

УДК 532.595.2

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-59-74

Численное моделирование явления гидроудара с учетом гидравлического трения трубопровода методом контрольных точек^{*}

А.М. КЛЕР^а, Д.В. АПАНОВИЧ^б

664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, Институт систем энергетики им.
Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук

^а kler@isem.irk.ru ^б dvapan@gmail.com

Расчеты динамических процессов в трубопроводе необходимы для моделирования процессов движения жидкости в трубопроводе, к примеру, для прогнозирования нагрузок на трубопровод при движении в нем волн сжатия и разрежения. Эти задачи сводятся к решению систем уравнений в частных производных. Расчет явления без учета гидравлического трения может быть проведен методом характеристик, однако расчет с учетом сил трения сложен для известных методов, таких как метод конечных разностей, метод конечных элементов. В статье приводится краткое описание и пример использования метода контрольных точек для задачи моделирования явления гидроудара с учетом сил гидравлического трения трубопровода. Основная идея предложенного метода заключается в сведении решения указанных систем уравнений к решению задач линейного программирования. Цель настоящей работы состоит в решении задачи гидроудара с трением методом контрольных точек. Этот метод, разработанный совместно с А.С. Максимовым авторами настоящей статьи в Институте систем энергетики им Л.А. Мелентьева, показал хорошие результаты при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных теплообменника периодического действия с керамической шаровой засыпкой. Причем учитывался теплообмен внутри данных элементов. При больших значениях коэффициентов теплопроводности данная система также является жесткой, что затрудняет ее решение методами контрольных объемов, но метод контрольных точек показал хорошие результаты. Это дает основание считать его перспективным при расчетах гидравлического трения. Получены результаты моделирования гидроудара трубы, заполненной несжимаемой жидкостью, при различных коэффициентах трения. Результаты позволяют сделать численную оценку влияния коэффициента гидравлического трения на затухание колебательных процессов при гидроударе.

Ключевые слова: динамические процессы, гидроудар, математическая модель, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, линейное программирование, трубопроводы, несжимаемая жидкость, гидравлическое трение

^{*} Статья получена 23 июня 2022 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01654, <https://rscf.ru/project/22-29-01654/>.

ВВЕДЕНИЕ

Расчеты стационарных и нестационарных режимов работы ряда элементов теплоэнергетических установок (теплообменников различных типов, топок, трубопроводов, турбинных ступеней и др.) сводятся к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных (СДУЧП). Основными методами решения таких систем являются методы конечных разностей (МКР), методы контрольных объемов (МКО) и методы конечных элементов (МКЭ). Одно из важных явлений для оценки надежности трубопроводов – гидроудар, остановка движения потока жидкости с последующим формированием и распространением по трубе волн сжатия [1–7].

Если при моделировании явления гидроудара не учитывать силы гидравлического трения, то можно воспользоваться методом характеристик для получения решения. Суть этого метода состоит в том, чтобы найти кривые, вдоль которых уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. Его можно решить по характеристическим кривым и преобразовать в решение исходного уравнения в частных производных. При наличии сил трения в уравнении возникает нелинейная квадратичная зависимость от скорости, направленной противоположно. С учетом сил трения зависящей от квадрата скорости и направленной противоположно направлению скорости задача становится намного сложнее.

Анализ публикаций [8–11] показывает, что эффективных методов решения задачи гидроудара с трением не существует. Это связано со значительной жесткостью систем дифференциальных уравнений в частных производных, обусловленной малой сжимаемостью воды. Из-за этого малый небаланс скоростей на участке приводит к огромным скачкам давления. Этот факт затрудняет использование метода конечных объемов и метода конечных элементов.

Цель настоящей работы состоит в решении задачи гидроудара с трением методом контрольных точек. Этот метод, разработанный авторами настоящей статьи совместно с А.С. Максимовым [12], показал хорошие результаты при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных керамического теплообменника периодического действия с учетом теплообмена внутри элементов шаровой засыпки. При больших значениях коэффициентов теплопроводности данная система также является жесткой, что затрудняет ее решение методами контрольных объемов, но метод контрольных точек показал хорошие результаты. Это дало основание считать его перспективным при расчетах гидравлического трения.

Следует отметить, что авторы не ставят задачу строгого математического обоснования метода. Внимание уделяется обоснованию эффективности предлагаемого метода на основе опыта решения сложных задач динамических расчетов элементов энергетических объектов, одна из которых представлена в статье в качестве примера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. ОБЩИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СДУЧП

При использовании МКР на расчетной области строится сетка и для ее узлов на основе исходных дифференциальных уравнений формируется подсистема алгебраических уравнений [13–16]. Частные производные заменяются соответствующими конечными разностями. Строится единая система алгебраических уравнений, являющаяся объединением подсистем алгебраических уравнений отдельных узлов сетки, и краевых условий. Следует отметить, что при этом точность решения СДУЧП сильно зависит от величин шагов сетки по пространственным координатам и по времени. Стремление поднять точность решения приводит к сокращению размеров шагов и соответственно к увеличению числа узлов сетки и размерности системы алгебраических уравнений. Во многих случаях эта размерность становится столь большой, что система не может быть решена как единое целое без использования тех или иных методов декомпозиции. Снижения размерности системы можно добиться использованием сетки с переменными шагами, но это сильно усложняет алгоритм решения задачи, что особенно ощутимо для расчетного пространства со сложной геометрией.

МКО наиболее широко используется в вычислительной гидрогазодинамике, поскольку в таких задачах дифференциальные уравнения отражают законы сохранения массы, энергии и импульса [17–20]. Поэтому данный метод применим к большинству задач тепломассообмена. В соответствии с МКО расчетная область разбивается на контрольные объемы, для которых допустима неправильная геометрическая форма. Для каждого объема формируются балансовые уравнения, учитывающие обмен данного объема с соседними объемами массой, энергией и импульсом. Полученные уравнения являются алгебраическими. Производные в них заменяются на конечные разности, определяемые по значениям соответствующих параметров в геометрических центрах смежных контрольных объемов. Кроме того, в уравнения входят площади граничных поверхностей между смежными контрольными объемами. Причем балансы массы, энергии и импульса соблюдаются для контрольных объемов вне зависимости от места расположения разделяющих смежные объемы поверхностей. МКО позволяют более точно и более просто, чем МКР, представить сложную расчетную область. К недостаткам как МКР, так и МКО следует отнести невозможность расчета искомых переменных в точках, не являющихся узлами сетки или центрами контрольных объемов.

МКЭ – комплекс методов, основанный на разбиении расчетной области на достаточно большое число конечных элементов простой формы (как правило, многогранников). Первоначально предназначались для статических расчетов строительных конструкций [21–28]. На каждом элементе выделяются узлы. В первую очередь это вершины многогранников, однако возможен выбор в качестве узлов и других точек. Для каждого элемента для всех искомых из системы дифференциальных уравнений функций ищутся линейные комбинации заранее заданных базисных функций, связывающие пространственные координаты и время с соответствующей искомой переменной. Совокупность таких комбинаций для всех элементов должна отвечать следующим условиям: достигается минимум суммы квадратов невязок для всех узлов всех конечных элементов (невязки получаются при подстановке в дифференциальные урав-

нения нужных производных соответствующих линейных комбинаций базисных функций); равенство искомым переменных в вершинах смежных элементов при определении их из линейных комбинаций базисных функций этих элементов; равенство расчетных краевых условий при определении их на основе соответствующих линейных комбинаций базисных функций. Следует отметить, что при согласованном подборе числа конечных элементов, числа узлов в элементах и числа базисных функций можно добиться того, что невязки в узлах элементов при соблюдении указанных условий окажутся равными нулю, т. е. минимума достигает сумма квадратов невязок. При этом количество невязок должно быть равно количеству искомым коэффициентов линейных разложений базисных функций. Указанные условия порождают систему алгебраических уравнений, решение которой дает линейные комбинации базисных функций, позволяющие определить искомые переменные в любой точке расчетной области, что является несомненным достоинством МКЭ. Следует отметить, что если исходная СДУЧП линейная, то и системы алгебраических уравнений, к которым сводится приближенное решение СДУЧП, будут линейными.

При решении многих нестационарных задач с использованием МКР, МКО и МКЭ получающиеся системы алгебраических уравнений становятся чрезвычайно большими, и для их решения используются методы декомпозиции, состоящие, как правило, в разделении решения по пространственным координатам и по времени. Выделяется подсистема уравнений, относящаяся к одному моменту времени. После ее решения находят частные производные искомым величин по времени. С использованием этих производных определяют значения соответствующих величин в следующий момент времени (на следующем временном слое). При этом используют различные явные и неявные разностные схемы.

В рассмотренных методах условием малого отклонения приближенного решения СДУЧП от ее точного решения является малость величин характерных геометрических размеров (шаги сетки, максимальные размеры контрольных объемов и конечных элементов). Наиболее обоснованным численным критерием такого отклонения (качества приближенного решения) является значение максимальной по модулю невязки во всех рассматриваемых (контрольных) точках расчетной области. Однако ни в одном из рассмотренных методов данный критерий не используется.

С учетом указанных недостатков МКР, МКО и МКЭ предлагается более эффективный, с нашей точки зрения, метод решения СДУЧП. Он основан на поиске таких значений коэффициентов линейных разложений базисных функций, представляющих зависимости искомым из СДУЧП функций от пространственных координат и времени, при которых минимального значения достигает максимальная по модулю невязка, определяемая среди всех невязок в заданных контрольных точках расчетной области. Переход от минимизации суммы квадратов невязок к минимизации максимальной по модулю невязки значительно улучшает качество приближенного решения и позволяет перейти от малых конечных элементов к достаточно крупным блокам, в пределах каждого из которых ищутся свои линейные разложения базисных функций. В основе метода лежит назначение в пределах расчетной области контрольных точек, в каждой из которых определяются невязки. Важно подчеркнуть, что количество невязок может и должно быть больше (причем существенно) количества коэффициентов линейных разложений базисных функций.

Все контрольные точки расчетной области делятся на три группы. Первая группа – это внутренние контрольные точки блоков. В данных точках рассчитываются только невязки исходных дифференциальных уравнений, получающиеся после подстановки в них искомым функций и их частных производных, определяемых из линейных разложений базисных функций. Вторая группа – это точки, лежащие на границах блоков. В этих точках невязки дифференциальных уравнений рассчитываются для каждого смежного блока с использованием его линейных разложений. Кроме того, определяются невязки между искомыми функциями смежных блоков. К третьей группе относятся контрольные точки, лежащие на границах расчетной области. В этих точках состав невязок дифференциальных уравнений дополняется невязками, определяющими точность приближения полученного решения к начальным и граничным условиям. В частности, определяются невязки между заданными значениями величин на границах расчетной области и рассчитанными из линейных комбинаций базисных функций значениями этих величин.

Если расчетная область делится на подобласти, каждая из которых описывается своей системой дифференциальных уравнений, то на блоки делятся указанные подобласти. В точках, лежащих на границах смежных подобластей, определяются невязки между значениями тех искомым функций, которые входят в системы дифференциальных уравнений обеих подобластей.

Следует отметить, что при минимизации максимальной по модулю невязки приходится сравнивать невязки, имеющие различную размерность и различный физический смысл. Поэтому такое сравнение возможно проводить лишь между относительными невязками, получающимися при делении абсолютных невязок на их максимально допустимые значения (максимально допустимые погрешности расчета соответствующих зависимостей).

Если исходная СДУЧП является линейной, то предлагаемый метод, который можно назвать методом контрольных точек (МКТ), сводится к решению задачи линейного программирования (ЛП) [29, 30]. В противном случае необходимо решать задачу нелинейного математического программирования.

1.2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим задачу, которая описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$D^i(y_1, \dots, y_K, (y_{11})', \dots, (y_{KN})', (y_{111})'', \dots, (y_{KNN})'', \dots) = 0, \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, K,$$

где D^i – i -е дифференциальное уравнение, записанное в неявной форме; y_1, \dots, y_K – искомые функции от N переменных; $(y_{11})' = \frac{\partial y_1(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1}$, $(y_{12})' = \frac{\partial y_1(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_2}$, ..., $(y_{KN})' = \frac{\partial y_K(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N}$ – первые произ-

водные для всех N переменных и K функций; $(y_{111})'' = \frac{\partial^2 y_1(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1^2}$,
 $(y_{112})'' = \frac{\partial^2 y_1(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2}$, ..., $(y_{KNN})'' = \frac{\partial y_K(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N^2}$ – вторые производные для всех попарных сочетаний N переменных и K функций, и т. д.

Также вводятся краевые условия для функций y_1, \dots, y_K . Они описывают заданное заранее поведение решения на границе:

$$\begin{aligned} y_1(x_{ij}^{\text{bound}}) &= f_{1j}(x_{1j}^{\text{bound}}), \\ y_2(x_{ij}^{\text{bound}}) &= f_{2j}(x_{2j}^{\text{bound}}), \\ &\dots \\ y_K(x_{ij}^{\text{bound}}) &= f_{Kj}(x_{Kj}^{\text{bound}}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $i=1, \dots, K$; $j=1, \dots, B$; $x_{ij}^{\text{bound}} \in X_{ij}^{\text{bound}}$ – множество точек для функции под номером i и ее границы под номером j ; B_i – число граничных условий для функции под номером i .

Далее приведены основные положения метода.

а) Поиск решения осуществляется путем выбора базисных функций, линейная комбинация которых дает конечное решение. Коэффициенты линейного разложения при этом являются параметрами, значения которых подбираются. Кроме того, у этих функций должны легко вычисляться производные. Для наших задач в качестве базисных функций используются функции вида $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_N^{i_N}$, где x_l – l -я компонента вектора x ; i_1, i_2, \dots, i_N – показатели степени, отвечающие условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq i_j \leq S, \\ \sum_{j=1}^N i_j \leq S. \end{aligned} \quad (3)$$

Искомые функции представляются в виде

$$p(x_1, \dots, x_N; a_1, \dots, a_C) = \sum_{k=1}^C a_k x_1^{i_{1k}} \cdot x_2^{i_{2k}} \cdot \dots \cdot x_N^{i_{Nk}}, \quad (4)$$

где $C = N^{S+1}$ – число всех возможных сочетаний степеней, отвечающих условиям (4); i_{jk} – показатель степени в k -м элементе сочетания при j -й компоненте вектора x . Коэффициенты a_k являются искомыми коэффициентами линейного разложения базисных функций.

б) Далее по всей области, где ищется решение, устанавливаются контрольные точки – дискретное множество N -мерных векторов (x_1, x_2, \dots, x_N) . Эти точки должны достаточно плотно покрывать пространство поиска решения. В набор для каждой функции под номерами $i=1, \dots, K$ и соответствующих уравнениям $j=1, \dots, B_i$ входят точки для граничных условий X_{ij}^{bound} , описывающие заданное поведение функций на границе. Обозначим их количество за W_{ij}^{bound} . Также вводятся точки внутри пространства поиска для каждого уравнения $i=1, \dots, K$. Обозначим за W_{ij}^{eq} количество точек для уравнения под номером i .

в) В контрольных точках считаются невязки путем подстановки базисных функции, вычисленных во всех контрольных точках с учетом всех их производных в дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (2) и (3) и получаем абсолютные невязки для уравнений

$$D^i \left(y_1^k, \dots, y_K^k, (y_{11}^k)', \dots, (y_{K N}^k)', (y_{11}^k)'', \dots, (y_{K N}^k)'', \dots \right) = \delta_{ik}^{\text{eq}},$$

$$y_1^s - f_{1j}^s = \delta_{1js}^{\text{bound}},$$

$$y_2^s - f_{2j}^s = \delta_{2js}^{\text{bound}},$$

$$\dots$$

$$y_K^s - f_{Kj}^s = \delta_{Kjs}^{\text{bound}},$$

где $y_l^k = p_l(x_1^k, \dots, x_N^k; a_1, \dots, a_C)$, $y_l^s = p_l(x_1^s, \dots, x_N^s; a_1, \dots, a_C)$,

$$\left(y_{l n_1}^k \right) = \frac{\partial p_l(x_1^k, \dots, x_N^k; a_1, \dots, a_C)}{\partial x_{n_1}}, \quad \left(y_{l n_1 n_2}^k \right) = \frac{\partial^2 p_l(x_1^k, \dots, x_N^k; a_1, \dots, a_C)}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2}},$$

$\dots; i=1, \dots, K; l=1, \dots, K; n_1, n_2, \dots=1, \dots, N; k=1, \dots, W_i^{\text{eq}}; s=1, \dots, W_i^{\text{bound}}$.

г) Невязки получаются не нулевые, поскольку решение не точное. Чтобы сопоставлять разные по своему физическому смыслу невязки, абсолютные невязки приводятся к относительным. Для этого каждую абсолютную невязку нужно разделить на ее заранее заданную предельно допустимую величину. Объединим все невязки δ_{ik}^{eq} , $\delta_{ijs}^{\text{bound}}$ под общим символом δ_k^{abs} . В общем виде относительная невязка определяется из выражения

$$\delta_k^{\text{rel}} = \frac{\delta_k^{\text{abs}}}{\varepsilon_k^{\text{max}}}, \quad (6)$$

где δ_k^{abs} – абсолютное значение k -й невязки; δ_k^{rel} – относительное значение k -й невязки; $\varepsilon_k^{\text{rel}}$ – предельно допустимое значение k -й невязки.

д) Каждая невязка заменяется двумя ограничениями неравенств, куда входит вспомогательный параметр, который входит во все ограничения.

$$\begin{aligned} g_i^+ &= z - \delta_i^{\text{rel}} \geq 0, \\ g_i^- &= z + \delta_i^{\text{rel}} \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где z – вспомогательный параметр, причем $z \geq 0$.

Если решать задачу на минимизацию z , то использование двух неравенств (8) обеспечит «двустороннее сжатие» невязки. Если значение невязки положительное, то ее сокращение будет обеспечено за счет неравенства g^+ , а если ее значение отрицательное, то сокращение будет обеспечено за счет невязки g^- .

Если исходные дифференциальные уравнения линейные, то система равенств и неравенств (6) будет линейная.

Если базисные функции недостаточно точно отражают решение, то мы можем разделить всё пространство на блоки, в каждом из которых будет свой полином. Тогда появляются невязки на границах между блоками.

Методы расчета, подобные описанному, существуют, однако в них количество точек равняется количеству коэффициентов и задача сводится к решению системы уравнений. В нашем методе точек существенно больше, чем коэффициентов, поэтому мы допускаем в точках некоторое неравенство, в отличие от других методов, подбирающих коэффициенты разложения, где требуется строгое равенство нулю невязок.

Теперь можно определить систему ограничений, построенную на основе неравенств (8). Обозначим ее за M^Σ -мерную векторную функцию $G(z, A^\Sigma)$. Она включает в себя невязки описанных выше типов для всех контрольных точек.

В результате задача математического программирования, к которой сводится решение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных, может быть представлена в виде

$$\min_{z, A^\Sigma} z \quad (8)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} G(z, A^\Sigma) &\geq 0, \\ \underline{A}^\Sigma &\leq A^\Sigma \leq \overline{A}^\Sigma, \end{aligned}$$

где z – вспомогательный параметр; A^Σ – N^Σ -мерный вектор оптимизируемых параметров (коэффициентов полиномов всех блоков); \overline{A}^Σ , \underline{A}^Σ – векторы, элементы которых задают нижнюю и верхнюю границы компонентов вектора A^Σ . Если G – система линейных неравенств, то (8) будет задачей линейного программирования [29, 30].

Если система нелинейная, то тогда применяется метод релаксации. Данная задача состоит в том, что мы задаем в каждой контрольной точке значение скорости, по которому можно считать силу трения, а на последующей итерации уточнять скорости в точках. За несколько шагов этот процесс сходится.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯВЛЕНИЯ ГИДРОУДАРА

Рассмотрим конкретный пример применения математического моделирования к решению сложной гидродинамической задачи. Здесь рассматриваются решения гиперболических уравнений в условиях гидравлического удара, который представляет собой скачок давления в какой-либо системе, заполненной жидкостью, вызванный крайне быстрым изменением скорости потока этой жидкости за очень малый промежуток времени [1–7].

В случае идеальной жидкости решение краевой задачи о распределении давления в трубопроводе по пространственной переменной и времени сводится к интегрированию линейного гиперболического уравнения. Трудности решения краевых задач о течении реальных вязких жидкостей связаны с их нелинейностью ввиду зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от скорости. Для начала обозначим скорость ударной волны в капельной упругой жидкости, текущей в трубе с упругими стенками, т. е. скорость распространения ударной волны (волны гидравлического возмущения) задается следующим соотношением:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{\rho d}{\delta E}}}, \quad (9)$$

где ρ – плотность; k – модуль упругости жидкости; d – диаметр трубы; δ – толщина стенки трубы; E – значение модуля упругости для стенки трубы.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p(t, x)}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\lambda v |v|}{2d} \right), \\ -\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} &= c^2 \rho \frac{\partial v(t, x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

где p – давление; x – точка на трубе; t – время; v – скорость течения жидкости; λ – коэффициент гидравлического трения.

Уравнения (7) выражают зависимость давления и скорости в различных точках трубопровода на протяжении времени моделирования. Для учета нелинейности мы линеаризуем член, в который скорость входит нелинейно путем замены:

$$\frac{\lambda v |v|}{2d} = \frac{\lambda v_0 |v_0|}{2d} + \frac{\lambda (v - v_0)}{d}, \quad (11)$$

где v_0 – это скорость, которая получена на предыдущей итерации. Тем самым получим итеративный процесс, где на каждой итерации будет решаться задача линейного программирования. С течением времени процесс сойдется и линейная разность $(v - v_0)$ будет равна нулю (это и будет сигналом к остановке метода).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Расчет гидроудара проводится при следующих исходных данных:

- длина трубы – 1400 м;
- давление – 3 МПа;
- начальная скорость – 1 м/с;
- время – 8 с;
- время закрытия задвижки – 0,5 с;
- диаметр трубы – 0,5 м;
- толщина стенок – 0,02 м;
- плотность воды – 1000 кг/м^3 ;
- модуль упругости жидкости – $2030 \cdot 10^6 \text{ Па}$;
- модуль упругости материала стенки трубы – $200\,000 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Всё пространство решения делится на 400 блоков с использованием деления времени на 20 равных интервалов и длины трубопровода на 10 равных интервалов.

Общее количество контрольных точек – 96 000 для каждой из подобластей. Общее число ограничений в задаче составляет 192 000. Количество оптимизируемых параметров составляет 8001. Каждый из полиномов, входящих в 400 блоков подобласти, описывается десятью параметрами. К общему числу параметров добавляется вспомогательный параметр z . С учетом необходимости уточнения скорости было проведено 3 итерации решения задачи линейного программирования. Далее представлены рассчитанные значения давления жидкости и скорости ее течения для некоторых точек трубы (рис. 1–3) для разных значений коэффициента λ , который менялся в диапазоне от нуля до единицы. При $\lambda = 0$ трение отсутствует.

При закрытии задвижки за 0,5 с возникает скачок давления. Можно также увидеть, что при отсутствии трения $\lambda = 0$, колебания давления не затухают со временем, а возрастают по мере продвижения от точки, где подается вода (рис. 1), к точке, где стоит задвижка (рис. 3). Скорость же, напротив, имеет наибольшие колебания около точки подачи воды и жестко контролируется в точке, где стоит задвижка. По мере увеличения параметра λ можно наблюдать, что амплитуда колебаний как давления, так и скорости с течением времени падает.

При наличии трения в установившемся режиме давление у задвижки будет ниже, чем на входе. Причем чем выше трение, тем сильнее падает давление на выходе. При закрытии задвижки давление поднимается и достигает своего пика, наибольшее значение достигается при $\lambda = 0$.

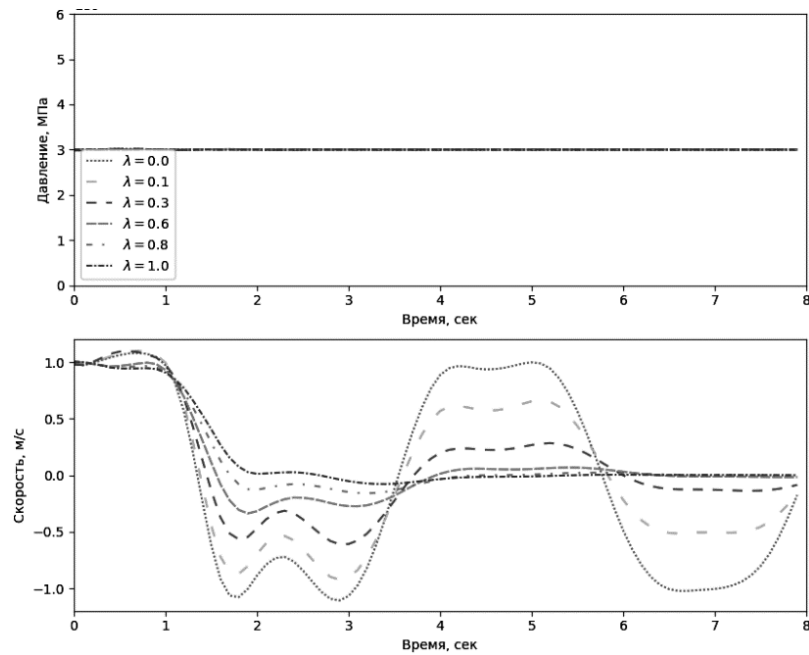


Рис. 1. Давление и скорость в точке, где подается постоянное давление, на протяжении времени моделирования

Fig. 1. Pressure and velocity at a point where constant pressure is applied during the simulation time

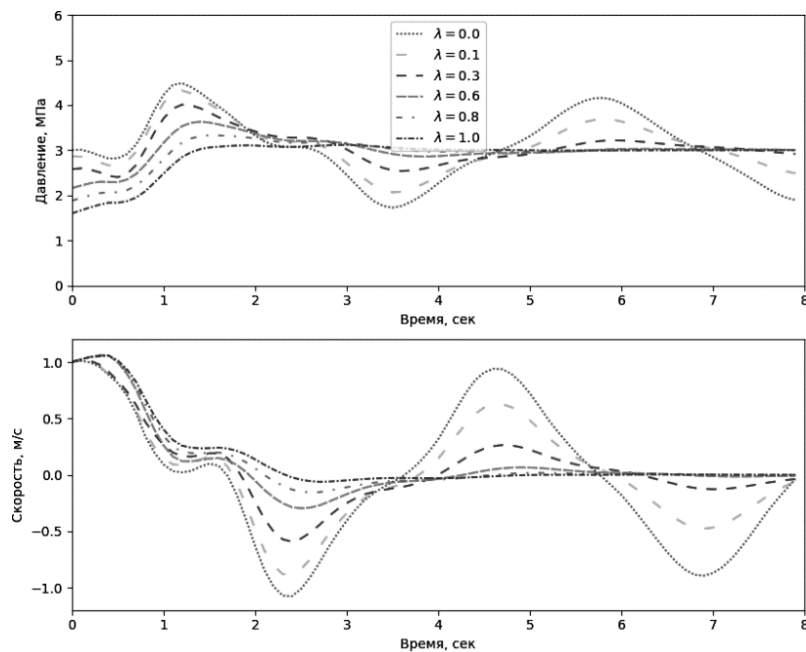


Рис. 2. Давление и скорость в точке посередине трубы на протяжении времени моделирования

Fig. 2. Pressure and velocity at a point, in the middle of the pipe during the simulation time

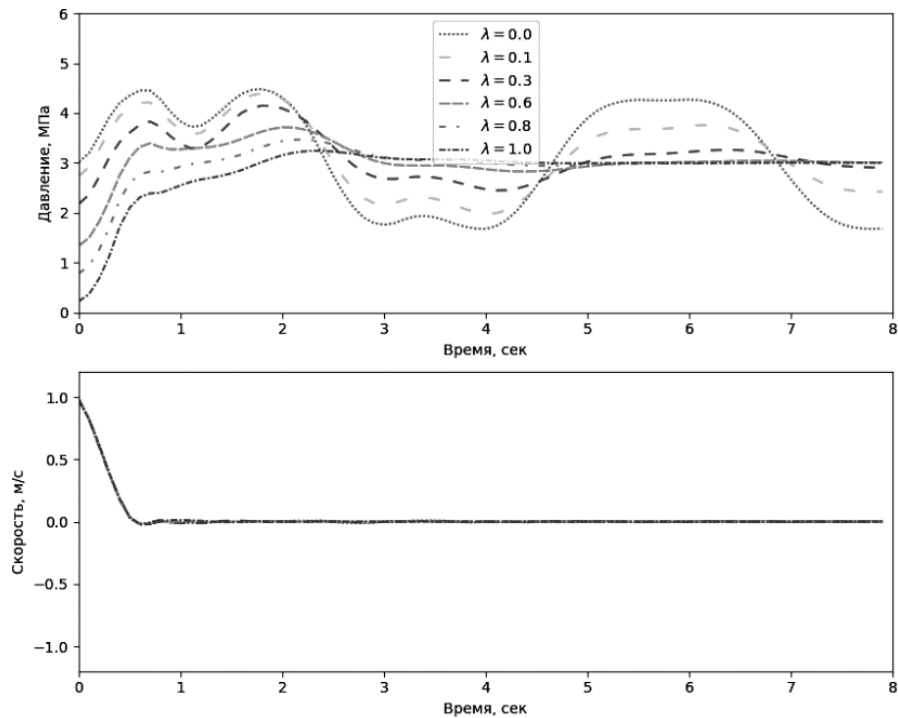


Рис. 3. Давление и скорость в точке, где установлена задвижка, на протяжении времени моделирования

Fig. 3. Pressure and velocity at the point where the valve is installed during the simulation time

Время решения представленной задачи ЛП на процессоре Intel Core i9 Alder Lake с шестнадцатью ядрами составило для первой, второй и третьей итерации соответственно 1359, 966 и 876 секунд. Полное решение с учетом трех стадий уточнения скоростей составило 3021 секунд. Такое большое различие во времени расчета итераций обусловлено тем, что на первой мы вычисляем матрицу коэффициентов задачи ЛП. Для последующих итераций обновляем только вектор правой части, поскольку меняется только значение скорости v_0 без необходимости перерасчета всех коэффициентов ограничений неравенств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа недостатков существующих методов предлагается эффективный численный метод решения краевых задач СДУЧП – метод контрольных точек. Метод основан на сведении решения СДУЧП к решению задач линейного программирования. Метод особенно эффективен, когда система дифференциальных уравнений является жесткой.

Получены результаты моделирования явления гидроудара в трубе, заполненной несжимаемой жидкостью, при различных коэффициентах трения. Результаты позволяют сделать численную оценку влияния коэффициента гидравлического трения на затухание колебательных процессов при гидроударе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
2. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения / под ред. А.З. Гамма. – Новосибирск: Наука, 2000. – 273 с. – ISBN 5-02-031583-4.
3. Александров А.А. Компьютерное моделирование гидравлического удара в нефтепроводе // Синергия наук. – 2019. – № 31. – С. 657–666. – EDN SQPJPZ.
4. Zhang B., Wan W., Shi M. Experimental and numerical simulation of water hammer in gravitational pipe flow with continuous air entrainment // Water. – 2018. – Vol. 10, N 7. – P. 928. – DOI: 10.3390/w10070928.
5. Глазков И.Е., Филипов А.Г. Методика расчета нагрузок на трубопровод от динамических воздействий во время полета ракеты-носителя // Известия Самарского научного центра РАН. – 2021. – Т. 23, № 6. – С. 78–82.
6. Meniconi S., Brunone B., Ferrante M. Water-hammer pressure waves interaction at cross-section changes in series in viscoelastic pipes // Journal of Fluids and Structures. – 2012. – Vol. 33. – P. 44–58. – DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2012.05.007.
7. Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кривцов А.М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т. 15. – С. 1687–1696.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 369 с.
9. Четверушкин Б.Н., Головин В.М. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 8. – С. 20–29.
10. Courant R., Hilbert D., Harris J.D. Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations // American Journal of Physics. – 1963. – Vol. 31, N 3. – P. 221–221.
11. Sarra S.A. The method of characteristics with applications to conservation laws // Journal of Online Mathematics and its Applications. – 2003. – Vol. 3. – P. 1–16.
12. Kler A., Apanovich D., Maximov A. An effective method for calculating the elements of thermal power plants, which are reduced to solving systems of partial differential equations // E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 209. – P. 03029. – DOI: 10.1051/e3sconf/202020903029.
13. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 591 с.
14. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme / J. Calatayud, J.-C. Cortés, J.A. Díaz, M. Jornet // Applied Numerical Mathematics. – 2020. – Vol. 151. – P. 413–424. – DOI: 10.1016/j.apnum.2020.01.012.
15. Smith G. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. – Oxford: Clarendon Press; New York: Oxford University Press, 1985. – 337 p.
16. Kazem S., Dehghan M. Application of finite difference method of lines on the heat equation // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2018. – Vol. 34, N 2. – P. 626–660. – DOI: 10.1002/num.22218.
17. Пантакар С., Сполдинг Д. Тепло и массообмен в пограничных слоях. – М.: Энергия, 1971. – 127 с.
18. Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of Finite Volume Finite Element Method // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – Vol. 127. – P. 142–157. – DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022.
19. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. – 6th ed., rev. – Elsevier, 2005.
20. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods // Handbook of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 7. – P. 713–1018. – DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.
21. Деклу Ж. Метод конечных элементов: пер. с фр. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
22. Johnson C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. – Courier Corporation, 2012. – 288 p.
23. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
24. Zohdi T.I. Finite element primer for beginners. The Basics. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 2018.
25. Бате К.Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.
26. Chaskalovic J. Finite element methods for engineering sciences: theoretical approach and problem solving techniques. – Berlin: Springer, 2008. – 255 p.

27. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Рипол Классик, 1975. – 541 с.
 28. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Задачи и методы линейного программирования. – М.: Советское радио, 1961. – 491 с.
 29. *Gale D.* Linear programming and the simplex method // Notices of the AMS. – 2007. – Vol. 54, N 3. – P. 364–369.

Клер Александр Матвеевич, заведующий отделом тепловых систем Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, доктор технических наук, профессор. Основное направление научных исследований – математическое моделирование и оптимизация тепловых установок. E-mail: kler@isem.irk.ru

Апанович Данил Владимирович, аспирант, инженер-исследователь отдела тепловых систем Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН. Основное направление научных исследований – математическое моделирование и оптимизация тепловых установок E-mail: dvapan@gmail.com.

Kler Aleksandr M., head of the department of heat power systems in the Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, D.Sc. (Eng), professor. The main field of his scientific research is mathematical modeling and optimization of heat power plants. E-mail: kler@isem.irk.ru

Apanovich Danil V., a graduate student, a Research Engineer at the Department of Thermal Systems of the Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, The main field of his scientific research is mathematical modeling and optimization of heat power plants. E-mail: dvapan@gmail.com.

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-59-74

Numerical simulation of the water hammer phenomenon taking into account the hydraulic friction of the pipeline by the control point method*

A.M. KLER^a, D.V. APANOVICH^b

Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 130 Lermontov Street, Irkutsk, 664033, Russian Federation

^a kler@isem.irk.ru ^b dvapan@gmail.com

Abstract

The calculations of dynamic processes in the pipeline are necessary for modeling the processes of fluid movement in the pipeline, for example, for predicting loads on the pipeline when compression and rarefaction waves move in it. These tasks are reduced to solving systems of partial differential equations. The calculation of the phenomenon excluding hydraulic friction can be carried out by the method of characteristics, however, the calculation, taking into account the friction forces, is complicated for known methods, such as the finite difference method and the final element method. The article provides a brief description and an example of using the control point method for the task of modeling the water hammer phenomenon, taking into account the hydraulic friction forces of the pipeline. The main idea of the proposed method is to reduce the solution of these systems of equations to solving linear programming problems. The purpose of this work is to solve the problem of water hammer with friction by the control point method. This method, developed jointly with A.S. Maksimov by the authors of this article at the Melentiev Energy Systems Institute, has shown good results in solving systems of partial

* Received 23 June 2022.

The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-29-01654, <https://rscf.ru/project/22-29-01654/>

differential equations of a periodic heat exchanger with ceramic ball filling. Moreover, heat transfer inside these elements was taken into account. With large values of thermal conductivity coefficients, this system is also rigid, which complicates its solution by the control volume method, but the control point method has shown good results. This gives reason to consider it promising in calculations of hydraulic friction. The results of modeling a hydraulic shock to a pipe filled with an incompressible liquid at different friction coefficients have been obtained. The results make it possible to make a numerical assessment of the effect of the hydraulic friction coefficient on the attenuation of oscillatory processes during a hydraulic shock.

Keywords: Dynamic processes, hydraulic systems, mathematical model, differential equations, partial differential equations, linear programming, pipelines, incompressible fluid, hydraulic friction.

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika*. T. 6. *Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986.
2. Gamma A.Z., ed. *Gidravlicheskie tsepi. Razvitie teorii i prilozheniya* [Hydraulic chains. Development of theory and applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000. 273 p. ISBN 5-02-031583-4.
3. Aleksandrov A.A. Komp'yuternoe modelirovanie gidravlicheskogo udara v nefteprovode [The computer simulation hydraulic impact in oil pipeline]. *Sinergiya nauk = Synergy of Sciences*, 2019, no. 31, pp. 657–666.
4. Zhang B., Wan W., Shi M. Experimental and numerical simulation of water hammer in gravitational pipe flow with continuous air entrainment. *Water*, 2018, vol. 10, no. 7, p. 928. DOI: 10.3390/w10070928.
5. Glazkov I.E., Filipov A.G. Metodika rascheta nagruzok na truboprovod ot dinamicheskikh vozdustvii vo vremya poleta rakety-nositelya [Method of calculation of loads of the pipeline from dynamic influences in the flight time of the launch vehicle]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk = Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2021, vol. 23, no. 6, pp. 78–82.
6. Meniconi S., Brunone B., Ferrante M. Water-hammer pressure waves interaction at cross-sectional changes in series in viscoelastic pipes. *Journal of Fluids and Structures*, 2012, vol. 33, pp. 44–58. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2012.05.007.
7. Lyapidevskii V.Yu., Neverov V.V., Krivtsov A.M. Matematicheskaya model' gidroudara v vertikal'noi skvazhine [Mathematical model of water hammer in vertical wellbore]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya = Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 1687–1696.
8. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 369 p.
9. Chetverushkin B.N., Goloviznin V.M. Algoritmy novogo pokoleniya v vychislitel'noi gidrodinamike [New generation algorithms in computational hydrodynamics]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 8, pp. 20–29.
10. Courant R., Hilbert D., Harris J.D. Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. *American Journal of Physics*, 1963, vol. 31, no. 3, pp. 221–221.
11. Sarra S.A. The method of characteristics with applications to conservation laws. *Journal of Online mathematics and its Applications*, 2003, vol. 3, pp. 1–16.
12. Kler A., Apanovich D., Maximov A. An effective method for calculating the elements of thermal power plants, which are reduced to solving systems of partial differential equations. *E3S Web of Conferences*, 2020, vol. 209, p. 03029. DOI: 10.1051/e3sconf/202020903029.
13. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravnenii* [Methods for solving grid equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 591 p.
14. Calatayud J., Cortés J.-C., Díaz J.A., Jornet M. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, vol. 151, pp. 413–424. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.01.012.
15. Smith G. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford, Clarendon Press, New York, Oxford University Press, 1985. 337 p.

16. Kazem S., Dehghan M. Application of finite difference method of lines on the heat equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, vol. 34, no. 2, pp. 626–660. DOI: 10.1002/num.22218.
17. Pantakar S.V., Spolding D.B. *Heat and mass transfer in boundary layers*. Morgan-Grampian, 1968 (Russ. ed.: Pantakar S., Spolding D. *Teplo i massoobmen v pogranichnykh sloyakh*. Moscow, Energiya Publ., 1971. 127 p.).
18. Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of Finite Volume Finite Element Method. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, vol. 127, pp. 142–157. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022.
19. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 6th ed., rev. Elsevier, 2005.
20. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods. *Handbook of Numerical Analysis*, 2000, vol. 7, pp. 713–1018. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.
21. Descloux J. *Metod konechnykh elementov* [The finite element method]. Moscow Mir Publ., 1976. 95 p. (In Russian).
22. Johnson C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation, 2012. 288 p.
23. Gallagher R. *Finite element analysis: fundamentals*. Englewoog Cliffs, N.J., 1975 (Russ. ed.: Gallagher R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy*. Moscow, Mir Publ., 1984. 428 p.).
24. Zohdi T.I. *Finite element primer for beginners. The Basics*. 2nd ed. Berlin, Springer, 2018.
25. Bathe K.J. *Finite element procedures*. New Jersey. Prentice Hall, 1996 (Russ. ed.: Bate K.Yu. *Metody konechnykh elementov*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 1022 p.).
26. Chaskalovic J. *Finite element methods for engineering sciences: theoretical approach and problem solving techniques*. Berlin, Springer, 2008. 255 p.
27. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. London, 1971 (Russ. ed.: Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. Moscow, Ripol Klassik Publ., 1975. 541 p.).
28. Yudin D.B., Gol'shtein E.G. *Zadachi i metody lineinogo programmirovaniya* [Problems and methods of linear programming]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1961. 491 p.
29. Gale D. Linear programming and the simplex method. *Notices of the AMS*, 2007, vol. 54, no. 3, pp. 364–369.

Для цитирования:

Клер А.М., Апанович Д.В. Численное моделирование явления гидроудара с учетом гидравлического трения трубопровода методом контрольных точек // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 3 (87). – С. 59–74. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-59-74.

For citation:

Kler A.M., Apanovich D.V. Chislennoe modelirovanie yavleniya gidroudara s uchetom gidravlicheskogo treniya truboprovoda metodom kontrol'nykh toчек [Numerical simulation of the water hammer phenomenon taking into account the hydraulic friction of the pipeline by the control point method]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 3 (87), pp. 59–74. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-3-59-74.