

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.876.5

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-4-63-74

Анализ численных методов интегрирования жестких систем высокой размерности в SimInTech^{*}

Ю.В. ШОРНИКОВ^а, К.А. ТИМОФЕЕВ^б

630073, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

^а shornikov@corp.nstu.ru ^б k.timofeev@corp.nstu.ru

При численном моделировании различных динамических систем часто возникает вопрос эффективности того или иного численного метода интегрирования применительно к определенному классу задач.

Важным классом задач Коши являются жесткие задачи высокой размерности. Одним из примеров такой задачи является модель проникновения помеченных радиоактивной меткой антител в пораженную опухолью ткань живого организма.

Методом прямых исходная начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимируется задачей Коши. Приведена компьютерная модель, выполненная в программном комплексе SimInTech. Проведен сравнительный анализ эффективности явных адаптивных методов и диагонально-неявных методов при различных размерах шага сетки по пространственной переменной.

Показано, что наиболее эффективными при решении задач рассмотренного класса являются диагонально-неявные методы интегрирования типа Рунге-Кутты – DIRK2 и DIRK4 из пакета SimInTech. Метод DIRK3 уступает в связи с большим количеством вычислений матрицы Якоби. Предпочтительным в данном случае скорее является метод DIRK2, так как он имеет при практически той же производительности большее количество шагов по времени и не так сильно увеличивает шаг интегрирования при сравнительно низких настройках точности метода интегрирования. Из явных методов типа Рунге-Кутты с адаптивной численной схемой наиболее эффективным для решения задач подобного класса является метод «Адаптивный-5». Для задач подобного класса можно рекомендовать использование явных методов интегрирования «Адаптивный-5», «Адаптивный-1» при небольшой размерности системы.

Традиционные неявные методы интегрирования Гира и Эйлера также эффективно решают данную задачу при условии эффективной реализации алгоритма вычисления матрицы Якоби.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, диффузия, радиоактивные метки, жесткие динамические системы, программная модель, численные методы, неявные методы интегрирования, диагонально-неявные методы интегрирования Рунге-Кутты, моделирование

^{*} Статья получена 04 октября 2022 года.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании сложных динамических процессов возникает необходимость численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Эффективность применяемых численных методов зависит от степени жесткости и размерности задачи [1–3]. В статье проводится сравнительный анализ явных адаптивных и диагонально-неявных методов интегрирования, реализованных в отечественной инструментальной среде моделирования SimInTech [4, 6, 12], которая предназначена для моделирования сложных динамических процессов. Программные модели в SimInTech специфицируются графическим языком структурных схем и символьным представлением в виде алгебро-дифференциальных уравнений средствами встроенного языка программирования PL. Библиотека численных методов в системе моделирования SimInTech состоит из традиционных и оригинальных численных схем интегрирования ОДУ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу проникновения помеченных радиоактивной меткой антител в пораженную опухолью ткань живого организма, сформулированную лабораторией Akzo Nobel Central Research [5, 11]. Исследование проводилось в диагностических и терапевтических целях. Процесс моделируется системой одномерных уравнений реакции-диффузии

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -kuv, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kuv, \quad (1)$$

где k – постоянная скорости реакции; u , v – концентрации помеченных радиоактивной меткой антител и пораженной опухолью ткани соответственно.

Заданы начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0, \quad x > 0;$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad 0 < t < t_k.$$

После замены пространственной переменной x на $\zeta = \frac{x}{x+c}$, $c > 0$, аппроксимации частных производных первого и второго порядков по новой пространственной переменной соответственно имеют вид:

$$\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta\zeta},$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial \zeta^2} = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta\zeta)^2}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Значения u_0 и u_{N+1} получаются из граничных условий:

$$u_0 = \phi(t), \quad u_{N+1} = u_N.$$

Полагая $y = (u_1, v_1, \dots, u_N, v_N)^T$ и время окончания моделирования $t_k = 20$, запишем задачу (1) в виде задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2)$$

$$y(0) = g, \quad y \in \mathbb{R}^{2N}, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

где N – изменяемый параметр, а компоненты функции $f(t, y)$ определяются выражениями

$$f_{2j-1} = \alpha_j \frac{y_{2j+1} - y_{2j-3}}{2\Delta\zeta} + \beta_j \frac{y_{2j-3} - 2y_{2j-1} + y_{2j+1}}{(\Delta\zeta)^2} - ky_{2j-1}y_{2j}, \quad (3)$$

$$f_{2j} = -ky_{2j}y_{2j-1},$$

где

$$\alpha_j = 2(j\Delta\zeta - 1)^3 / c^2, \quad \beta_j = (j\Delta\zeta - 1)^4 / c^2, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \Delta\zeta = \frac{1}{N},$$

$$y_{-1}(t) = \phi(t), \quad y_{2N+1} = y_{2N-1}, \quad g \in \mathbb{R}^{2N}, \quad g = (0, v_0, 0, v_0, \dots, 0, v_0)^T.$$

Функция $\phi(t)$ является кусочно-непрерывной и имеет вид

$$\phi(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0, 5], \\ 0, & t \in [5, 20]. \end{cases}$$

Подходящими значениями параметров являются $k = 100$, $v_0 = 1$ и $c = 4$.

2. КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Структурная схема компьютерной модели (2) – (3) в SimInTech приведена на рис. 1. Параметр ρh_i соответствует функции $\phi(t)$, формируется блоком ступенчатого воздействия (0) и подается на вход модели (2) на встроенном языке программирования, в котором система уравнений описана в текстовом виде. Остальные блоки на схеме предназначены для выборки и вывода на график результатов моделирования.

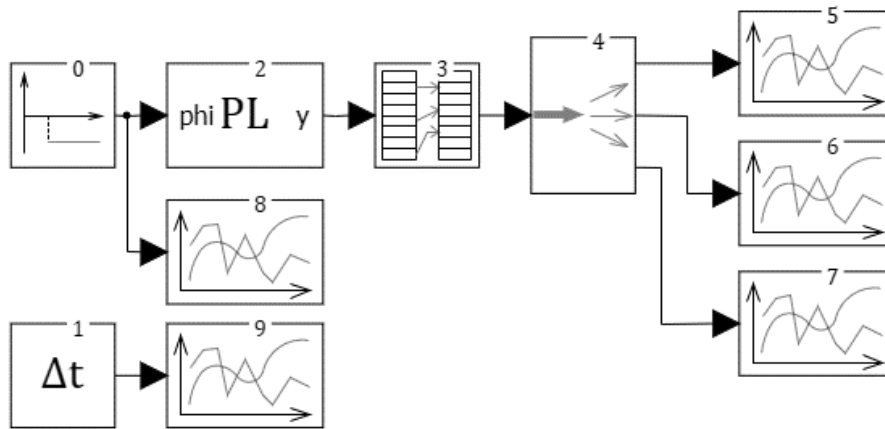


Рис. 1. Компьютерная модель в SimInTech

Fig. 1. A computer model in SimInTech

На рис. 2 приведено текстовое описание системы уравнений в блоке PL (язык программирования) компьютерной модели SimInTech.

```

1  input phi;
.
.  const N = 200, K = 100, C2 = 16, V0 = 1, U0 = 0;
.
.  init y[2*N];
.
.  output y;
.
.  var alpha = N#0, beta = N#0, i;
.
10 initialization
.  for (i=1, N) begin
.  | y[2*i-1] = U0;
.  | y[2*i] = V0;
.  | alpha[i] = 2*((i/N-1)^3)/C2;
.  | beta[i] = 2*((i/N-1)^4)/C2;
.  | end;
.  end;
.
20 if getder then begin
.
.  y'[1] = alpha[1]*(y[3] - phi)*N/2 + beta[1]*(phi - 2*y[1] + y[3])*N*N - k*y[1]*y[2];
.  y'[2] = -k*y[2]*y[1];
.
.  for (i=2, N-1) begin
.  | y'[2*i-1] = alpha[i]*(y[2*i+1] - y[2*i-3])*N/2 + beta[i]*(y[2*i-3] - 2*y[2*i-1] +
.  | | y[2*i+1])*N*N - k*y[2*i-1]*y[2*i];
.  | y'[2*i] = -k*y[2*i]*y[2*i-1];
.  | end;
.
30 y'[2*N-1] = -k*y[2*N]*y[2*N-1];
.  y'[2*N] = -k*y[2*N-1]*y[2*N];
.
.  end;

```

Рис. 2. Текстовое описание системы уравнений в PL

Fig. 2. Text description of the system of equations in PL

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В настройках параметров расчета задана относительная точность решения $\varepsilon = 10^{-3}$, начальный шаг интегрирования $h_0 = 10^{-9}$. Допустимый диапазон шага интегрирования задан от $h_{\min} = 10^{-20}$ до $h_{\max} = 1$ с. Конечное время моделирования равно 20 с.

Для сравнительного анализа будем применять явные методы интегрирования типа Рунге-Кутты с адаптивным выбором численной схемы и переменным шагом «Адаптивный-1» – «Адаптивный-5» [7], а также диагонально- неявные методы типа Рунге-Кутты [10, 13–15] с переменным шагом DIRK2, DIRK3, DIRK4 [4, 8, 9], реализованные в программном комплексе SimInTech [6].

На рис. 3–6 приведены компоненты решений y_{79} , y_{172} и y_{199} , а также компонента $\varphi(t)$.

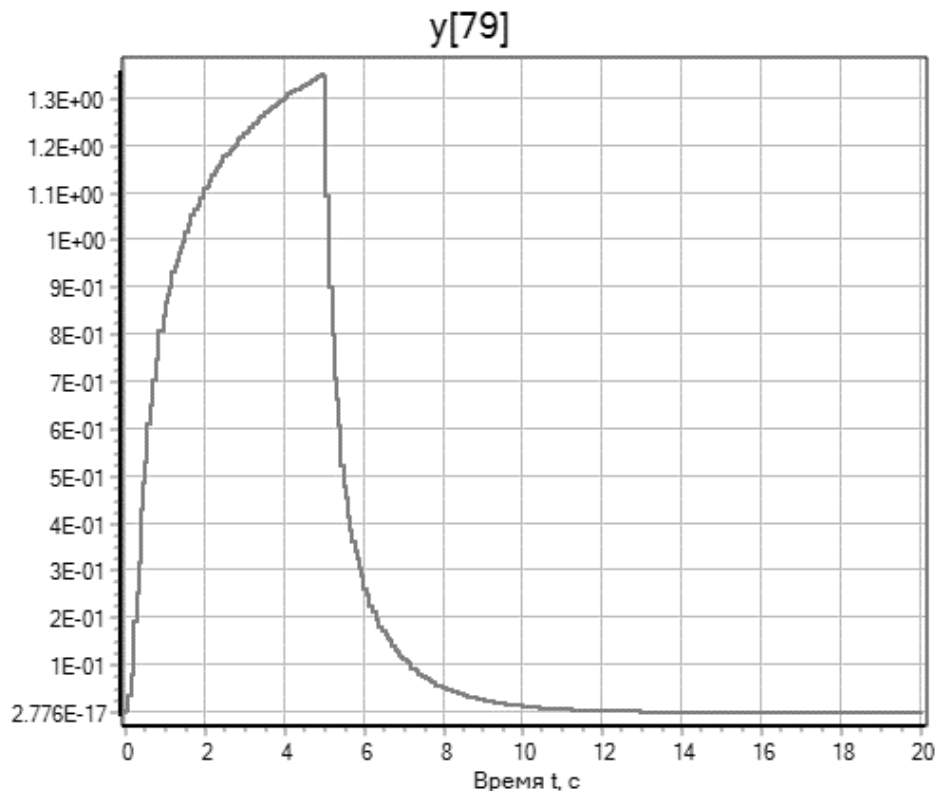


Рис. 3. Компонент решения y_{79}

Fig. 3. Solution component y_{79}

На рис. 7 показана зависимость времени расчета задачи от ее размерности для рассмотренных методов интегрирования.

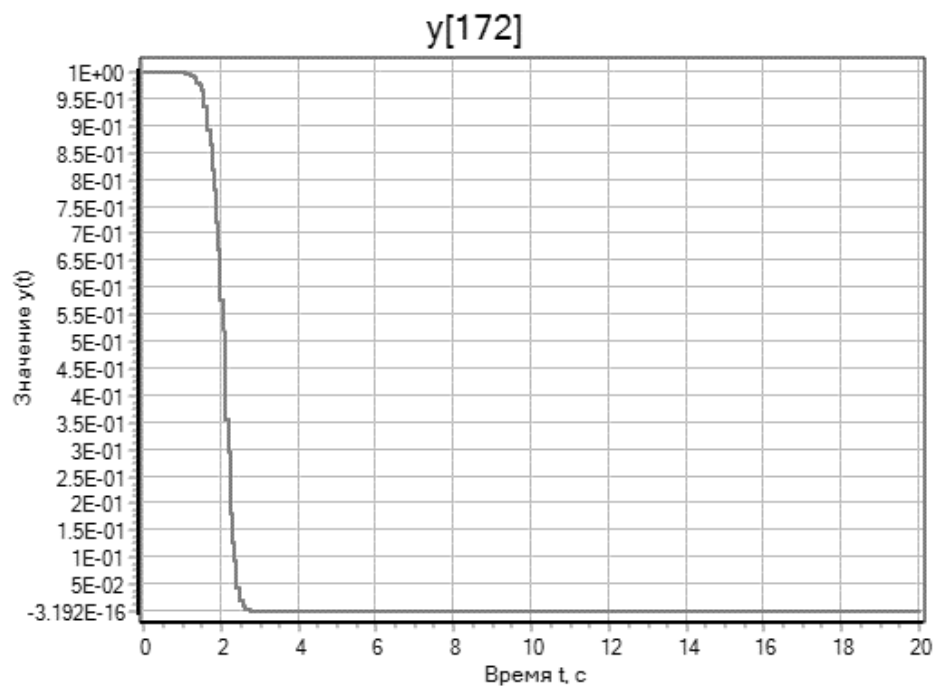


Рис. 4. Компонент решения y_{172}

Fig. 4. Solution component y_{172}

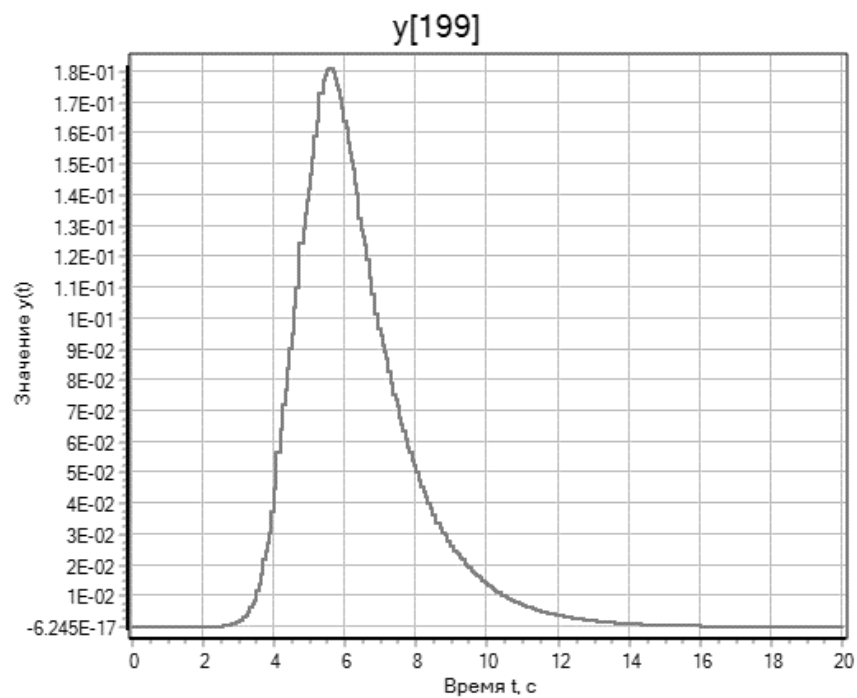


Рис. 5. Компоненты решения y_{199}

Fig. 5. Solution components y_{199}

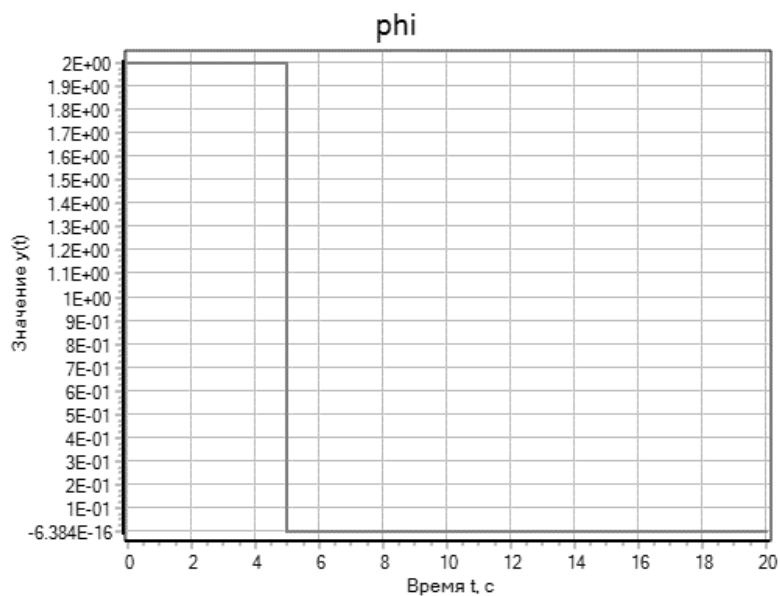
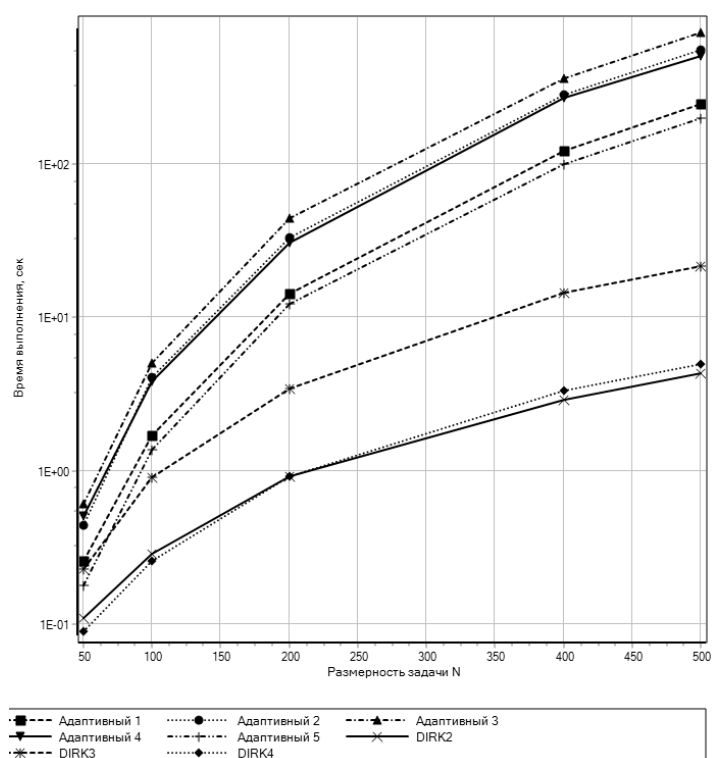
Рис. 6. Функция $\varphi(t)$ Fig. 6. Function $\varphi(t)$ 

Рис. 7. Зависимость времени расчета задачи от ее размерности

Fig. 7. Dependence of the calculation time of the problem on its dimension

В таблице приведены численные характеристики методов при различных размерностях задачи, N_h – количество хороших шагов, N_{bad} – количество ошибочных шагов N_f – количество расчетов правой части ОДУ, T – физическое время расчета в секундах.

Характеристики методов интегрирования

Characteristics of integration methods

$N = 50$								
Характеристики	Адаптивный-1	Адаптивный-2	Адаптивный-3	Адаптивный-4	Адаптивный-5	DIRK2	DIRK3	DIRK4
N_h	1187	871	2126	2565	579	321	126	108
N_{bad}	387	179	27	79	106	24	11	22
N_f	4334	8223	10740	7855	3321	1064	644	822
T, c	0.26	0.44	0.61	0.51	0.18	0.11	0.23	0.09
$N = 100$								
N_h	3994	3827	9516	10664	2151	395	144	125
N_{bad}	1740	1187	11	468	588	44	17	31
N_f	15467	38934	47626	32930	13109	1347	745	973
T, c	1.71	4.05	5.06	3.81	1.37	0.29	0.91	0.26
$N = 200$								
N_h	17608	15813	41459	45254	9255	442	165	132
N_{bad}	7691	5231	18	1902	2582	59	40	32
N_f	68241	163123	207369	139568	56605	1541	879	1003
T, c	14.37	33.1	44.1	30.88	12.18	0.92	3.44	0.92
$N = 400$								
N_h	74886	66508	172980	194507	39384	467	176	144
N_{bad}	33496	22126	19	7583	11243	59	32	39
N_f	291697	686948	864978	598689	241894	1611	927	1110
T, c	122.43	281.75	360.85	269.08	99.32	2.89	14.4	3.33
$N = 500$								
N_h	118957	105962	277235	304947	62500	486	168	145
N_{bad}	53552	35261	22	11798	17938	72	22	38
N_f	464050	1094525	1386265	938439	384254	1708	859	1111
T, c	245.25	558.08	719.47	506.57	198.47	4.35	21.59	4.98

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее эффективными при решении задач рассмотренного класса являются диагонально- неявные методы интегрирования типа Рунге-Кутты –DIRK2 и DIRK4. Метод DIRK3 уступает в связи с большим количеством вычислений матрицы Якоби. Предпочтительным в данном случае скорее является метод DIRK2, так как он имеет при практически той же производительности большее количество шагов по времени и не так сильно увеличивает шаг интегрирования при сравнительно низких настройках точности метода интегрирования.

Из явных методов типа Рунге-Кутты с адаптивной численной схемой наиболее эффективным для решения задач подобного класса является метод «Адаптивный-5». Для задач подобного класса можно рекомендовать использование явных методов интегрирования «Адаптивный-5», «Адаптивный-1» при небольшой размерности системы.

Полностью традиционные неявные методы интегрирования Гира и Эйлера также эффективно решают данную задачу; время расчета неявным методом Эйлера, реализованным в SimInTech, составляет 11 с против 4.98 с у DIRK4 на размерности $N = 500$. Таким образом, можно сделать вывод, что использование неявных методов интегрирования оправдано при условии использования алгоритмов решения СЛАУ с разреженными матрицами и эффективной реализации вычисления матрицы Якоби (в частности, выполнения LU-разложений не на каждом шаге интегрирования).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.
2. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
3. Cellier F.E., Kofman E. Continuous system simulation. – Springer US, 2006. – 644 p.
4. Сковорцов Л.М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 230 с. – ISBN 978-5-97060-636-0.
5. Mazzia F., Iavernaro F. Test set for initial value problem solvers. Report 40/2003 / Department of Mathematics, University of Bari. – Bari, Italy, 2003.
6. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: практикум по моделированию систем автоматического регулирования / Б.А. Карташов, Е.А. Шабаев, О.С. Козлов, А.М. Щекатуров. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 424 с. – ISBN 978-5-97060-482-3.
7. Сковорцов Л.М. Явные адаптивные методы численного решения жестких систем // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 12. – С. 97–107.
8. Сковорцов Л.М. Диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 2. – С. 3–17.
9. Сковорцов Л.М. Неявный метод пятого порядка для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 6. – С. 978–984.
10. Alexander R. Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'s // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1977. – Vol. 14, N 6. – P. 1006–1021.
11. Lioen W.M., Swart J.J.B de. Test set for initial value problem solvers. Report MAS-R9832 / Centrum Wiskunde & Informatica (CWI). – Amsterdam, December 1998.

12. Программный комплекс для исследования динамики и проектирования технических систем / О.С. Козлов, Д.Е. Кондаков, Л.М. Скворцов, К.А. Тимофеев, В.В. Ходаковский // Информационные технологии. – 2005. – № 9. – С. 20–25.
13. Kværnø A. Singly diagonally implicit Runge–Kutta methods with an explicit first stage // BIT Numerical Mathematics. – 2004. – Vol. 44, N 3. – P. 489–502.
14. Hosea M.E., Shampine L.F. Analysis and implementation of TR BDF2 // Applied Numerical Mathematics. – 1996. – Vol. 20, N 1–3. – P. 21–37.
15. Левыкин А.И., Новиков А.Е., Новиков Е.А. (m, k) -схемы решения дифференциально-алгебраических и жестких систем // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 39–51.

Шорников Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета, старший научный сотрудник Института автоматизации и электротехники Сибирского отделения Российской академии наук (ИАиЭ СО РАН). Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследования гибридных динамических систем. Имеет более 200 печатных работ. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Тимофеев Константин Александрович, аспирант кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследования динамических систем. Имеет более 10 печатных работ. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

Shornikov Yuri V., Doctor of Technical Sciences, Professor at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University, senior researcher in the Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. The main direction of his scientific research is mathematical modeling and research of hybrid dynamic systems. He has over 200 publications. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Timofeev Konstantin A., a postgraduate at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University. The main direction of his scientific research is mathematical modeling and studies of dynamic systems. He has more than 10 publications. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2022-4-63-74

Analysis of numerical methods for integrating high-dimensional stiff systems in SimInTech*

Yu.V. Shornikov^a, K.A. Timofeev^b

630073, Novosibirsk, 20 K. Marx Prospekt, Department of Automated Control Systems, Novosibirsk State Technical University

^a shornikov@corp.nstu.ru ^b k.timofeev@corp.nstu.ru

Abstract

When modeling complex dynamic processes, it becomes necessary to numerically solve the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations (ODEs). The efficiency of the applied numerical methods depends on the degree of stiffness and dimension of the problem [1–3]. Depending on the task class, different methods behave differently.

* Received 04 October 2022.

This article provides a comparative analysis of explicit adaptive and diagonal-implicit integration methods implemented in the SimInTech software [4]. The SimInTech software package is designed to simulate complex dynamic processes in systems of various classes. The system supports the ability to develop models in the form of block diagrams, as well as describe systems of differential equations using the built-in programming language and simulate event-driven systems and finite automata.

It is shown that the most effective in solving problems of the considered class are the diagonal-implicit Runge-Kutta type integration methods – DIRK2 and DIRK4 from the SimInTech package. The DIRK3 method is inferior due to the large number of calculations of the Jacobian matrix. The preferred method is rather The DIRK2 method is preferable in this case, because it has a greater number of time steps with almost the same performance and does not increase the integration step so much with relatively low accuracy settings of the integration method. Of the explicit methods of the Runge-Kutta type with an adaptive numerical scheme, the “Adaptive-5” method is the most effective for solving problems of this class. For problems of this class, we can recommend the use of explicit integration methods “Adaptive-5”, “Adaptive-1” with a small system dimension.

The traditional implicit Gear and Euler integration methods also effectively solve this problem, provided that the algorithm for calculating the Jacobian matrix is effectively implemented.

Keywords: differential equations, diffusion, radioactive labels, stiff dynamic systems, software model, numerical methods, implicit integration methods, diagonal-implicit Runge-Kutta integration methods, simulation

REFERENCES

1. Kolesov Yu.B., Senichenkov Yu.B. *Modelirovanie sistem. Dinamicheskie i gibridnye sistemy* [Modeling systems. Dynamic and hybrid systems]. St. Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2012. 224 p.
2. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems*. Berlin, Springer-Verlag, 1996 (Russ. ed.: Khairer E., Vanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii: zhestkie i dif-ferentsial'no-algebraicheskie zadachi*. Moscow, Mir Publ., 1999. 685 p.).
3. Cellier F.E., Kofman E. *Continuous system simulation*. Springer US, 2006. 644 p.
4. Skvortsov L.M. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii* [Numerical solution of ordinary differential and differential-algebraic equations]. Moscow, DMK-Press, 2018. 230 p. ISBN 978-5-97060-636-0.
5. Mazzia F., Iavernaro F. *Test set for initial value problem solvers*. Report 40/2003. Department of Mathematics, University of Bari, Italy, 2003.
6. Kartashov B.A., Shabaev E.A., Kozlov O.S., Shchekaturov A.M. *Sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem SimInTech: praktikum po mo-delirovaniyu sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [The environment for dynamic modeling of technical systems SimInTech: a workshop on modeling automatic control systems]. Moscow, DMK Press, 2017. 424 p. ISBN 978-5-97060-482-3.
7. Skvortsov L.M. Yavnye adaptivnye metody chislennogo resheniya zhestkikh sistem [Explicit adaptive methods for the numerical solution of stiff systems]. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Modeling*, 2000, vol. 12, no. 12, pp. 97–107. (In Russian).
8. Skvortsov L.M. Diagonal'no neyavnye FSAL-metody Runge–Kutty dlya zhestkikh i differentsial'no-algebraicheskikh sistem [Diagonally implicit Runge–Kutta FSAL methods for stiff and differential-algebraic systems]. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Modeling*, 2002, vol. 14, no. 2, pp. 3–17. (In Russian).
9. Skvortsov L.M. Neyavnyi metod pyatogo poryadka dlya chislennogo resheniya differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii [An implicit fifth-order method for the numerical solution of differential-algebraic equations]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 978–984. (In Russian).

10. Alexander R. Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff O.D.E.'s. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1977, vol. 14, no. 6, pp. 1006–1021.
11. Lioen W.M., Swart J.J.B de. *Test set for initial value problem solvers*. Report MAS-R9832. Amsterdam, Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), December 1998.
12. Kozlov O.S., Kondakov D.E., Skvortsov L.M., Timofeev K.A., Hodakovskiy V.V. Programmnyi kompleks dlya issledovaniya dinamiki i proektirovaniya tekhnicheskikh sistem [Software for research dynamics and design of technical systems]. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*, 2005, no. 9, pp. 20–25.
13. Kværnø A. Singly diagonally implicit Runge–Kutta methods with an explicit first stage. *BIT Numerical Mathematics*, 2004, vol. 44, no. 3, pp. 489–502.
14. Hosea M.E., Shampine L.F. Analysis and implementation of TR BDF2. *Applied Numerical Mathematics*, 1996, vol. 20, no. 1–3, pp. 21–37.
15. Levykin A.I., Novikov A.E., Novikov E.A. (m, k) -skhemy resheniya differentsial'no-algebraicheskikh i zhestkikh sistem [Schemes of (m, k) -type for solving differential-algebraic and stiff systems]. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki = Numerical Analysis and Applications*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 39–51. (In Russian).

Для цитирования:

Шорников Ю.В., Тимофеев К.А. Анализ численных методов интегрирования жестких систем высокой размерности в SimInTech // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 4 (88). – С. 63–74. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-4-63-74.

For citation:

Shornikov Yu.V., Timofeev K.A. Analiz chislennykh metodov integrirvaniya zhestkikh sistem vysokoi razmernosti v SimInTech [Analysis of numerical methods for integrating high-dimensional stiff systems in SimInTech]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 4 (88), pp. 63–74. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-4-63-74.