

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 621.865.8+62-503.53

DOI: 10.17212/2782-2001-2023-1-7-24

Полиномиальный матричный метод синтеза регуляторов для объектов с запаздыванием управляющего сигнала^{*}

А.А. ВОЕВОДА^а, В.Ю. ФИЛЮШОВ^б

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, профессор.

^а ucit@ucit.ru ^б filiushov.vladislav@gmail.com

В настоящей работе рассмотрен синтез систем управления для объектов с запаздыванием управляющего сигнала полиномиальным матричным методом, который используется для расположения полюсов и, если это возможно, нулей в требуемом положении. Регулятор рассчитывается по выходу, то есть только по измеренным величинам в объекте, что является преимуществом по сравнению с другими методами синтеза модального направления, где необходимо использовать вектор состояния. Предлагается звено запаздывания аппроксимировать рядом Паде с ограниченным количеством членом, таким образом получив передаточные функции первого и второго порядка. Желаемый характеристический полином замкнутой системы выбирается таким образом, чтобы он содержал знаменатели передаточных функций аппроксимации, что позволит сохранить их полюса в замкнутой системе.

Полиномиальный метод синтеза позволяет рассчитать многоканальные регуляторы как для объектов с несколькими входами и несколькими выходами (multi input – multi output, MIMO), так и для объектов с одним входом и несколькими выходами (single input – multi output, SIMO). К последним относится двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, где ток якоря и скорость вращения ротора являются выходами, а управляющий сигнал, подаваемый на полупроводниковый преобразователь, – входом. В настоящей работе управляющий сигнал формируется с запаздыванием, превышающим время переходного процесса двигателя, что вносит значительное влияние в его динамику. Применяв предлагаемый подход, удалось синтезировать систему управления скоростью вращения ротора, при этом устойчивую к изменению времени запаздывания в довольно широком диапазоне.

Ключевые слова: полиномиальный метод синтеза, полиномиальное матричное разложение, синтез, многоканальный регулятор, электромеханическая система, звено запаздывания, аппроксимация Паде

^{*} Статья получена 23 октября 2022 г.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство производственных процессов имеют временное запаздывание между моментом измерения регулируемой величины и выработкой управляющего воздействия, что значительно влияет на динамику проходящих в системе процессов. Игнорирование запаздывания в математической модели рассматриваемого объекта зачастую приводит к неустойчивости полученной системы управления, поэтому его необходимо учитывать в математическом описании и в законе управления. Природа возникновения запаздывания различна. Например, по конструктивному соображению невозможно установить датчик измеряемой величины в непосредственной близости от места ее изменения, как в системах управления транспортированием какого-либо вещества [1]. Запаздывание управляющего сигнала можно наблюдать в процессах сушки [2], где время от изменения влажности до изменения температуры может достигать нескольких минут, или в процессе горения реактивного топлива временем запаздывания является время, необходимое для впрыскивания топлива в камеру и достижения необходимого давления. Особо часто объекты с запаздыванием встречаются в химической промышленности (например, дистилляционные колонны [3, 4] и ректификационные колонны). Еще одним примером запаздывания управляющего сигнала можно назвать наличие постоянного возмущающего момента на двигателе при условии, что движение его ротора ограничено стопором. В этом случае для начала движения двигателю необходимо развить момент трогания, который можно заменить эквивалентным временем запаздывания, как показано в [5]. Запаздывание управляющего сигнала встречается не только в инженерной области, но и в экономической [6].

Параметры объекта могут меняться в процессе его функционирования, поэтому сохранение устойчивости и основных показателей качества системы управления без перерасчета регулятора является важной проблемой. В настоящей работе рассмотрено несовпадение величины времени запаздывания объекта и его модели, что может произойти из-за физического износа объекта или других причин. В работах [7, 8] определены условия достижения параметрической грубости, которые заключаются в определенном выборе расположения полюсов замкнутой системы относительно нулей объекта.

В настоящей работе задача синтеза решается при помощи полиномиального матричного метода синтеза [9–11], применяемого для одноканальных (*single input – single output*) и для многоканальных (*multi input – multi output*) объектов. Это модальный метод синтеза регуляторов, где самым известным является синтез в пространстве состояний. В настоящей работе с помощью полиномиального метода синтеза рассчитываются регуляторы по выходу объекта, что не требует известности всего вектора состояния. Порядок многоканального регулятора для многоканального объекта зависит не только от порядка объекта, но и от количества доступных измерению величин: чем больше выходов, тем меньше порядок регулятора.

В работах [12–15] с помощью полиномиального метода синтеза рассчитан многоканальный регулятор для объектов с одним входом и несколькими выходами: перевернутый маятник на тележке, два перевернутых маятника на тележке, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Для двигателя постоянного тока было показано, что от многоканального регулятора

можно перейти к системе подчиненного регулирования. В работе [16] рассчитана система управления для электромеханической системы регулирования натяжения в зоне транспортирования материала поточной линии по задающему и возмущающим воздействиям с помощью полиномиального метода синтеза.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления с запаздыванием управляющего сигнала:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u(t) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий; $y(t) \in R^p$ – вектор измеряемых переменных объекта; τ – время запаздывания. Матрицы объекта A, B, C заданы.

От описания объекта в пространстве состояний к описанию в виде матричной передаточной функции (матричной ПФ или МПФ) можно перейти по следующей формуле:

$$W_o(s) = W(s)e^{-\tau s}, \quad W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

где $W(s) \in R(s)^{p \times m}$ – МПФ объекта без учета запаздывания; I – единичная матрица; $W_o(s) \in R(s)^{p \times m}$ – МПФ объекта; $R(s)^{p \times m}$ – множество матриц размером $p \times m$, элементы которых – рациональные функции от s с вещественными коэффициентами. Данная МПФ может быть неквадратной, так как количество входов и выходов объекта в общем случае не равно; s – оператор Лапласа.

Разрабатываемый подход для синтеза заключается в аппроксимации звена запаздывания $e^{-\tau s}$ каким-либо способом, например, аппроксимацией рядом Паде некоторого порядка, для получения передаточной функции с некоторым количеством полюсов и сохранения этих полюсов в замкнутой системе. Сохранение полюсов в замкнутой системе происходит путем выбора этих полюсов в качестве части корней характеристического полинома, то есть эти полюса являются согласованными [17]. Полученные в результате аппроксимации звена запаздывания полюса зависят от величины запаздывания, поэтому удастся значительно понизить требования к точности заданной величины запаздывания в модели, что значительно упрощает дальнейшую настройку системы управления реального объекта.

Существует множество разновидностей аппроксимаций звена запаздывания. В настоящей работе используем аппроксимацию с помощью ряда Паде:

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - \tau s/2 + (\tau s)^2/12 - \dots}{1 + \tau s/2 + (\tau s)^2/12 + \dots}.$$

Для возможности использования такой аппроксимации на практике необходимо оставить некоторое количество членов ряда. Ограничимся одним членом:

$$e^{-\tau s} \approx w_{p1}(s) = \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} = \frac{g_1(s)}{z_1(s)},$$

или двумя членами:

$$e^{-\tau s} \approx w_{p2}(s) = \frac{12 - 6\tau s + (\tau s)^2}{12 + 6\tau s + (\tau s)^2} = \frac{g_2(s)}{z_2(s)}.$$

Таким образом, приближенная модель объекта $\bar{W}_o(s)$ управления представляется произведением двух передаточных функций: ПФ без учета запаздывания и ПФ аппроксимации Паде:

$$\bar{W}_o(s) = W(s)w_{pi}(s), \quad (1)$$

где i – количество ограничиваемых членов.

В реальном объекте величина запаздывания может измениться со временем или просто быть известна недостаточно точно, поэтому важным критерием оценки качества работы системы управления является оценка влияния изменения времени запаздывания на способность системы управления сохранять устойчивость и качественные характеристики переходного процесса. Для этого будем различать величину запаздывания объекта τ_o и величину запаздывания аппроксимации τ , которые в общем случае не равны.

Управление осуществим по отклонению, то есть регулятор стоит в прямом канале с объектом, как показано на рис. 1.

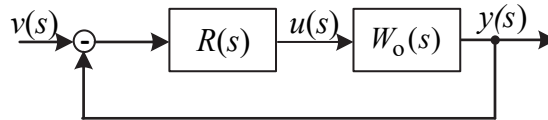


Рис. 1. Структурная схема «объект – регулятор»

Fig. 1. Object-regulator structural diagram

Полиномиальный матричный метод синтеза относится к направлению модального синтеза регуляторов, целью которого является получение желаемого расположения полюсов замкнутой системы. Полюсами замкнутой системы являются корни характеристического полинома или корни определителя характеристической матрицы вида

$$C(s) = \tilde{Y}(s)D(s) + \tilde{X}(s)N(s),$$

где $N(s) \in R[s]^{p \times m}$ и $D(s) \in R[s]^{m \times m}$ – полиномиальные матрицы правого полиномиального матричного разложения МПФ объекта $W_o(s)$, $\tilde{X}(s) \in R[s]^{m \times p}$

и $\tilde{Y}(s) \in R[s]^{m \times m}$ – полиномиальные матрицы левого полиномиального матричного разложения МПФ регулятора $W_r(s)$, p – количество выходов объекта, m – количество входов объекта, $R[s]^{p \times m}$ – множество матриц размером $p \times m$, элементы которых – полиномы от s с вещественными коэффициентами.

«Знаменателями» объекта и регулятора называем полиномиальные матрицы $D(s)$ и $\tilde{Y}(s)$ соответственно, а «числителями» – $N(s)$ и $\tilde{X}(s)$ из-за их схожего смысла с числителем и знаменателем передаточной функции. Например, степень полинома числителя должна быть меньше либо равна степени полинома знаменателя. Полиномиальная матрица является полиномом с матричными коэффициентами. Например, дана некоторая полиномиальная матрица

$M(s) \in R[s]^{q \times d}$, тогда ее можно записать в виде $M(s) = \sum_{i=1}^l M_i s^i$, где l – стар-

шая степень при s у элементов $M_i \in R^{q \times d}$ полиномиальной матрицы $M(s)$ или степень полиномиальной матрицы $M(s)$.

В данном исследовании ставится задача синтеза матричного регулятора полиномиальным матричным методом для объекта с одним входом $m=1$ и двумя выходами $p=2$, имеющего запаздывание входного сигнала. В случае одного входа или одного выхода у объекта «знаменатели» полиномиального матричного описания объекта и регулятора являются полиномами

$$W(s) = N(s)d^{-1}(s), \quad W_r(s) = \tilde{y}^{-1}(s)\tilde{X}(s),$$

а характеристическая матрица $C(s)$ упрощается до характеристического полинома вида

$$c(s) = \tilde{y}(s)d(s) + \tilde{X}(s)N(s). \quad (2)$$

Для объекта с запаздыванием управляющего сигнала предлагается сохранить полюса в замкнутой системе, полученные в результате аппроксимации звена запаздывания рядом Паде определенного порядка. Для модели объекта вида (1), где

$$w_{p_i}(s) = \frac{g_i(s)}{z_i(s)},$$

желаемый характеристический полином выбираем таким образом, чтобы он содержал полюса ПФ аппроксимации Паде:

$$c(s) = \bar{c}(s)z_i(s). \quad (3)$$

Выбрав полюса таким образом, реализуем описываемый в настоящей работе подход не устранения запаздывания, а учитывания его в замкнутой системе.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Уравнение (2) является разновидностью диофантова уравнения, в котором известными являются полиномиальные матрицы объекта $N(s)$, $D(s)$ и желаемая характеристическая матрица $C(s)$, а неизвестными – полиномиальные матрицы регулятора $\tilde{X}(s)$ и $\tilde{Y}(s)$. Для решения этого уравнения необходимо найти такие полиномиальные матрицы регулятора, при которых правая часть уравнения (2) является желаемой характеристической матрицей $C(s)$.

Необходимым условием [18–21] решения уравнения (2) является взаимная простота «знаменателя» и «числителя» $D(s)$ и $N(s)$ объекта, а степень «знаменателя» регулятора k должна быть следующей: $k \geq n - 1$, где n – степень «знаменателя» объекта. Иными словами, если $D(s)$ и $N(s)$ взаимнопростые и $k \geq n - 1$, то можно задать желаемую характеристическую матрицу $C(s)$ степени $k + n$ любого вида.

Взаимная простота этих полиномиальных матриц означает отсутствие сокращения нулей с полюсами объекта, что говорит о полной управляемости и наблюдаемости объекта.

Одним из способов решения уравнения (2) является переход к системе линейных алгебраических уравнений

$$\Re \Im = \aleph, \quad (4)$$

где $\Im = \text{diag}(G, G, \dots, G)$, $G = \begin{pmatrix} D_n & D_{n-1} & \dots & D_1 & D_0 \\ N_n & N_{n-1} & \dots & N_1 & N_0 \end{pmatrix}$, $\aleph = (C_{k+n} \ C_{k+n-1} \dots C_0)$,

$\Re = (Y_k \ X_k \ Y_{k-1} \ X_{k-1} \dots Y_0 \ X_0)$, n – старшая степень полиномиальной матрицы $D(s)$, k – старшая степень полиномиальной матрицы $\tilde{Y}(s)$, количество матриц G в матрице \Im равно $k - 1$.

Если в уравнении (4) матрица Сильвестра является неквадратной, то необходимо перейти к следующему описанию:

$$\Re_1 \Im_1 = \aleph_1, \quad (5)$$

где \Im_1 – один из базисных миноров матрицы Сильвестра \Im ; \Re_1 – матрица основных параметров регулятора; $\aleph_1 = \aleph - \bar{\Re} \bar{\Im}$, $\bar{\Re}$ – матрица свободных параметров регулятора, $\bar{\Im}$ – столбцы матрицы Сильвестра, не вошедшие в базисный минор.

Таким образом, полиномиальный матричный метод позволяет задать произвольное расположение полюсов замкнутой системы посредством решения уравнения (2). При этом не говорится о том, какое именно расположение полюсов следует выбрать, так как не существует общего решения этой задачи, а только частные.

3. РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ПРИМЕРА

В качестве объекта управления возьмем упрощенную (без учета трения и обратной ЭДС) модель двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, в которой управляющий сигнал поступает с запаздыванием (рис. 2).

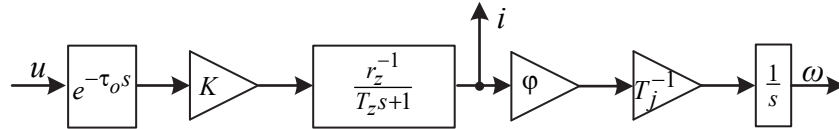


Рис. 2. Структурная схема модели объекта

Fig. 2. Structural diagram of the object model

Объект управления на рис. 2 имеет один вход – управляющий сигнал u на входе полупроводникового преобразовательного агрегата и два выхода – ток якоря i и скорость двигателя ω ; K – коэффициент усиления полупроводникового преобразовательного агрегата, r_z – активное сопротивление цепи якоря электродвигателя, T_z – электромагнитная постоянная времени цепи якоря, ϕ – магнитный поток возбуждения двигателя, T_j – инерционная постоянная времени электропривода, τ_0 – время запаздывания в объекте.

Полиномиальное матричное описание объекта на рис. 1 следующее:

$$\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} = N(s) d^{-1}(s) e^{-\tau_0 s} u = \begin{pmatrix} a s \\ b \end{pmatrix} ((T_z s + 1)s)^{-1} e^{-\tau_0 s} u,$$

$$\text{где } a = \frac{K}{r_z}, \quad b = \frac{K\phi}{r_z T_j}.$$

Данное полиномиальное матричное описание является частным случаем многоканальной системы, когда вход u системы один, а выходов несколько. При этом матричная передаточная функция замкнутой системы квадратная:

$$\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} = W_{cl}(s) \begin{pmatrix} v_i \\ v_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i^{v_i}(s) & w_i^{v_\omega}(s) \\ w_\omega^{v_i}(s) & w_\omega^{v_\omega}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_\omega \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где v_i – задание на ток якоря, v_ω – задание на скорость двигателя. Оба задания выполнить одновременно не удастся, поэтому задание на ток якоря сделаем равным нулю ($v_i = 0$), а результат функционирования системы управления будем оценивать по реакции скорости двигателя ω на его задание v_ω , т. е. по ПФ $w_\omega^{v_\omega}(s)$.

Всего рассчитаем три варианта регулятора полиномиальным матричным методом для объекта с аппроксимацией звена запаздывания рядом Паде, ограниченным одним или двумя членами. Первый вариант регулятора рассчитаем для объекта с аппроксимацией $w_{p1}(s)$ таким образом, чтобы в замкнутой системе все полюса были кратными. Второй вариант отличается от первого тем,

что один корень характеристического полинома равен корню полинома $z_1(s)$, то есть происходит сохранение полюса объекта в замкнутой системе. Третий вариант отличается от второго тем, что звено запаздывания аппроксимировано ПФ второго порядка $w_{p2}(s)$, что повышает порядок объекта и, как следствие, регулятора. Полюса замкнутой системы в третьем варианте кратные, за исключением двух полюсов объекта, полученных из полинома $z_2(s)$.

Регулятор многоканальный, состоит из двух элементов:

$$R(s) = (R_1(s) \ R_2(s)), \text{ где } R_i(s) = \frac{\tilde{x}_l^{1,i} s^l + \tilde{x}_{l-1}^{1,i} s^{l-1} + \dots + \tilde{x}_1^{1,i} s + \tilde{x}_0^{1,i}}{\tilde{y}_l s^l + \tilde{y}_{l-1} s^{l-1} + \dots + \tilde{y}_1 s + \tilde{y}_0}, \quad i=1, 2 - \text{номер столбца регулятора, } l - \text{порядок регулятора.}$$

Для первого и второго варианта расчета $l=1$, для третьего варианта $l=2$. При скалярном характеристическом полиноме многоканальный регулятор имеет одинаковый знаменатель.

Первый вариант регулятора рассчитаем так, чтобы все полюса характеристического полинома были кратными, то есть чтобы не выполнялось сохранение полюсов объекта в замкнутой системе. Выполним аппроксимацию звена запаздывания рядом Паде, ограниченным одним членом $e^{-\tau s} \approx w_{p1}(s)$, тогда

$$N(s) = \begin{pmatrix} a(-\tau s^2 + 2s) \\ b(-\tau s + 2) \end{pmatrix}, \quad d(s) = T_z \tau s^3 + s^2(2T_z + \tau) + 2s.$$

Запишем полиномиальные матрицы описания объекта через матричные коэффициенты, тогда

$$d_3 = T_z \tau, \quad d_2 = 2T_z + \tau, \quad d_1 = 2, \quad d_0 = 0,$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -a\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -b\tau \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \end{pmatrix}.$$

Строчный индекс полиномиального матричного описания объекта равен двум, следовательно минимальный порядок регулятора равен единице. Строчный индекс определяется по левому полиномиальному матричному разложению ПФ объекта и равен наибольшей степени полинома в «знаменателе». В данном случае скалярный полином знаменателя $d(s)$ распадется на полиномиальную матрицу $\tilde{D}(s)$ со степенями строк, равными одному и двум, строка со степенью два определяет строчный индекс. Возьмем регулятор минимального порядка (первого: $\tilde{y}(s) = \tilde{y}_1 s + \tilde{y}_0$, $\tilde{X}(s) = \tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0$) и запишем его коэффициенты в следующую матрицу: $\mathfrak{R} = (\tilde{y}_1 \ \tilde{X}_1 \ \tilde{y}_0 \ \tilde{X}_0)$, где $\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{1,1} & \tilde{x}_1^{1,2} \end{pmatrix}$, $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0^{1,1} & \tilde{x}_0^{1,2} \end{pmatrix}$, тогда порядок желаемого характеристического полинома равен четырем. Составим желаемый характеристический полином с кратными полюсами $c(s) = (q + s)^4$, тогда получим следующую матрицу коэффициентов желаемого характеристического полинома:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 1 & 4q & 6q^2 & 4q^3 & q^4 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Сильвестра из уравнения (4) для регулятора первого порядка $\mathfrak{S} = \text{diag}(G, G)$. Матрица Сильвестра размерностью 6×5 , ранг равен $\text{rank}(\mathfrak{S}) = 5$, следовательно, одна строка является линейно зависимой. Этой строкой может быть или третья, или пятая. Уберем строку 3 из \mathfrak{S} , тогда в соответствии с (5) получим следующие матрицы коэффициентов:

$$\mathfrak{K}_1 = (\tilde{y}_1 \quad \tilde{x}_1^{1,1} \quad \tilde{y}_0 \quad \tilde{x}_0^{1,1} \quad \tilde{x}_0^{1,2}), \quad \mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & T_z \tau & 2T_z + \tau & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -a\tau & 2a & 0 & 0 \\ 4 & 0 & T_z \tau & 2T_z + \tau & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -a\tau & 2a & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -b\tau & 2b \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_1 = (1 \quad 4q \quad 6q^2 + b\tau\tilde{x}_1^{1,2} \quad 4q^3 - 2b\tilde{x}_1^{1,2} \quad q^4).$$

В записи матрицы \mathfrak{S}_1 слева от штриховой линии указаны номера используемых строк матрицы \mathfrak{S} . Решив уравнение (5), получим

$$\tilde{y}_1 = T_z^{-1}, \quad \tilde{y}_0 = \frac{T_z q \tau (q^3 \tau^3 / 8 + q^2 \tau^2 + 3q\tau + 4) - 2(\tau + T_z)}{T_z \tau^2 (2T_z + \tau)}, \quad \tilde{x}_0^{1,2} = \frac{q^4}{2b},$$

$$\tilde{x}_1^{1,1} = \frac{T_z^2 q \tau (q^3 \tau^3 / 8 + q^2 \tau^2 + 3q\tau - 4) + 2T_z (T_z - 2q\tau^2 + 2\tau) + \tau^2}{aT_z \tau^2 (2T_z + \tau)},$$

$$\tilde{x}_0^{1,1} = \frac{T_z^2 q^3 \tau^2 (q\tau / 2 + 4) + T_z q \tau (q^3 \tau^3 / 8 + q^2 \tau^2 - 3q\tau - 4) + 2(T_z + \tau)(1 - \tilde{x}_1^{1,2} T_z \tau^2 b)}{T_z \tau^2 a (2T_z + \tau)}.$$

Свободный параметр $\tilde{x}_1^{1,2}$ можно выбрать произвольно, он не изменит характеристический полином замкнутой системы, но может изменить форму регулятора и числитель ПФ замкнутой системы.

Искомая ПФ $w_\omega^{V\omega}(s)$ в уравнении (6) с найденным регулятором следующая:

$$w_\omega^{V\omega}(s) = \frac{(2 - s\tau)(q^4 + 2s\tilde{x}_1^{1,2}b)}{2(q + s)^4}.$$

К обозначению ПФ $w_\omega^{V\omega}(s)$ добавлен индекс 1, который показывает номер варианта используемого регулятора. Одним из возможных вариантов выбора значений свободных параметров является выбор их такими, чтобы понижалась степень числителя передаточной функции объекта. Для этого в ПФ (7)

достаточно приравнять $\tilde{x}_1^{1,2} = 0$ к нулю, тогда упростится регулятор, а искомая ПФ замкнутой системы будет следующая:

$$w1_{\omega}^{v\omega}(s) = \frac{q^4(2-s\tau)}{2(q+s)^4}.$$

Как видим, в замкнутой системе нет полюсов от аппроксимации рядом Паде первого порядка.

Второй вариант регулятора рассчитаем аналогично первому варианту, но выберем желаемый характеристический полином, как в уравнении (3), где $z_1(s) = \tau s + 2$, а остальные корни характеристического полинома будем варьировать с целью исследовать их влияние на характер переходных процессов. Для простоты возьмем их кратными $\bar{c}(s) = (s+q)^3$, тогда получим $c(s) = (\tau s + 2)(s+q)^3$ со следующей матрицей коэффициентов желаемого характеристического полинома:

$$\aleph = \begin{pmatrix} \tau & 3q\tau + 2 & 3q(\tau q + 2) & q^2(\tau q + 6) & 2q^3 \end{pmatrix}.$$

Матрица Сильвестра \mathfrak{S} для первого и второго варианта расчета регуляторов одинаковая, поэтому матрицы \mathfrak{S}_1 и \aleph_1 также одинаковые. Изменится матрица коэффициентов желаемого характеристического полинома со свободными параметрами:

$$\aleph_1 = \begin{pmatrix} \tau & 3q\tau + 2 & 3q(\tau q + 2) + b\tau\tilde{x}_1^{1,2} & q^2(\tau q + 6) - 2b\tilde{x}_1^{1,2} & 2q^3 \end{pmatrix}.$$

В матрице Сильвестра, как и в первом варианте, исключили третью строку. Получили следующие коэффициенты регулятора:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= T_z^{-1}, \quad \tilde{y}_0 = \frac{T_z q(q^2\tau^2 + 6q\tau + 12) - 4}{2T_z(2T_z + \tau)}, \quad \tilde{x}_1^{1,1} = \tau \frac{T_z q(q^2T_z\tau + 6qT_z - 6) + 2}{2T_z a(2T_z + \tau)}, \\ \tilde{x}_0^{1,1} &= \frac{T_z q(4q^2T_z\tau + 12qT_z - 12 + q^2\tau^2) - 2\tilde{x}_1^{1,2}T_z b(T_z + \tau) + 4}{2T_z a(2T_z + \tau)}, \quad \tilde{x}_0^{1,2} = \frac{q^3}{b}. \end{aligned}$$

Искомая ПФ $w_{\omega}^{v\omega}(s)$ в уравнении (6) с найденным регулятором следующая:

$$w2_{\omega}^{v\omega}(s) = \frac{(2-s\tau)(q^3 + \tilde{x}_1^{1,2}sb)}{(2+s\tau)(q+s)^3}. \quad (7)$$

Приравняем $\tilde{x}_1^{1,2}$ к нулю, тогда упростится регулятор, а искомая ПФ замкнутой системы будет следующая:

$$w2_{\omega}^{v\omega}(s) = \frac{2-s\tau}{2+s\tau} \frac{q^3}{(q+s)^3}.$$

Как видим, в передаточной функции замкнутой системы содержится ПФ звена запаздывания, то есть не происходит борьбы с запаздыванием.

Третий вариант регулятора рассчитаем, выполнив аппроксимацию звена запаздывания рядом Паде, ограниченным двумя членами: $e^{-\tau s} \approx w_{p2}(s)$, тогда

$$e^{-\tau s} \approx w_{p2}(s) = \frac{12 - 6\tau s + (\tau s)^2}{12 + 6\tau s + (\tau s)^2} = \frac{g_2(s)}{z_2(s)}.$$

Вычисления аналогичны второму варианту расчета регулятора, поэтому не приведены. Из-за повышения порядка объекта на единицу повысился порядок регулятора так же на единицу, что привело к повышению порядка характеристического полинома на два порядка, который задаем по тому же принципу, как и во втором варианте $c(s) = (12 + 6\tau s + (\tau s)^2)(q + s)^4$. Ниже приведена ПФ, связывающая задание на скорость двигателя и саму скорость:

$$w3_{\omega}^{v\omega}(s) = \frac{12 - 6\tau s + (\tau s)^2}{12 + 6\tau s + (\tau s)^2} \frac{q^4}{(q + s)^4}.$$

Как видим, $w2_{\omega}^{v\omega}(s)$ и $w3_{\omega}^{v\omega}(s)$ содержат в своем составе ПФ аппроксимаций рядом Паде $w_{p1}(s)$ и $w_{p2}(s)$.

Численное моделирование результатов. На рис. 3 приведена структурная схема замкнутой системы, в которой задание на ток якоря равно нулю ($v_i = 0$). При расчетах использовалась аппроксимация звена запаздывания, но при моделировании системы управления на входе стоит звено реального запаздывания $e^{-\tau_0 s}$. Во второй части моделирования величина запаздывания в объекте отличается от величины запаздывания в модели.

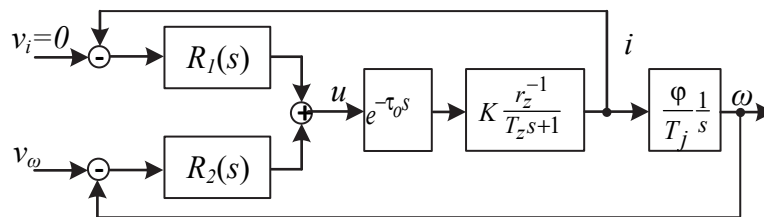


Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы

Fig. 3. Structural diagram of a closed-loop system

Выполним моделирование системы управления со следующими параметрами объекта: $T_z = 0.01$, $K = 1$, $r_z = 1$, $\phi = 0.2$, $T_j = 0.1$, откуда получим $a = 1$, $b = 2$. Запаздывание управляющего сигнала выбираем сопоставимое со временем переходного процесса объекта без запаздывания, при $T_z = 0.01$ время переходного процесса составляет приблизительно $t_{\Pi} \approx 0.03$ с. Запаздывание объекта выберем больше, чем время переходного процесса $\tau_0 = 0.1$ с.

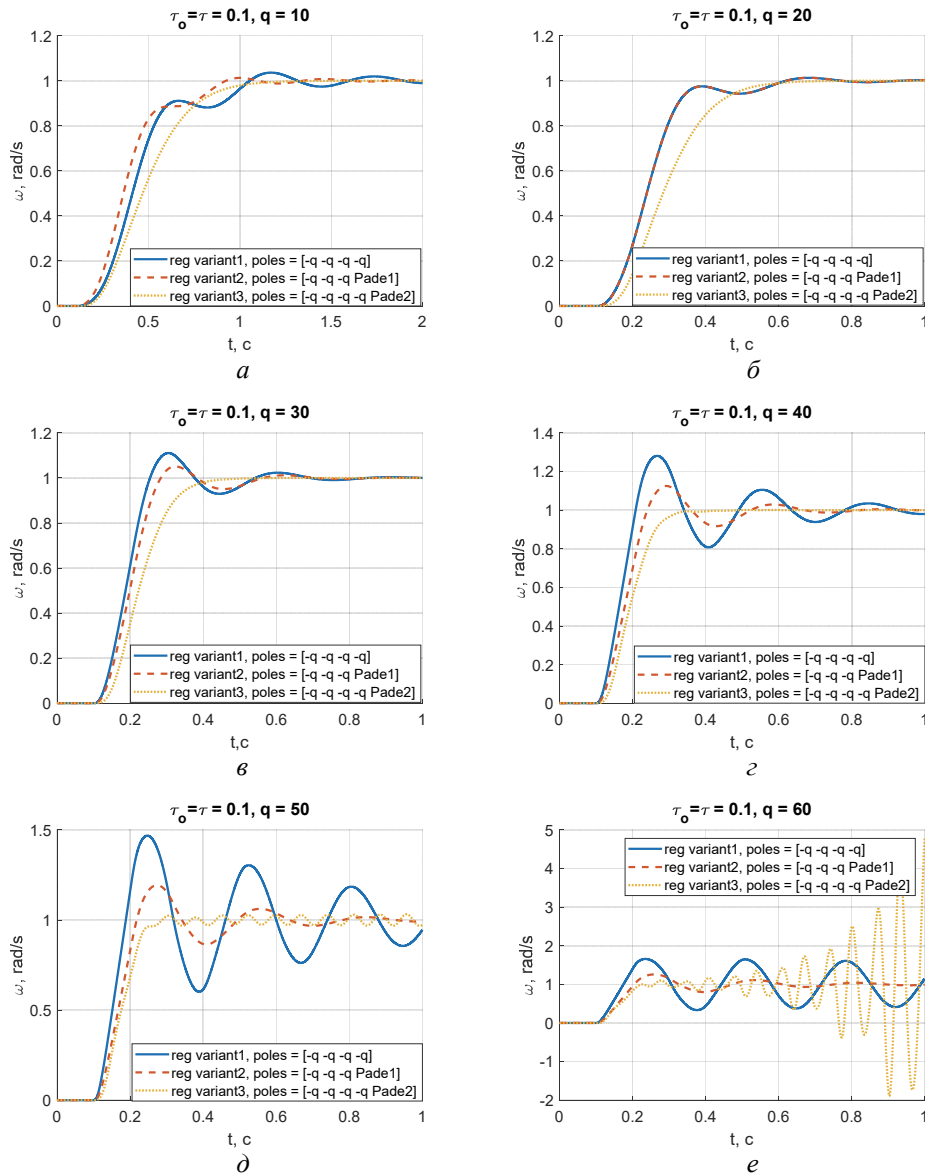


Рис. 4. Графики переходных процессов при $v_i = 0$, $v_\omega = 1$ и различных q замкнутой системы для трех вариантов расчета регулятора:

a – расстояние от мнимой оси до кратных полюсов $q = 10$; \bar{b} – при $q = 20$; \bar{b} – при $q = 30$; \bar{b} – при $q = 40$; \bar{b} – при $q = 50$; \bar{b} – при $q = 60$

Fig. 4. Transients at $v_i = 0$, $v_\omega = 1$ and different poles q of the closed-loop system for three variants of regulator calculations:

a is the distance to an imaginary axis at $q = 10$; \bar{b} is at $q = 20$; \bar{b} is at $q = 30$; \bar{b} is at $q = 40$; \bar{b} is at $q = 50$; \bar{b} is at $q = 60$

На рис. 4 представлены графики переходных процессов трех систем управления, полученных после расчета трех вариантов регуляторов. В первом варианте (reg variant 1) выбран характеристический полином $c(s) = (q + s)^4$,

во втором варианте (reg variant 2) $c(s) = (\tau s + 2)(s + q)^3$ и в третьем варианте (reg variant 3) $c(s) = (12 + 6\tau s + (\tau s)^2)(q + s)^4$. При $\tau = \tau_0 = 0.1$ во втором варианте расчета всегда был полюс $\text{Pade1} = -20$, в третьем варианте расчета всегда были два полюса: $\text{Pade2} = -30 \pm 17.3i$.

Показатели качества переходных процессов в полученных системах управления для трех вариантов регуляторов

Quality indicators of transients in the obtained control systems for three variants of regulators

Вариант регулятора	$q = 10$	$q = 20$	$q = 30$	$q = 40$	$q = 50$
Время переходного процесса, с					
reg variant 1	0.98	0.53	0.48	0.7	1.5
reg variant 2	0.83	0.53	0.32	0.485	0.59
reg variant 3	0.89	0.48	0.355	0.286	Не уст.
Перерегулирование, %					
reg variant 1	3.6	1.3	11	28	46
reg variant 2	1.2	1.3	4.7	12	20
reg variant 3	0	0	0	0	Не уст.
Время от начала переходного процесса до первого пересечения графиком линии установившегося значения, с					
reg variant 1	1	0.6	0.25	0.2	0.19
reg variant 2	0.91	0.6	0.27	0.24	0.21
reg variant 3	1.4	0.8	0.5	0.5	Не уст.

Аппроксимация звена запаздывания звеном первого или второго порядка позволяет применить полиномиальный метод синтеза для задания расположения полюсов в замкнутой системе. На рис. 3 видно, что аппроксимация звена запаздывания звеном второго порядка значительно повышает качество переходных процессов, которое заключается в отсутствии перерегулирования и высоком быстродействии при выборе варьируемых полюсов $q \leq 40$. В то же время это влечет за собой повышение порядка регулятора, что не всегда реализуемо. Дальнейшее увеличение расстояния от ближайшего полюса замкнутой системы до мнимой оси приводит к неустойчивости системы управления.

Сохранение полюса аппроксимации звена запаздывания $\text{Pade1} = -20$ в замкнутой системе не дало весомого прироста качества переходных процессов. Например, графики переходных процессов reg variant 1 при $q = 30$ и reg variant 2 при $q = 40$ практически идентичны, reg variant 1 при $q = 40$ и reg variant 2 при $q = 50$ тоже практически идентичны.

Несовпадение времени запаздывания объекта и модели может происходить из-за износа изделия, недостаточной априорной информации о нем или других причин. Увеличим время запаздывания объекта по сравнению с временем запаздывания модели на 50 %. При $\tau_0 = 0.15$ полюса аппроксимации звена объекта запаздывания первого и второго порядка равны $\text{roots}(\tau_0 s + 2) = -13.3$ и $\text{roots}(12 + 6\tau_0 s + (\tau_0 s)^2) = -20 \pm 11.5i$ соответственно.

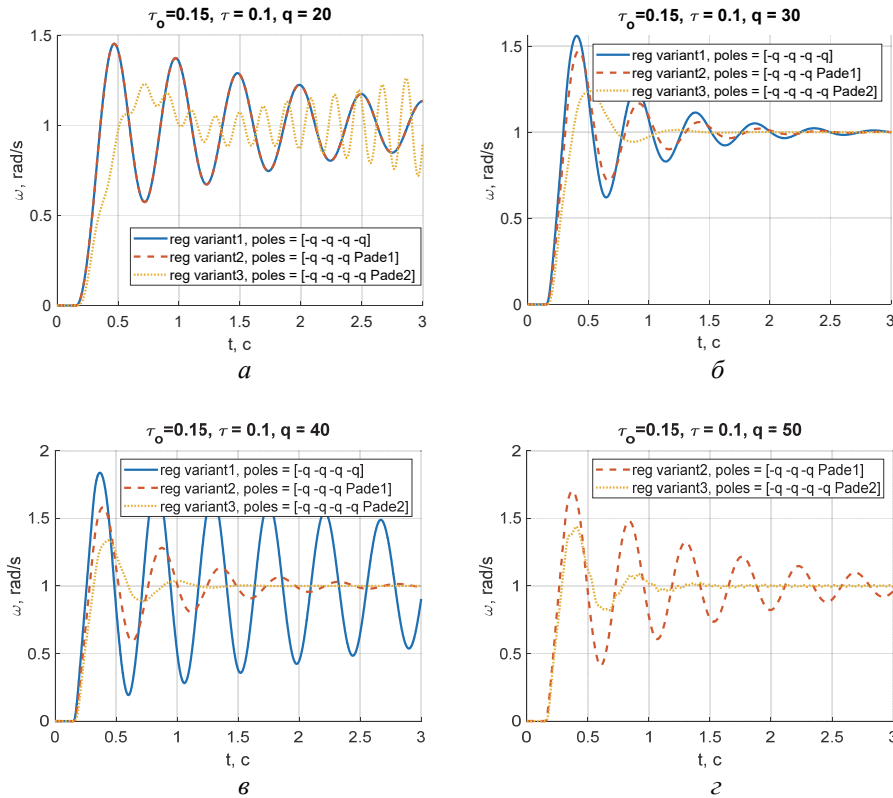


Рис. 5. Графики переходных процессов при $v_i = 0$, $v_\omega = 1$ и расстояние до мнимой оси q замкнутой системы для трех вариантов расчета регулятора при $\tau_0 \neq \tau$:

а) $q = 20$; б) $q = 30$; в) $q = 40$; г) $q = 50$

Fig. 4. Transients at $v_i = 0$, $v_\omega = 1$ and the distance to imaginary axis q of the closed-loop system for three variants of regulator calculations under $\tau_0 \neq \tau$:

a is at $q = 20$; б is at $q = 30$; в is at $q = 40$; г is at $q = 50$

На рис. 5, а видно, что при $q = 20$ переходные процессы системы управления с первым и вторым вариантами регуляторов одинаковы, так как $\text{Pade1} = -q = -20$, система управления с ними устойчива, но колебательная. Система управления с третьим вариантом регулятора неустойчива. На рис. 4, б переходные процессы при $q = 30$ всех трех вариантов регуляторов устойчивые. С третьим вариантом регулятора, как и в случае $\tau_0 = \tau$, переходной процесс имеет значительно меньшее перерегулирование и время переходного процесса по сравнению с первым и вторым вариантами регуляторов. На рис. 4, в переходной процесс системы с первым вариантом регулятора близок к границе устойчивости, а на рис. 4, г он не отражен, так как система управления стала неустойчивой. Как и в случае $\tau_0 = \tau$, переходные процессы в системе управления со вторым вариантом регулятора при $q = 40$ практически эквивалентны системе управления при $q = 30$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезирована система управления скоростью вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и запаздыванием управляющего сигнала. Время запаздывания выбрано в три раза большее, чем время переходного процесса в объекте, что существенно затрудняет управление объектом. Показано, что управление такими объектами успешно выполняется с помощью регуляторов, рассчитанных полиномиальным матричным методом синтеза, при аппроксимации звена запаздывания рядом Паде с одним или двумя членами. Регулятор получен многоканальный, работающий по отклонению от тока якоря и от скорости вращения двигателя.

Показано, что повышение порядка аппроксимации звена запаздывания повышает качественные показатели переходного процесса, что можно увидеть по таблице. Сохранение полюсов $z_i(s)$ ПФ (3) в замкнутой системе для $z_1(s)$ (второй вариант регулятора) существенно не улучшило качество переходных процессов по сравнению с первым вариантом регулятора, при котором не происходило сохранения полюсов. Для третьего варианта расчета регуляторов при сохранении $z_2(s)$ удалось значительно улучшить качество переходных процессов по сравнению с первым и вторым вариантом расчета.

Показано, что при полиномиальном матричном методе синтеза регуляторов система управления устойчива к изменению времени запаздывания даже при увеличении времени запаздывания на 50 % по сравнению с временем запаздывания модели, но в этом случае выбор расположения полюсов становится сложнее, так как область устойчивости становится уже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митрошин В.Н., Лойко А.Ю., Сазонов Д.О., Филиппова Е.В. Система автоматического регулирования температурного распределения расплава полимера в зоне дозирования одночервячного экструдера // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2007. – № 1(19). – С. 35–40.
2. Рудобаица С.П., Зуева Г.А. Математическое моделирование процесса сушки материала в аппарате с псевдооживленным слоем // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. – 2019. – Т. 8. – С. 77–80.
3. Sarma K.L.N., Chidambaram M. Centralized PI/PID controllers for non-square systems with RHP zeros // Journal of the Indian Institute of Science. – 2005. – Vol. 85 (4). – P. 201–214.
4. Decoupling internal model control for non-square process with time delays / J. Qibing, G. Yan, L. Ziyi, S. Anan // International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. – IEEE, 2010. – P. 898–901. – DOI: 10.1109/ICMTMA.2010.133.
5. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. – М.: Машиностроение, 1974. – 327 с.
6. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. – СПб.: Лань, 2010. – 192 с.
7. Тютиков В.В., Тарарыкин С.В. Робастное модальное управление технологическими объектами. Ивановский гос. энергетический ун-т имени В.И. Ленина, 2006. – 255 с.
8. Тарарыкин С. В., Тютиков В. В. Робастное модальное управление динамическими системами // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 5. – С. 41–55.
9. Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В. Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений при стабилизации трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 2 (43). – С. 39–46.

10. Шоба Е.В. Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.
11. Вороной В.В. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
12. Воевода А.А., Филушов В.Ю., Шипагин В.И. Полиномиальный метод синтеза регуляторов для частного случая многоканальных объектов с одной входной переменной и несколькими выходными // Безопасность цифровых технологий. – 2021. – № 3 (102). – С. 21–42.
13. Воевода А.А., Филушов В.Ю. Многоконтурная система подчиненного регулирования в многоканальном неквадратном представлении // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2021. – № 2 (76). – С. 90–101.
14. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu., Bobobekov K.M. Polynomial matrix and multiloop control methods synthesis comparison for a DC Drive // 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, Russian Federation, 2021. – P. 917–923.
15. Воевода А.А., Филушов В.Ю. Полиномиальное матричное разложение при синтезе неквадратных САУ // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 1 (81). – С. 21–38.
16. Филушов В.Ю. Полиномиальный метод синтеза регуляторов по задающему и возмущающим воздействиям // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 1 (85). – С. 93–108.
17. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
18. Chen C.T. Linear system theory and design. – 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
19. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 1. – San Rafael, CA: Morgan and Claypool Publ., 2011. – 184 p.
20. Vidyasagar M. Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 2. – San Rafael, CA: Morgan and Claypool Publ., 2011. – 227 p.
21. Antsaklis P.J., Michael A.N. Linear systems. – New York: McGraw-Hill, 1997. – 670 p.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных систем. E-mail: ucit@ucit.ru

Филушов Владислав Юрьевич, кандидат технических наук, старший преподаватель Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных систем. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Voevoda Alexander Alexandrovich, D.Sc, professor, professor at the automation department, Novosibirsk State Technical University. His research interests include multi channels systems synthesis. E-mail: ucit@ucit.ru

Filiushov Vladislav Yu., PhD, senior lecturer in the Novosibirsk State Technical University. His research interests include multi channels systems synthesis. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Polynomial matrix method for synthesizing regulators for objects with a control signal delay*

A.A. VOEVODA^a, V.Yu. FILIUSHOV^b

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a ucit@ucit.ru ^b filiushov.vladislav@gmail.com

Abstract

In this paper, we consider the synthesis of control systems for objects with a control signal delay by a polynomial matrix method, which is used to locate the poles and, if possible, zeros in the required position. The controller is calculated from the output, i.e. only from the measured values in the plant, which is an advantage over other modal direction synthesis methods where a state vector must be used. It is proposed to approximate the delay link with a Padé series with a limited number of terms, thus obtaining transfer functions of the first and second orders. The desired characteristic polynomial of the closed system is chosen so that it contains the denominators of the approximation transfer functions, which will keep their poles in the closed system.

The polynomial synthesis method makes it possible to calculate multichannel controllers both for objects with multiple inputs and multiple outputs (multi input - multi output, MIMO) and for objects with one input and several outputs (single input - multi output, SIMO). The latter include a DC motor with independent excitation, where the armature current and rotor speed are outputs, and the control signal applied to the semiconductor converter is the input. In this work, the control signal is formed with a delay exceeding the time of the transient process of the engine, which significantly affects its dynamics. By applying the proposed approach, it was possible to synthesize a rotor speed control system that is resistant to changes in the delay time in a fairly wide range.

Keywords: polynomial synthesis method, polynomial matrix decomposition, synthesis, multichannel controller, electromechanical system, transport delay, Pade approximation

REFERENCES

1. Mitroshin V.N., Lojko A.YU., Sazonov D.O., Filippova E.V. Sistema avtomaticheskogo regulirovaniya temperaturnogo raspredeleniya raspava polimera v zone dozirovaniya odnochervyachnogo ekstrudera [Automatic control system for the temperature distribution of the polymer melt in the dosing zone of a single-screw extruder] // *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki – Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Engineering sciences.* – 2007. – № 1(19). – С. 35–40 pp.
2. Rudobashta S.P., Zueva G.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessa sushki materiala v apparate s psevdoozhizhennym sloem [Mathematical modeling of the material drying in the apparatus with fluidized bed]. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT = Mathematical Methods in Technique and Technologies – MMTT*, 2019, vol. 8, pp. 77–80.
3. Sarma K.L.N., Chidambaram M. Centralized PI/PID controllers for non-square systems with RHP zeros. *Journal of the Indian Institute of Science*, 2005, vol. 85 (4), pp. 201–214.
4. Qibing J., Yan G., Ziyi L., Anan S. Decoupling internal model control for non-square process with time delays // International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. IEEE, 2010, pp. 898–901. DOI: 10.1109/ICMTMA.2010.133.
5. Guretskii Kh. *Analiz i sintez sistem upravleniya s zapazdyvaniem* [Analysis and synthesis of control systems with transport delay]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974. 327 p.
6. Prasolov A.V. *Dinamicheskie modeli s zapazdyvaniem i ikh prilozheniya v ekonomike i inzhenerii* [Dynamic Models with Delay and Their Applications in Economics and Engineering]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2010. 192 p.
7. Tyutikov V.V., Tararikin S.V. Robastnoe modalnoe upravlenie tehnologicheskimi objektami [Robust modal control of plant objects]. *Ivanovskiy gosudarstvenniy energeticheskii universitet – Ivanovo state energetical university*, 2006. – 255 p.

* Received 23 October 2022.

8. Tararikin S.V., Tyutikov V.V. Robustnoe modalnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami [Robust model control for dynamic systems]. *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63 (5), pp. 730–742. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 2002, no. 5, pp. 41–55.

9. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V., Shoba E.V. Modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya: razdelenie dvizhenii pri stabilizatsii trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis method using a polynomial decomposition: the separation of motions in the stabilization of the three-mass plant]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2 (43), pp. 39–46.

10. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

11. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [Design of multi-channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

12. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu., Shipagin V.I. Polinomial'nyi metod sinteza regulyatorov dlya chastnogo sluchaya mnogokanal'nykh ob"ektov s odnoi vkhodnoi peremennoi i neskol'kimi vykhodnymi [Polynomial method for the synthesis of regulators for the special case of multichannel objects with one input variable and several output values]. *Bezopasnost' tsifrovyykh tekhnologii = Digital Technology Security*, 2021, no. 3 (102), pp. 21–42. DOI: 10.17212/2782-2230-2021-3-21-42.

13. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Mnogokonturnaya sistema podchinennogo regulirovaniya v mnogokanal'nom nekvadratnom predstavlenii [Multiloop subordinate control system in the non-square multivariable representation]. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University*, 2021, no. 2 (76), pp. 90–101.

14. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu., Bobobekov K.M. Polynomial matrix and multiloop control methods synthesis comparison for a DC Drive // 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russian Federation, 2021, pp. 917–923.

15. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Polinomial'noe matrichnoe razlozhenie pri sinteze nekvadratnykh SAU [Polynomial matrix decomposition for the synthesis of non-square control systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2021, no. 1 (81), pp. 21–38.

16. Filiushov V.Yu. Polinomial'nyj metod sinteza regulyatorov po zadayushchemu i vozmushchayushchim vozdeystviyam [Polynomial synthesis method of regulators to reference and disturbance signals] // *Sistemy analiza i obrabotki dannykh – Systems of Analysis and Data Processing*. – 2022. – № 1 (85). – С. 93–108 pp.

17. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [The theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.

18. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 2nd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

19. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 1. San Rafael, CA, Morgan and Claypool Publ., 2011. 184 p.

20. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 2. San Rafael, CA, Morgan and Claypool Publ., 2011. 227 p.

21. Antsaklis P.J., Michael A.N. *Linear systems*. New York, McGraw-Hill, 1997. 670 p.

Для цитирования:

Воевода А.А., Филушов В.Ю. Полиномиальный матричный метод синтеза регуляторов для объектов с запаздыванием управляющего сигнала // Системы анализа и обработки данных. – 2023. – № 1 (89). – С. 7–24. – DOI: 10.17212/2782-2001-2023-1-7-24.

For citation:

Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Polynomial'nyi matrichnyi metod sinteza regulyatorov dlya ob"ektov s zapazdyvaniem upravlyayushchego signala [Polynomial matrix method for synthesizing regulators for objects with a control signal delay]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 1 (89), pp. 7–24. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-1-7-24.