$w(\vec{a}^{\,l},\,t) \approx w(\vec{a}^{\,l-1},\,t) + \frac{\partial\omega(\vec{a}^{\,l-1},\,t)}{\partial a_1}\Delta a_1 + \ldots + \frac{\partial\omega(\vec{a}^{\,l-1},\,t)}{\partial a_4}\Delta a_4,\;\; i=\overline{1,N}. \quad (7)$$

Воспользовавшись соотношениями (5), представим выражение (7) равенством вида

$$w(\vec{a}^{\,l},\,t) \approx w\left(\vec{a}^{\,l-1},\,t_i\right) + W_1\left(\vec{a}^{\,l-1},\,t_i\right)\Delta a_1 + \ldots + W_4\left(\vec{a}^{\,l-1},\,t_i\right)\Delta a_4,\;\; i=\overline{1,4}. \quad (8)$$

Проанализировав равенство (8), легко увидеть следующее:

1) оно является линейным уравнением относительно поправок $\Delta\vec{a}^{\,l}$ при любых значениях аргумента *t*;

2) если функция $\omega(\vec{a}^{\,l-1},\,t)$ и функции чувствительности $W_i(\vec{a}^{\,l-1},\,t)$ известны, можно скомпилировать достаточно большое количество СЛАУ относительно поправок $\Delta\vec{a}^{\,l}$.

Одну из таких СЛАУ можно получить, если в качестве ее решения использовать поправки $\Delta\vec{a}^{\,l}$, являющиеся решением экстремальной задачи (4). Для этого достаточно: 1) заменить в (3) значения $\omega\left(\vec{a},\,t_i\right)$ правыми частями равенств (6); 2) вычислить производные полученной функции по поправкам $\Delta a_i^l$, $i=\overline{1,4}$, и производные $\partial S\big/ da_i^l$ при этом приравнять нулю.

Выполнив все расчеты, получим СЛАУ вида

$$B\Delta\vec{a}^{\,l} = \Delta\omega^l, \quad (9)$$

где $\Delta\omega^l$ – четырехмерный вектор и матрица *B* размером $4 \times 4$, определяемые равенствами:

$$\Delta\omega^l = (W_l)^T\,\Delta\vec{a}^{\,l}; \quad (10)$$

$$B = (W_l)^T\,W_l, \quad (11)$$

где $W_l$ – матрица, элементы которой вычисляются в соответствии с равенствами

$$w_{ij} = \frac{\partial\omega\left(a^{l-1},\,t_i\right)}{\partial a_j},\;\; i=\overline{1,N},\;\; j=\overline{1,4}. \quad (12)$$

Здесь $w_{ij}$ – значения функций чувствительности $W_j$ в момент времени $t_i$; *T* – символ операции транспонирования векторов и матриц.

Поскольку оценки $\vec{a}^{\,l-1}$ известны, заменим ими неизвестные коэффициенты уравнения (1), задав при этом начальные условия. В результате получим задачу Коши, для ее решения воспользуемся хорошо известным методом Рунге – Кутты. Этим же методом можно вычислить и функции чувствительности $W_i(\vec{a}^{\,l-1},\,t)$, $i=\overline{1,4}$, и, таким образом, получить все исходные данные, необходимые для формирования СЛАУ. Решив полученную СЛАУ, будем иметь поправки $\Delta\vec{a}^{\,l}$ и, воспользовавшись равенством (6), можем вычислить новые оценки $\vec{a}^{\,l}$. И на этом *l*-ю итерацию решения задачи (3) заканчиваем.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 4 приведены результаты экспериментальных исследований, характеризующие точность и работоспособность синтезированной математической модели; изображена зависимость скорости вращения вала насосного агрегата ω от времени $t$ и соответствующая ей оценка, вычисленная с помощью предложенного алгоритма значения коэффициентов уравнения (1):

$$a_1 = -20{,}1492;\ a_2 = -297{,}1612;\ a_3 = 647{,}2839;\ a_4 = 1499{,}2696.$$

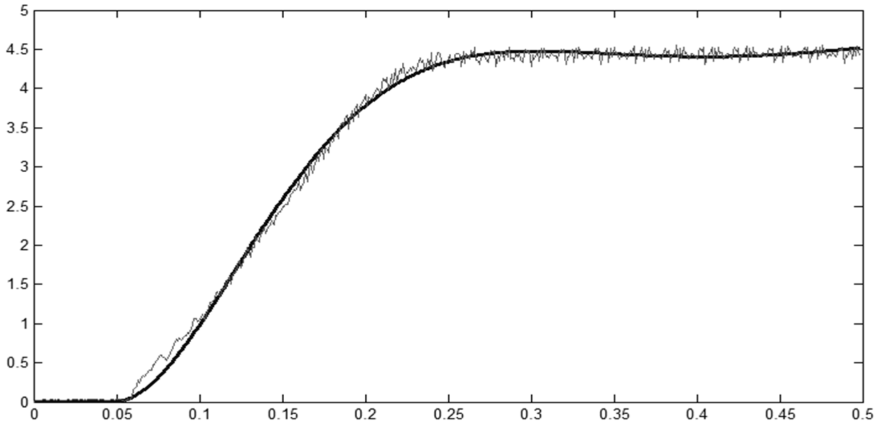


*Рис. 4.* Результаты моделирования по $u(t)$

*Fig. 4.* Simulation results for $u(t)$

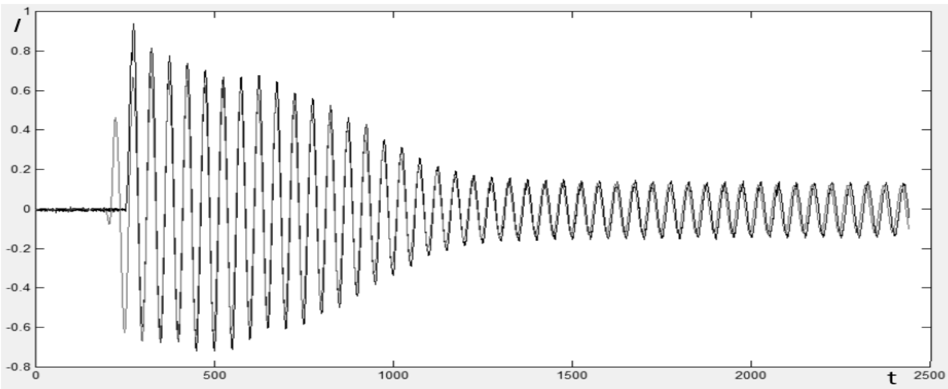


*Рис. 5*. Результаты моделирования по $i(t)$

*Fig. 5.* Simulation results for $i(t)$

Выбор дифференциального уравнения для моделирования токов статора приводного электродвигателя насосного агрегата осуществлялся исходя из тех же физических особенностей процесса и объекта, но применительно к данной конкретной задаче. Взяв за основу подход, описанный в предыдущем разделе, удалось построить математическую модель, которая с достаточной точностью описывает токи статора приводного электродвигателя, результаты экспериментальных исследований для этой части работы приведены на рис. 5. Математическая модель при этом имела следующий вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = a_1 \frac{di}{dt} + a_2 i + a_3 u(t) + \varepsilon(t), \tag{13}$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$ – вычисляемые коэффициенты уравнения; $u(t)$ – переменное напряжение питание электродвигателя, которое при моделировании использовалось и как функция времени, и как единичная функция; $\varepsilon(t)$ – функция, характеризующая внешнее возмущение, задавалась с помощью специальной программы, генерирующей шумы с нормальным законом распределения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные выше результаты показывают, что предложенные метод и реализующий его численный алгоритм позволяют вполне успешно решать рассматриваемую задачу, и они пригодны для решения многих подобных прикладных задач, связанных с оцениванием параметров обыкновенных дифференциальных уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 680 с.

2. *Юревич Е.И.* Теория автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 560 с.

3. *Васин В.В.* Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty,\infty)$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1383–1389.

4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 286 с.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: учебник для вузов. В 2 ч. Ч. 1. – СПб.: Лань, 2001. – 440 с.

6. *Майстренко А.В.*, *Светлаков А.А.* Косвенное измерение расхода жидкости, перекачиваемой насосными агрегатами // Доклады ТУСУРа. – 2014. – № 4 (34). – С. 215–220.

7. *Майстренко А.В.*, *Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов в реальном масштабе времени с применением скользящей квадратичной аппроксимации // Омский научный вестник. – 2006. – № 7 (43). – С. 110–113.

8. *Майстренко А.В.*, *Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование сигналов на основе скользящей квадратичной аппроксимации и его применение в синтезе ПИД-регуляторов аппроксимации // Омский научный вестник. – 2016. – № 1 (145). – С. 73–77.

9. *Жабо В.В., Уваров В.В.* Гидравлика и насосы. – 2-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 327 с.

10. *Тихонов А.Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 591–594.

11. *Майстренко А.В.*, *Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Регуляризация простейшего алгоритма цифрового дифференцирования сигналов аппроксимации // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 4 (25). – С. 53–65.

12. *Майстренко А.В.*, *Светлаков А.А., Старовойтов Н.В.* Цифровое дифференцирование измеряемых сигналов с применением интегральных уравнений В. Вольтерра и его регуляризация // Омский научный вестник. – 2013. – № 2 (120). – С. 308–312.

13. *Томович Р.*, *Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. – М.: Советское радио, 1972. – 240 с.

14. *Ильин В.А.* Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.

15. *Cruceanu S.* Regularisation pour les problemes a operateurs monotones et la methode de Galerkine // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1971. – Vol. 12, N 1. – P. 1–13.

*Майстренко Андрей Васильевич*, кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 50 печатных работ и учебных пособий. E-mail: maestro67@mail.ru

*Светлаков Анатолий Антонович*, доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерные системы в управлении и проектировании» Томского государственного университета автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. Основное направление научных исследований – автоматизация технологических процессов. Имеет более 200 печатных работ и учебных пособий. E-mail: svetlakov.38@mail.ru

*Maistrenko Andrey V.*, PhD. (Eng.), associate professor at the Department of Computer Systems in Management and Design of Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 50 publications and teaching manuals. E-mail: maestro67@mail.ru

*Svetlakov Anatoly A.*, D.Sc. (Eng.), professor, Department of Computer Systems in Management and Design of Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics. His research interests are currently focused on automation of technological processes. He has more than 200 publications and teaching manuals. E-mail: svetlakov.38@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-83-92

## *Estimation of parameters of the differential equation describing the processes of starting and stopping the pumping unit**

*A.V. MAISTRENKO* [a], *A.A. SVETLAKOV* [b]

*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russian Federation*

[a] *maestro67@mail.ru* [b] *svetlakov.38@mail.ru*

**Abstract**

This article presents the results of the study of various transient modes of the pumping unit of an oil pumping station, in particular, the stator currents of the drive motor and the speed characteristic of its rotor rotation. The characteristics of the pumping unit can change quite significantly during operation. This is due to the fact that the parameters of the pumped oil change almost continuously, physical wear of the parts of the pumping unit also occurs, and the impeller is especially susceptible to wear. The input and output variables of this object are, respectively, the time and the angular velocity of rotation of its rotor. The combination of the above factors has a significant impact on the change in the speed of rotation of the rotor during operation, which can adversely affect the operation of the system as a whole. In order to eliminate the influence of external factors on the operation of the pumping unit, the relationship between the input and output variables was described by an ordinary differential equation with constant coefficients. The purpose of this work is to illustrate the possibilities and "technology" of applying the sensitivity algorithm for estimating the parameters of a given equation and to show that the proposed method and the numerical algorithm that implements it allow us to quite successfully solve the problem under consideration and they are suitable for solving many similar applied problems related to estimation of parameters of ordinary differential equations.

Based on the results of the work, the proposed method and the numerical algorithm that implements it have shown their efficiency and can be further used to automate real control objects in various fields of science and technology.

**Keywords**: differential equation, sensitivity algorithm, metric, controlled object, asynchronous AC motor, mathematical model, extremal problem, rotor speed

* *Received 11 May 2021.*

## REFERENCES

1. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London, John Wiley and Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).

2. Yurevich E.I. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control]. 4th ed., rev. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2016. 560 p.

3. Vasin V.V. Ob ustoichivom vychislenii proizvodnoi v prostranstve $C(-\infty,\infty)$ [The stable evaluation of a derivative in space $C(-\infty, \infty)$]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1973, vol. 13, no. 6, pp. 1383–1389. (In Russian).

4. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1979. 286 p.

5. Fikhtengol'ts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. V 2 ch. Ch. 1 [Fundamentals of mathematical analysis. Pt. 1]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2001. 440 p.

6. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A. Kosvennoe izmerenie raskhoda zhidkosti perekachivaemoi nasosnymi agregatami [The indirect measurement of oil flow rate, delivered with a pump unit]. *Doklady TUSUR = Proceedings of TUSUR University*, 2014, no. 4 (34), pp. 215–220.

7. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov v real'nom masshtabe vremeni s primeneniem skol'zyashchei kvadratichnoi approksimatsii [Digital differentiation of signals in real time with moving square approximation]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2006, no. 7 (43), pp. 110–113.

8. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie signalov na osnove skol'zyashchei kvadratichnoi approksimatsii i ego primenenie v sinteze PID-regulyatorov approksimatsii [Digital differentiation signals based on moving quadratic approximation and its application in the synthesis of PID-regulators]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2016, no. 1 (145), pp. 73–77.

9. Jabo V.V., Uvarov V.V. *Gidravlika i nasosy* [Hydraulics and pumps]. 2nd ed., rev. Moscow, Energoatomizdat, 1984. 327 p.

10. Tikhonov A.N. O nekorrektnykh zadachakh lineinoi algebry i ustoichivom metode ikh resheniya [On incorrect problems of linear algebra and a stable method for their solution]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1965, vol. 163, no. 3, pp. 591–594. (In Russian).

11. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Regulyarizatsiya prosteishego algoritma tsifrovogo differentsirovaniya signalov [Regularization of the elementary algorithm of digital differentiation of signals]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University*, 2006, no. 4 (25), pp. 53–65.

12. Maistrenko A.V., Svetlakov A.A., Starovoitov N.V. Tsifrovoe differentsirovanie izmeryaemykh signalov s primeneniem integral'nykh uravnenii V. Vol'terra i ego regulyarizatsiya [Digital differentiation of measured signals with application of the integrated equations of V. Volterra and its regularization]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2013, no. 2 (120), pp. 308–312.

13. Tomović R., Vukobratović M. *Obshchaya teoriya chuvstvitel'nosti* [General sensitivity theory]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1972. 240 p. (In Russian).

14. Il'in V.A. *Osnovy matematicheskogo analiza*. V 2 ch. Ch. 1 [Fundamentals of mathematical analysis. In 2 pt. Pt. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 648 p.

15. Cruceanu S. Regularisation pour les problemes a operateurs monotones et la methode de Galerkine. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1971, vol. 12, no. 1, pp. 1–13. (In French).

Для цитирования:

*Майстренко А.В., Светлаков А.А.* Оценивание параметров дифференциального уравнения, описывающего процессы запуска и останова насосного агрегата // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 1 (85). – С. 83–92. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-83-92.

For citation:

Maistrenko A.V., Svetlakov A.A. Otsenka parametrov differentsial'nogo uravneniya, opisyvayushchego protsessy zapuska i ostanova nasosnogo agregata [Estimation of parameters of the differential equation describing the processes of starting and stopping the pumping unit]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 1 (85), pp. 83–92. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-1-83-92.

*ISSN 2782-2001, http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Analysis and data processing systems*
*Vol. 85, No 1, 2022, pp. 83–92*