

Повышение пространственного разрешения цифровых голограмм с помощью одномерного субпиксельного сканирования*

В.И. ГУЖОВ^а, Д.С. ХАЙДУКОВ, К.В. ЗАХАРОВ, О.Ю. МАЙЕР

*630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет*

^а v.guzhov@corp.nstu.ru

В статье рассмотрен вопрос повышения пространственного разрешения при регистрации цифровых голограмм. На практике дискретизация осуществляется получением усредненных значений сигнала по площади датчиков. Разрешение определяется размером площадки датчика, по которой происходит усреднение. Метод повышения разрешения основан на уравнении дискретизации сигналов, полученных методом субпиксельного сдвига при использовании обобщенных функций. Субпиксельный сдвиг осуществляется с помощью пространственного сдвига на величину меньшую, чем элемент разрешения.

Для дискретизации могут использоваться апертуры с площадью различной формы, например, эллиптические, ромбовидные, гексагональные, но наиболее часто используются прямоугольные апертуры. Уравнение дискретизации, полученное с использованием обобщенных функций, предусматривает использование двумерной апертурной функции. Ниже рассмотрен способ повышения разрешения при использовании одномерной функции. Это можно сделать исходя из структуры голографического сигнала. При этом можно использовать субпиксельный сдвиг только в одном направлении.

Цифровая голография отличается тем, что для регистрации сигнала используются матрицы фотодетекторов, которые имеют пространственное разрешение значительно меньшее, чем фотографические среды, применяемые в традиционных методах голографии. Поэтому в цифровой голографии используются оптические схемы с малыми углами между интерферирующими волновыми полями. Однако при этом накладываются определенные ограничения на форму исследуемых объектов. Если объекты имеют форму поверхности, значительно отличающуюся от плоской, необходимо использовать традиционные оптические схемы.

В статье приведено математическое моделирование метода повышения разрешения на основе восстановления сигналов из реальной голограммы, полученных обычным способом. Повышение разрешения достигается использованием одномерного субпиксельного сдвига.

Использование одномерного субпиксельного сдвига позволяет значительно упростить оптическую схему голографической установки.

* *Статья получена 16 января 2022 г.*

Ключевые слова: цифровая голография, дискретизация, частота дискретизации, пространственные частоты, обобщенные функции, преобразование Фурье, спектр, сверхразрешение, субпиксельный сдвиг

ВВЕДЕНИЕ

Для получения тонких голограмм (голограмм, в которых толщиной эмульсии можно пренебречь) наиболее часто используется внеосевая схема оптической установки, предложенная Э. Лейтом и Ю. Упатниексом [1–4]. При восстановлении действительного и мнимого изображений из голограммы для устранения влияния центрального пучка используются углы между интерферирующими волновыми полями порядка 30...60 градусов. При таких условиях для регистрации голограмм требуются фотографические среды с большим пространственным разрешением 2000...4000 линий/мм.

В последние годы усилия многих исследователей направлены на разработку методов цифровой голографии [5–8]. Основным отличием этих методов от традиционных является использование электронных устройств для регистрации оптических сигналов. Современные устройства регистрации, основанные на использовании матриц фотоприемников, имеют разрешение около 200...300 линий/мм. Поэтому для получения голограмм используются оптические схемы с углами порядка 1...5 градусов между интерферирующими волновыми полями [9]. Однако при таких небольших углах интерференции возможна запись голограмм только для объектов с формой поверхности, близкой к плоской.

Целью настоящей статьи является исследование нового метода получения синтезированных голограмм из набора голограмм, зафиксированных устройствами ввода оптических изображений с низким разрешением для получения изображений объектов с высоким разрешением на основе субпиксельных сдвигов. В радиотехнике данный подход называется методом синтезированной апертуры (synthetic aperture). В оптической литературе такие методы часто называются методами сверхразрешения при получении изображений [10–14].

1. СИНТЕЗ ВЫСОКОРАЗРЕШАЮЩИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИЗ НАБОРА НИЗКОРАЗРЕШАЮЩИХ РАСТРОВ ПРИ СМЕЩЕНИИ ОБЪЕКТА НА СУБПИКСЕЛЬНУЮ ВЕЛИЧИНУ

Непрерывный аналоговый сигнал можно представить последовательностью его значений (отсчетов). Эти отсчеты берутся в точках, отделенных друг от друга некоторым интервалом, который называется интервалом дискретизации. Число интервалов дискретизации, при которых по дискретным значениям всегда можно точно восстановить непрерывный сигнал, определяется теоремой Уиттекера – Котельникова – Шеннона (Whittaker – Kotelnikov – Shannon) [15–18]. Однако теория дискретизации основана на допущении бесконечного числа отсчетов в бесконечно малых точках (с помощью бесконечной гребенки Дирака) [19].

Реальная дискретизация оптического изображения осуществляется измерением сигнала с помощью ограниченной матрицы детекторов, состоящей из элементов с некоторой ограниченной площадкой (апертурой). Числовые зна-

чения отсчетов получают путем пространственного интегрирования на каждой из апертур. В этом случае процесс дискретизации можно описать с помощью аппарата обобщенных функций [20, 21].

Если имеется возможность получения изображений с низким разрешением с пространственным сдвигом на субпиксельную величину, т. е. на шаг меньший, чем элемент разрешения, то принципиально можно восстановить изображение с разрешением, определяемым величиной этого шага.

В [22, 23] приведен алгоритм для дискретизации функции с помощью конечного набора апертур. Если синтезировать изображение, состоящее из последовательного повторения отсчетов изображений с низким разрешением, полученных при субпиксельном сдвиге, то в области Фурье получим следующее выражение:

$$F_{\tau, \Delta x}(\omega) = \left(\left[F(\omega) \otimes \text{sinc} \left(\frac{\omega N}{2} \right) \right] \mathfrak{Z}(\text{rect}_{\tau}(\omega)) \right) \otimes \text{comb}_{\frac{2\pi}{\Delta x}}(\omega), \quad (1)$$

где $\left(\left[F(\omega) \otimes \text{sinc} \left(\frac{\omega N}{2} \right) \right] \mathfrak{Z}(\text{rect}_{\tau}(\omega)) \right)$ – спектр синтезированной функции.

Из него можно выделить спектр исходного сигнала с разрешением, определяемым субпиксельным сдвигом $\left[F(\omega) \otimes \text{sinc} \left(\frac{\omega N}{2} \right) \right]$. Это можно сделать, нормировав этот спектр на спектр апертурной функции $\mathfrak{Z}(\text{rect}_{\tau}(\omega))$.

В [24] рассмотрен вопрос о получении изображений из синтезированных голограмм с помощью двумерного субпиксельного сканирования. Для осуществления сдвига необходимо устройство, осуществляющее перемещение по координатам x и z (координаты размещения голограммы). Однако природа получения голограммы позволяет значительно упростить этот процесс. В следующем разделе показана возможность восстановления изображений из синтезированных голограмм при использовании сканирования только по одной координате.

2. НЕОБХОДИМОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ГОЛОГРАММ

Голограмма является результатом интерференции двух когерентных пучков. Один из пучков отражается от объекта, другой является опорным.

Например, при взаимодействии двух плоских пучков на некотором экране возникает картина полос, показанная на рис. 1 (слева). Расстояние между центрами интерференционных полос можно найти из следующего выражения:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta_x / 2)}, \quad (2)$$

где θ_x – угол между пучками в плоскости x ; λ – длина волны.

При увеличении угла между интерферирующими пучками расстояние между интерферирующими полосами уменьшается. Если $\lambda = 0,6$ мкм, то при угле 60 градусов расстояние соизмеримо с длиной волны. При угле 30 градусов

$\Delta x = 1,16$ мкм; при угле 15 градусов $\Delta x = 3,8$ мкм; при угле один градус $\Delta x = 34,4$ мкм.

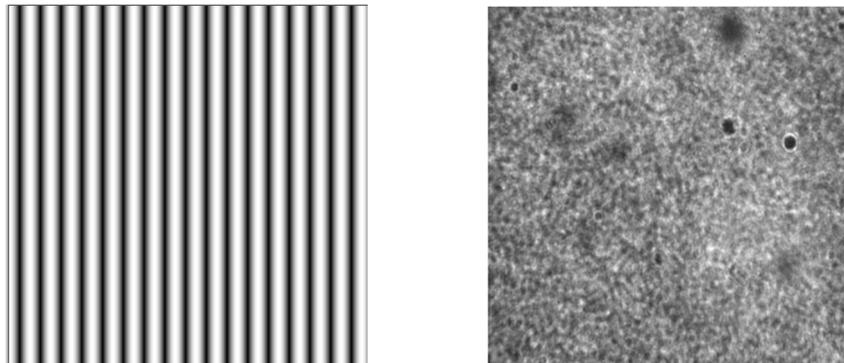


Рис. 1. Интерференция двух плоских волн (слева) и участок реальной голограммы (3,5 мм × 3,5 мм) под микроскопом (справа)

Fig. 1. Interference of two plane waves (left) and a section of a real hologram (3.5 mm × 3.5 mm) under a microscope (right)

По теореме Котельникова, чтобы восстановить картину интерферирующих полос, необходимо взять не менее двух точек на полосу. При этом необходимое разрешение устройства регистрации должно быть как минимум в два раза меньше расстояния между полосами. Физический размер пикселя в матрице фотоприемников Canon EOS M50 составляет 3,7 мкм. Поэтому при использовании матрицы такого типа необходимо использовать методы субпиксельного сканирования.

Голограмма – это интерференционная картина между волновым полем, отраженным от диффузного объекта сложной формы и известной опорной волной. Поэтому необходимое разрешение при дискретизации необходимо выбирать больше, чем при интерференции плоских пучков.

Интерференционные полосы на голограмме не видны даже при большом увеличении. Причиной этого являются спеклы (англ. *speckle* – крапинка, пятнышко). Спекл-структуры возникают из-за пространственного ограничения спектров интерферирующих волн. Средний размер спеклов можно определить с помощью выражения

$$b = 1,22 \frac{\lambda L}{d}, \quad (3)$$

где L – расстояние от рассеивающей поверхности до плоскости наблюдения, d – диаметр освещенной поверхности.

Размер спеклов может существенно превышать период полос. Например, при $L = 150$ мм, $d = 20$ мм и $\lambda = 0,6$ мкм средний размер спекла будет около 55 мкм. Таким образом, картина полос на голограмме будет маскироваться спекл-структурой. В результате проследить интерференционные полосы на голограмме явно не удастся даже при большом увеличении (рис. 1 справа). Однако ориентация полос будет сказываться на восстановлении изображений их голограмм.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИЗ СИНТЕЗИРОВАННЫХ ГОЛОГРАММ ПРИ СУБПИКСЕЛЬНОМ СДВИГЕ ПО ОДНОЙ КООРДИНАТЕ

На рис. 2 (слева) показана оцифрованная голограмма размером 2048×2048 и восстановленное из нее изображение (справа). Голограмма сканировалась на микроскопе с увеличением в 8 раз. Физический размер оцифрованного участка $3,5 \times 3,5$ мм.

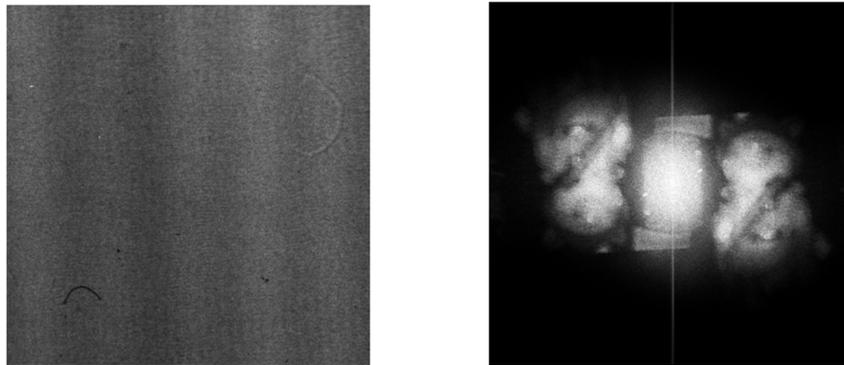


Рис. 2. Действительное и мнимое изображение (справа), восстановленное из отсканированной голограммы (слева) (2048×2048 точек)

Fig. 2. An image (right) reconstructed from a scanned hologram (left) (2048×2048 pixels)

На рис. 3 (слева) показана голограмма размером 256×256 , полученная усреднением по окрестности 8×8 , и восстановленное из нее изображение (справа). Каждая точка образуется как усредненная точка участков изображений размером 8×8 . Видно, что разрешения голограммы уже не хватает для нормального восстановления изображений.

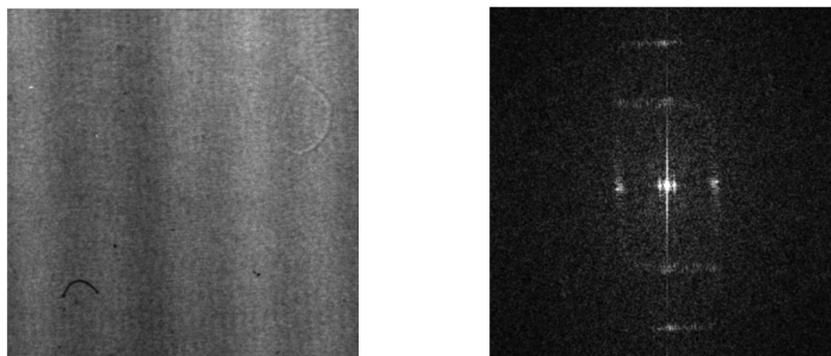


Рис. 3. Голограмма после усреднения с окном 8×8 (256×256 пикселей) и восстановленные из нее действительное и мнимое изображения

Fig. 3. A hologram after averaging with a window of 8×8 (256×256 pixels) and real and virtual images reconstructed from it

На рис. 4. (вверху) показана голограмма, сгенерированная с субпиксельными сдвигами только по оси x . Размер выбранной окрестности 8×8 . Размер по оси y в 8 раз больше, чем на рис. 3. Реальное и мнимое изображения, восстановленные из такой голограммы, показаны на рис. 4 (внизу).

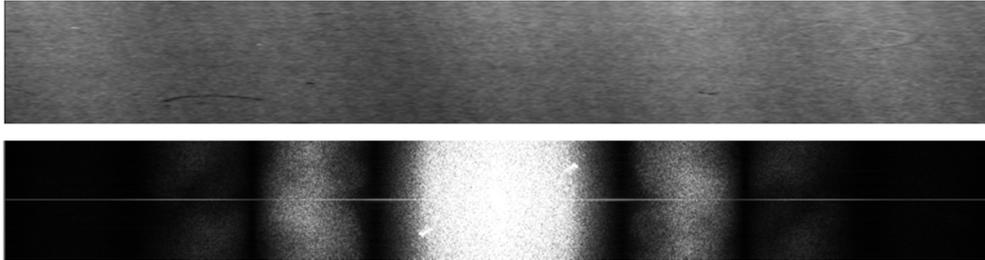


Рис. 4. Изображение (внизу), восстановленное из сгенерированной голограммы (вверху) (2048×256 точек)

Fig. 4. An image (bottom) reconstructed from the generated hologram (top) (2048×256 pixels)

Вид одномерной апертурной функции при использовании окрестности с окном 8×8 показан на рис. 5.

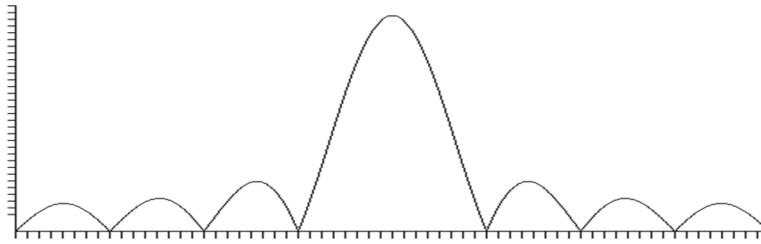


Рис. 5. Апертурная функция (размер по x – 2048 точек / пикселей)

Fig. 5. Aperture function (x size – 2048)

На рис. 6 показано восстановленное из голограммы изображение после поэлементного деления спектра сгенерированной голограммы на спектр апертурной функции при увеличении размера оцифрованной голограммы по оси y 2048×8192 точек ($3,5 \text{ мм} \times 14 \text{ мм}$).

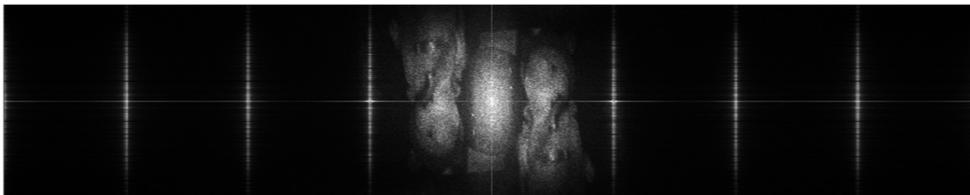


Рис. 6. Восстановленное изображение из сгенерированной голограммы после поэлементного деления спектра сгенерированной голограммы на спектр одномерной апертурной функции

Fig. 6. A reconstructed image from the generated hologram after the element-wise division of the spectrum of the generated hologram into the spectrum of the one-dimensional aperture function

Этот пример показывает возможность восстановления изображений при регистрации голограммы с низкой частотой дискретизации только при сдвиге по координате x .

Интерференционные полосы расположены на голограмме вертикально (по оси y). Их не видно из-за наложения спекл-структуры (рис. 2, слева). Если осуществить субпиксельный сдвиг по координате y и затем восстановить изображение с помощью одномерной апертурной функции, то повышения разрешения не произойдет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен метод восстановления изображений из цифровых голограмм, полученных с недостаточным пространственным разрешением, методом субпиксельного сдвига.

Метод основан на дополнении исходной голограммы значениями, полученными при пространственном сдвиге объекта или матрицы фотоприемников на величину меньшую, чем разрешение голограммы, только по одной координате. После преобразования Фурье проводится поэлементное деление элементов восстановленного изображения на элементы спектра одномерной апертурной функции.

Показано, что даже в случае недостаточного разрешения устройств регистрации голограмм можно восстановить изображение при априорном знании апертурной функции. Приведены результаты моделирования алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leith E.N., Upatnieks J.* Reconstructed wavefronts and communication theory // Journal of the Optical Society of America. – 1962. – Vol. 52. – P. 1123–1130.
2. *Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л.* Оптическая голография. – М.: Мир, 1973. – 686 с.
3. Оптическая голография: в 2 т. / под ред. Г. Колфида. – М.: Мир, 1982. – 735 с.
4. *Миллер М.* Голография. – Л.: Машиностроение, 1979. – 140 с.
5. *Goodman J.W., Lawrence R.W.* Digital image formation from electronically detected holograms // Applied Physics Letters. – 1967. – Vol. , N 3. – P. 77–79.
6. *Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С.* Цифровая голография. – М.: Наука, 1982. – 219 с.
7. *Schnars U., Jueptner W.* Direct recording of holograms by a CCD-target and numerical reconstruction // Applied Optics. – 1994. – Vol. 33, N 2. – P. 179–181.
8. *Гужов В.И.* Компьютерная голография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 270 с. – ISBN 978-5-8114-3410-7.
9. *Гужов В.И., Ильиных С.П., Хайбулин С.В.* Восстановление фазовой информации на основе методов пошагового фазового сдвига при малых углах между интерферирующими пучками // Автометрия. – 2017. – Т. 53, № 3. – С. 101–106. – DOI: 10.15372/AUT20170313.
10. *Васьков С.Т., Ефимов В.М., Резник А.Л.* Быстрая цифровая реконструкция сигналов и изображений по критерию минимума энергии // Автометрия. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 13–20.
11. Super-resolution in digital holography by a two-dimensional dynamic phase grating / M. Paturzo, F. Merola, S. Grilli, S. De Nicola, A. Finizio, P. Ferraro // Optics Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 17107–17118.
12. *Claus D.* High resolution digital holographic synthetic aperture applied to deformation measurement and extended depth of field method // Applied Optics. – 2010. – Vol. 49 (16). – P. 3187–3198.
13. *Tippie A.E., Kumar A., Fienup J.R.* High-resolution synthetic-aperture digital holography with digital phase and pupil correction // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, N 13. – P. 12027–12038.
14. *Блажевич С.В., Селютина Е.С.* Повышение разрешения цифрового изображения с использованием субпиксельного сканирования // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2014. – № 5 (176). – С. 186–190.

15. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 7. – С. 762–770.
16. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. – 1928. – Vol. 47. – P. 617–644.
17. Wittaker E.T. On the function which are represented by the expansion of interpolating theory // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1915. – Vol. 35. – P. 181–194.
18. Shannon C.E. Communication in the presence of noise // Proceedings of the IRE. – 1949. – Vol. 37, N 1. – P. 10–21.
19. Дискретизация сигналов с помощью конечного набора апертур / В.И. Гужов, И.О. Марченко, Е.Е. Трубилина, А.А. Трубилин // Омский научный вестник. – 2021. – № 1 (175). – С. 55–58. – DOI: 10.25206/1813-8225-2021-175-55-58.
20. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
21. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
22. Гужов В.И., Марченко И.О., Трубилина Е.Е. Повышение пространственного разрешения сигналов в оптических системах // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 1. – С. 65–70. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-924.
23. Восстановление изображений из серии голограмм, зарегистрированных с низким разрешением с помощью нового уравнения дискретизации / В.И. Гужов, С.П. Ильиных, К.В. Захаров, О.Ю. Майер // Автометрия. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 125–139. – DOI: 10.15372/AUT20220413.

Гужов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – голографические измерительные системы. Имеет более 270 публикаций. E-mail: v.guzhov@corp.nstu.ru

Хайдуков Дмитрий Сергеевич, кандидат технических наук, ассистент кафедры ССОД. Автор более 30 работ. Область научных интересов: голография, бесконтактное измерение деформаций. E-mail: dmitriyhaydukov@gmail.com

Захаров Константин Владимирович, ассистент кафедры защиты информации Новосибирского государственного технического университета. Основное направление исследований – цифровые голографические системы.

Майер Ольга Юрьевна, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Основное направление исследований – высокоточные измерительные системы.

Guzhov Vladimir I., D.Sc. (Eng.), professor at the department of data collection and data processing systems, Novosibirsk State Technical University. The main field of his scientific research is high-precision measuring systems. He is the author of more than 270 publications. Email: v.guzhov@corp.nstu.ru

Khaidukov Dmitry, PhD, assistant lecturer at the SSOD department. He is the author of more than 30 papers. His research interests include holography and contactless measurement of deformations. E-mail: dmitriyhaydukov@gmail.com

Zakharov Konstantin Vladimirovich, assistant lecturer at the department of information security, Novosibirsk State Technical University. The main field of his research is digital holographic systems.

Mayer Olga Yurievna, post-graduate student in the Novosibirsk State Technical University. The main field of her research is high-precision measuring systems.

Improving the spatial resolution of digital holograms using one-dimensional subpixel scanning*

V.I. GUZHOV^a, D.S. KHAIDUKOV, K.V. ZAKHAROV^b, O.Y. MAYER^c

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a v.guzhov@corp.nstu

Abstract

The article considers the issue of increasing the spatial resolution during the registration of digital holograms. In practice, discretization is carried out by measuring signal samples using sensors with a certain finite aperture. The resolution is determined by the size of the aperture area over which the averaging takes place. The resolution enhancement method is based on the sampling equation for signals obtained by the subpixel shift method using generalized functions. A subpixel shift is carried out using a spatial shift by a value less than the element of resolution.

Apertures of various shapes are used, for example, elliptical, diamond-shaped, hexagonal, but rectangular apertures are most commonly used. The discretization equation involves the use of a two-dimensional aperture function. Below is a way to increase the resolution when using a one-dimensional function. This can be done based on the structure of the holographic signal. In this case, you can use a subpixel shift in only one direction.

Digital holography is distinguished by the fact that photodetector matrices which have a spatial resolution much lower than photographic media used in traditional holography methods are used to register the signal. Therefore, digital holography uses optical schemes with small angles between interfering beams. However, certain restrictions are imposed on the shape of the objects under study. If the objects have a shape that is significantly different from a flat one, it is necessary to use traditional schemes.

The article presents mathematical modeling of the resolution enhancement method based on the recovery of signals from a real hologram obtained in the usual way. The increase in resolution is achieved using a one-dimensional subpixel shift.

The use of a one-dimensional subpixel shift makes it possible to significantly simplify the optical scheme of the holographic setup.

Keywords: digital holography, sampling, sampling rate, spatial frequencies, generalized functions, Fourier transform, spectrum, super resolution, subpixel shift

REFERENCES

1. Leith E.N., Upatnieks J. Reconstructed wavefronts and communication theory. *Journal of the Optical Society of America*, 1962, vol. 52, pp. 1123–1130.
2. Collie R., Burckhardt Ch., Lin L. *Opticheskaya golografiya* [Optical holography]. Moscow, Mir Publ., 1973. 686 p. (In Russian).
3. Caulfield G., ed. *Optical holography*. New York, Academic Press, 1979 (Russ. ed.: *Opticheskaya golografiya*. V 2 t. Moscow, Mir Publ., 1982. 735 p.).
4. Miller M. *Golografiya* [Holography]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1979. 140 p. (In Russian).
5. Goodman J.W., Lawrence R.W. Digital image formation from electronically detected holograms. *Applied Physics Letters*, 1967, vol. 11, no. 3, pp. 77–79.
6. Yaroslavskii L.P., Merzlyakov N.S. *Tsifrovaya golografiya* [Digital holography]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 219 p.
7. Schnars U., Jueptner W. Direct recording of holograms by a CCD-target and numerical reconstruction. *Applied Optics*, 1994, vol. 33, no. 2, pp. 179–181.
8. Guzhov V.I. *Komp'yuternaya golografiya* [Computer holography]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2018. 270 p. ISBN 978-5-8114-3410-7.

* Received 16 January 2022.

9. Guzhov V.I., Il'nykh S.P., Khaibullin S.V. Phase information recovery based on the methods of phase shifting interferometry with small angles between interfering beams. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 288–293. DOI: 10.3103/S875669901703013X. Translated from *Avtometriya*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 101–106. DOI: 10.15372/AUT20170313.
10. Vas'kov S.T., Efimov V.M., Reznik A.L. Fast digital image and signal reconstruction by the minimum energy criterion. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2003, iss. 4, pp. 11–17. Translated from *Avtometriya*, 2003, vol. 39, no. 4, pp. 13–20.
11. Paturzo M., Merola F., Grilli S., Nicola S. De, Finizio A., Ferraro P. Super-resolution in digital holography by a two-dimensional dynamic phase grating. *Optics Express*, 2008, vol. 16, pp. 17107–17118.
12. Claus D. High resolution digital holographic synthetic aperture applied to deformation measurement and extended depth of field method. *Applied Optics*, 2010, vol. 49 (16), pp. 3187–3198.
13. Tippie A.E., Kumar A., Fienup J.R. High-resolution synthetic-aperture digital holography with digital phase and pupil correction. *Optics Express*, 2011, vol. 19, no. 13, pp. 12027–12038.
14. Blazhevich S.V., Selyutina E.S. Povyshenie razresheniya tsifrovogo izobrazheniya s ispol'zovaniem subpiksel'nogo skanirovaniya [Sub-pixel scanning to produce super-resolution digital images]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika = Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics*, 2014, no. 5 (176), pp. 189–190.
15. Kotel'nikov V.A. O propusknoi sposobnosti «efira» i provoloki v elektrosvyazi [On the transmission capacity of 'ether' and wire in electric communications]. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Physics-Uspekhi*, 2006, vol. 176, no. 7, pp. 762–770. (In Russian).
16. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1928, vol. 47, pp. 617–644.
17. Whittaker E.T. On the function which are represented by the expansion of interpolating theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1915, vol. 35, pp. 181–194.
18. Shannon C.E. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 1949, vol. 37, no. 1, pp. 10–21.
19. Guzhov V.I., Marchenko I.O., Trubilina E.E., Trubilin A.A. Diskretizatsiya signalov s pomoshch'yu konechnogo nabora apertur [Sampling signals with finite set of apertures]. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2021, no. 1 (175), pp. 55–58. DOI: 10.25206/1813-8225-2021-175-55-58.
20. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
21. Gel'fant I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized functions and actions on them]. 2nd ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 470 p.
22. Guzhov V.I., Marchenko I.O., Trubilina E.E. Povyshenie prostranstvennogo razresheniya signalov v opticheskikh sistemakh [Increasing the spatial resolution of signals in optical systems]. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*, 2022, vol. 46 (1), pp. 65–70. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-924. (In Russian).
23. Guzhov V.I., Il'nykh S.P., Zakharov K.V., Maier O.Yu. Vosstanovlenie izobrazhenii iz serii gologramm, zaregistrirrovannykh s nizkim razresheniem s pomoshch'yu novogo uravneniya diskretizatsii [Reconstruction of images from a series of low-resolution holograms using a new discretization equation]. *Avtometriya = Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 125–139. DOI: 10.15372/AUT20220413. (In Russian).

Для цитирования:

Повышение пространственного разрешения цифровых голограмм с помощью одномерного субпиксельного сканирования / В.И. Гужов, Д.С. Хайдуков, К.В. Захаров, О.Ю. Майер // Системы анализа и обработки данных. – 2023. – № 1 (89). – С. 81–90. – DOI: 10.17212/2782-2001-2023-1-81-90.

For citation:

Guzhov V.I., Khaidukov D.S., Zakharov K.V., Mayer O.Yu. Povyshenie prostranstvennogo razresheniya tsifrovyykh gologramm s pomoshch'yu odnomernogo subpiksel'nogo skanirovaniya [Improving the spatial resolution of digital holograms using one-dimensional subpixel scanning]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 1 (89), pp. 81–90. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-1-81-90.