ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 56, № 3, 2014, с. 48–57

http://journals.nstu.ru/vestnik
Scientific Bulletin of NSTU
Vol. 56, No. 3, 2014, pp. 48–57

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ

AUTOMATIC CONTROL AND REGULATION

УДК 517.977

Метод глобальной оптимизации, основанный на селективном усреднении искомых переменных, при наличии ограничений типа равенств*

А.И. РУБАН

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, Сибирский федеральный университет, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой информатики Сибирского федерального университета, (391)295-43-95, e-mail: ai-rouban@mail.ru

Развитие теории и практики глобальной оптимизации требует не только улучшать существующие и синтезировать новые эффективные методы и алгоритмы недифференцируемой оптимизации при наличии сравнительно простых ограничениях типа неравенств, но и учитывать реально существующие более сложные ограничения неравенства и общие ограничения равенства. В статье изложен способ конструирования алгоритмов недифференцируемой глобальной оптимизации при наличии ограничений типа равенств. В основе алгоритмов лежит: 1) разнесение во времени пробных и рабочих шагов, 2) селективное усреднение искомых переменных по результатам экспериментальных данных, полученных в пробных точках, 3) учёт ограничений типа равенств в многомерном ядре при выполнении рабочих шагов, 4) адаптивная пошаговая перестройка размеров прямоугольной области пробных движений, 5) использование в алгоритмах только относительных значений всех функций (оптимизируемой и ограничений). При ограничениях типа равенств в базовой схеме глобальной оптимизации нормированные ядра становятся многомерными. Эти ядра построены с использованием произведения одномерных ядер по минимизируемой функции и по всем функциям ограничений равенств. Сжатие всех функций ограничений в одну обобщенную функцию позволило уменьшить размерность ядер до двух. Существенное упрощение структуры алгоритмов и числа настраиваемых параметров достигнуто за счёт перехода в аргументах ядер к безразмерным переменным, лежащим в интервале [0; 1]. На численных примерах продемонстрирована высокая скорость сходимости алгоритмов, высокая точность получаемого решения и близкая к единице оценка вероятности отыскания истинного решения даже при высоком уровне аддитивной помехи для минимизируемой функции.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, селективное усреднение, искомая переменная, ограничения типа равенств, пробное движение, рабочий шаг, многомерное ядро, недифференцируемая функция, нормированное ядро, аддитивная помеха

ВВЕДЕНИЕ

Среди существующих методов поиска глобального экстремума перспективны рандомизированные подходы. Они чаще всего построены на сочетании случайного просмотра области поиска X и локальных детерминированных алгоритмов поиска минимума.

В отличие от алгоритмов метода стохастической аппроксимации существенным продвижением при конструировании алгоритмов глобальной оптимизации является осознание того факта, что для более гарантированного движения к глобальному экстремуму необходимо проводить усреднение оптимизируемой функции во всей заданной области, где нужно отыскивать экстремум. На этом базируются подходы А.А. Красовского, А.И. Каплинского, А.И. Пропоя. Авторы используют потенциальные функции.

* *Статья получена 22 августа 2014 г.*

Другой способ отыскания глобального экстремума основан на селективном усреднении (во всей заданной области на начальном этапе поиска и в адаптивно изменяемых областях при последующих рабочих шагах) не самой оптимизируемой функции, а искомых переменных. Такой способ предложен в работах [1–3]; его развивает и автор [4–7] данной статьи. Производится параллельный расчёт всех компонент вектора искомых непрерывных переменных. Распараллеливание заложено и при снятии в пробных точках исходной информации (при совершении каждого рабочего шага) о минимизируемой функции и о функциях ограничений. За счёт указанного распараллеливания при вычислениях удается осуществлять оптимизацию с большим числом искомых переменных и функций ограничений.

Решаем задачу поиска глобального минимума функции при изменении непрерывных переменных внутри допустимой области *X*, формируемой нежёсткими ограничениями неравенствами и ограничениями равенствами:

$$f(x) = \min_{x \in X}. \tag{1}$$

1. АЛГОРИТМЫ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НЕЖЁСТКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Вводим последовательность $\{p_s(y),\ s = 1,2,...\}$ непрерывных, положительных в R_+^1 функций, таких, что для любых $y < z$ (где $y, z \subset R^1$) последовательность $\{p_s(y)/p_s(z),\ \ s = 1,\ 2,\ ...\}$ монотонно нарастает с ростом s: $\lim\limits_{s\to\infty} p_s(y)/p_s(z) = \infty$; $y < z$. Считаем, что известны точная верхняя $f_{\max} = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ и точная нижняя $f_{\min} = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ границы минимизируемой функции $f(x)$.

Справедлив следующий предельный результат:

$$x_{\min} = \lim_{s\to\infty} \int_X x\, \overline{p}_{s,\min}(x)\, dx,\ \ \overline{p}_{s,\min}(x) = \frac{p_s(g_{\min}(x))}{\int\limits_X p_s(g_{\min}(t))\, dt},\ \ g_{\min}(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}. \tag{2}$$

Безразмерная неотрицательная переменная $g_{\min}(x)$ лежит в интервале [0; 1].

Заметим, что в (2) можно и не переходить к безразмерной переменной $g_{\min}(x)$. Достаточно положить $g_{\min}(x) = f(x)$. Предельные свойства сохраняются. Наличие безразмерных переменных $g_{\min}(x)$ придает алгоритмам свойство инвариантности по отношению к размерностям функций.

В качестве ядер $p_s(g)$ могут использоваться, например: 1) экспоненциальное в степени *s*: $\exp(-sg)$, 2) гиперболическое в степени *s*: g^{-s}, 3) линейное (*r* = 1), параболическое (*r* = 2), кубическое (*r* = 3) и т. д. в степени *s*: $p_s(g) = (1 - g^r)^s$, $r = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$. Эти виды ядер конструируются по единому образцу. За основу берется убывающая в интервале [0; 1] функция $p(g)$ (с максимумом в точке $g = 0$), а затем эта функция возводится в степень *s*: $p_s(g) = \left(p(g)\right)^s$. Для таких выбранных функций $p(g)$ всегда $1 < (p(y)/p(z))$ при $y < z$.

Перечисленный набор ядер $p_s(g)$ пока достаточен для решения задач глобальной минимизации. При увеличении *s* растет «селективность» (способность к локализации положения глобального экстремума) нормированного ядра $\overline{p}_{s,\min}(x)$. В пределе (при $s \to \infty$) это ядро стремится к многомерной дельта функции с особой точкой $x = x_{\min}$.

Усреднение в правой части формулы (2) позволяет предсказывать положение глобального экстремума при фиксированной степени *s*, которую будем называть «степенью селективности ядра».

Приведенный результат позволяет построить целый спектр практически реализуемых быстросходящихся алгоритмов, обеспечивающих поиск глобального экстремума с вероятностью, близкой к единице. Укажем возможный вариант класса алгоритмов (при различных параметрах $0<\gamma_q$, $q\in\{1,\ 2,\cdots\}$, $0<s$ и различных формах ядра) поиска глобального **минимума**:

$$x^{l+1}=\int_{X^l} x\,\bar{p}^l_{s,\min}(x)\,dx\,, \tag{3}$$

$$\Delta x_\nu^{l+1}=\gamma_q\left(\int_{X^l}|\,x_\nu-x_\nu^l\,|^q\,\bar{p}^l_{s,\min}(x)\,dx\right)^{1/q},\ \nu=\overline{1,m}$$

$$X^l=\Pi^l\cap X\,,\ \Pi^l=[x_1^l-\Delta x_1^l,\ x_1^l+\Delta x_1^l]\times\cdots\times[x_m^l-\Delta x_m^l,\ x_m^l+\Delta x_m^l]\,,$$

$$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ [0<\gamma_q,\ q\in\{1,2,\cdots\},\ 0<s]\,.$$

Здесь l – номер итерации; γ_q, q, s – подбираемые фиксированные параметры; Π^l – прямоугольная область в окрестности точки x^l. При $0<\gamma_q\le 1$ всегда $\Delta x_\nu^{l+1}\le\gamma_q\Delta x_\nu^l$, $\nu=\overline{1,m}$. Отсюда следует конечно-шаговое (и достаточно быстрое) сжатие области поиска до заданных малых размеров.

Алгоритмам (3) можно придать более привычный вид и осуществить в них приближенное вычисление интеграла. В области *X*, если она задана только ограничениями неравенствами и не является узким «жгутом», размещается n пробных точек $x^{(i)}$, $i=\overline{1,\,n}$. В них вычисляется минимизируемая функция $f^{(i)}\equiv f(x^{(i)})$, $i=\overline{1,\,n}$, и операция интегрирования заменяется суммированием.

При получении пробных точек $x^{(i)}$, $i=\overline{1,\,n}$ последовательно генерируются равномерно распределённые точки в прямоугольной области Π^l с центром в точке x^l:

$$x_\nu^{(i)}=x_\nu^l+\Delta x_\nu^l\cdot u_\nu^{(i)},\ \ u_\nu^{(i)}\in[-1;\,1],\ \nu=\overline{1,\,m},\ i=1,\,2,\,\cdots, \tag{4}$$

и **из них оставляется** n **точек, попадающих в допустимую область** X. Пробные точки лежат теперь в области $X^l=\Pi^l\cap X$.

Исходная точка x^0 и размеры Δx^0 прямоугольной области Π^0 выбираются так, чтобы Π^0 охватывала допустимую область X или ту её часть, где расположен искомый глобальный экстремум.

В результате указанного перехода от интегрирования к соответствующему суммированию алгоритмы (3) приобретают следующий вид:

$$x_\nu^{l+1}=x_\nu^l+\Delta x_\nu^l\cdot\bar{u}_{\nu,\min}\,, \tag{5}$$

$$\Delta x_\nu^{l+1}=\gamma_q\cdot\Delta x_\nu^l\cdot\left(\sum_{i=1}^n|\,u_\nu^{(i)}\,|^q\,\bar{p}^{(i)}_{s,\min}\right)^{1/q},\ \nu=\overline{1,\,m}\,,$$

$$\bar{u}_{\nu,\min}=\sum_{i=1}^n u_\nu^{(i)}\bar{p}^{(i)}_{s,\min},\ \bar{p}^{(i)}_{s,\min}=\frac{p_s(g^{(i)}_{\min})}{\sum_{j=1}^n p_s(g^{(j)}_{\min})},\ g^{(i)}_{\min}=\frac{f^{(i)}-\hat{f}_{\min}}{\hat{f}_{\max}-\hat{f}_{\min}}\,,$$

$$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ [0<\gamma_q,\ q\in\{1,2,\cdots\},\ 0<s]\,.$$

Здесь $\hat{f}_{\max} = \max\{f^{(i)},\ i = \overline{1,\ n}\}$, $\hat{f}_{\min} = \min\{f^{(i)},\ i = \overline{1,\ n}\}$; в переменных $u_\nu^{(i)} \in [-1;\ 1]$, $\overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ для упрощения записи опущен номер итерации l . Весовые коэффициенты (ядра) $\overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ нормированы на системе n пробных точек: $\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{s,\min}^{(i)} = 1$.

Покажем, что в алгоритмах (5) при $0 < \gamma_q \le 1$ всегда $\Delta x_\nu^{l+1} \le \Delta x_\nu^l$, $\nu = \overline{1,m}$, а следовательно, прямоугольная область Π^l (и соответственно X^l) от итерации к итерации будет сжиматься.

Действительно, для каждого $\nu = \overline{1,\ m}$ и $q = 1,\ 2,\ \cdots$ имеем

$$\Delta x_\nu^{l+1} = \gamma_q \Delta x_\nu^l \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} | u_\nu^{(i)} |^q \ \overline{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q} \le \gamma_q \ \Delta x_\nu^l \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q} = \gamma_q \ \Delta x_\nu^l \ .$$

Здесь учитываются следующие условия:

1) $| u_\nu^{(i)} |^q \le 1$, так как $u_\nu^{(i)}$ находится в интервале [–1; 1];

2) $\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{s,\min}^{(i)} = 1$ в силу нормировки ядер $\overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ на системе n пробных точек.

Прекращение работы алгоритмов осуществляется, как обычно, либо по заданной величине размера области пробных движений: $\max\{| \Delta x_\nu^l |,\ \nu = \overline{1,\ m}\} \le \varepsilon_1$, либо по величине наибольшего уклонения минимизируемой функции на множестве пробных точек: $\hat{f}_{\max} - \hat{f}_{\min} \le \varepsilon_2$.

В полученных алгоритмах пробные и рабочие движения разнесены. На каждом рабочем шаге осуществляется переход в новую точку, в среднем более близкую к глобальному минимуму, и производится адаптивная коррекция (чаще всего уменьшение) размеров области поиска.

При тестировании взяты функции, используемые другими авторами, а также созданные нами по выявленным закономерностям построения многоэкстремальных функций с заданными свойствами [4]. Испытание алгоритма (5) на значительном числе многоэкстремальных функций (более 100) показало, что он имеет устойчивые достаточно высокие показатели сходимости (по скорости, точности и близкой к 1 оценке вероятности отыскания глобального экстремума) при следующих условиях:

1) $0.8 \le \gamma_q \le 1.2;\ q = 2$;

2) *степенных* типах ядер: экспоненциальном, гиперболическом, линейном, параболическом, с целочисленными параметрами селективности s , лежащими в широких пределах;

3) $50 \le n$;

4) равномерном распределении пробных точек (случайном с независимыми координатами либо с использованием ЛП $_\tau$ последовательности) внутри области пробных движений.

Скорость сходимости достаточно высокая: 5–12 итераций. Обычно коэффициент γ_q берется единичным, $q = 2$.

2. УЧЁТ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА РАВЕНСТВ

Допустимая область X формируется за счет ограничений равенств

$$\psi(x) = 0 \quad (\text{или } \psi_k(x) = 0, \quad k = \overline{1,\ m_2}) \ . \tag{6}$$

Пробные точки равномерно размещаются в прямоугольной области Π^l с центром в точке x^l . Они все находятся вне допустимой области, поэтому при формировании рабочих шагов необходимо использовать штрафы.

Вычисление на каждой итерации искомых переменных и размеров прямоугольной области пробных движений осуществляем по формуле (5) с заменой нормированного ядра $\overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ другим уже многомерным ядром, которое построено на произведении одномерных ядер для минимизируемой функции и для модулей всех функций ограничений равенств (6):

$$\overline{p}_{s_1,s_2,\beta_2,\min}^{(i)}=\frac{p_{s_1,s_2,\beta_2,\min}^{(i)}}{\sum_{l=1}^{n}p_{s_1,s_2,\beta_2,\min}^{(l)}},\; p_{s_1,s_2,\beta_2,\min}^{(i)}=p_{1,s_1}(g_{f,\min}^{(i)})\left(\prod_{k=1}^{m_2}p_{2,s_2}(g_{|\psi_k|}^{(i)})\right)^{\beta_2}, \qquad (7)$$

где $g_{f,\min}^{(i)}=\dfrac{f^{(i)}-\hat{f}_{\min}}{\hat{f}_{\max}-\hat{f}_{\min}}$; $g_{|\psi_k|}^{(i)}=\dfrac{|\psi_k(x^{(i)})|-|\psi_k|_{\min}}{|\psi_k|_{\max}-|\psi_k|_{\min}}$, $k=\overline{1,\,m_2}$; $1\le\beta_2$.

Увеличение положительного параметра β_2 приводит к увеличению точности выполнения ограничений типа равенств.

Структуру ядра (7) можно упростить, взяв одну форму ядра для минимизируемой функции и для модулей всех функций ограничений и снабдить их одинаковым коэффициентом селективности s. Увеличение коэффициента β_2 приводит к кратному увеличению коэффициента селективности ядер для всех функций ограничений. Ядра в итоге принимают вид

$$\overline{p}_{s,\beta_2,\min}^{(i)}=\frac{p_{s,\beta_2,\min}^{(i)}}{\sum_{l=1}^{n}p_{s,\beta_2,\min}^{(l)}},\; p_{s,\beta_2,\min}^{(i)}=p_{s,\beta_2}(g_{f,\min}^{(i)})\left(\prod_{k=1}^{m_2}p_{s,\beta_2}(g_{|\psi_k|}^{(i)})\right)^{\beta_2}. \qquad (8)$$

Как и ранее убеждаемся, что в алгоритмах (5) с использованием обобщённых ядер (7) и (8) при $0<\gamma_q\le 1$ также всегда $\Delta x_\nu^{l+1}\le\Delta x_\nu^{l}$, $\nu=\overline{1,m}$. Прямоугольная область Π^l и область X^l от итерации к итерации сжимается.

3. НАЛИЧИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕЖЁСТКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ НЕРАВЕНСТВ

Имеются **нежёсткие** ограничения типа неравенств. Это такие ограничения, которые формируют область, в которой удается за приемлемое время разместить заданное число равномерно распределённых пробных точек. Нежёсткие ограничения сравнительно легко учесть при получении пробных точек. Последовательно генерируют пробные точки (в априори заданной прямоугольной области, в которой в принципе должен быть искомый глобальный минимум) и в них проверяют выполнение ограничений неравенств. Точки, удовлетворяющие ограничениям неравенствам, оставляют и накапливают до требуемого объёма n. Однако все эти точки не удовлетворяют ограничениям равенствам. В этом и состоит сложность оптимизации при этих ограничениях.

Ограничения типа равенств принадлежат к очень жёстким ограничениям. Например, в пространстве двух переменных ограничение типа равенства выделяет линию. При размещении точек (с независимыми координатами) на этой плоскости вероятность попадания их на линию равна нулю. То же самое происходит с увеличением количества переменных. Так в пространстве трёх переменных ограничения равенства формируют поверхность или линию. Вероятность попадания пробных точек на поверхность или на линию тоже равна нулю. Всё сказанное относится к общему случаю.

В частных вариантах, когда ограничения равенства сформированы специальным образом, можно (иногда сравнительно просто) получить пробные точки, лежащие на поверхности или линии, задаваемой ограничениями равенствами. Для примера возьмём также пространство трёх координат, а два ограничения равенства (которые дают линию) заданы в виде явной зависимости третьей координаты от первой и второй координаты от первой. Для каждой пробной точки независимо формируется первая координата, а две другие координаты пересчитываются по указанным двум уравнениям равенствам.

Допустимая область X определяется двумя типами вышеуказанных ограничений: типа неравенств и типа равенств.

Нежёсткие ограничения типа неравенств выделяют достаточно широкую область. На этапе пробных движений в гиперпрямоугольной области последовательно генерируют равномерно распределённые точки и из них набирают n точек, удовлетворяющих ограничениям неравенствам. Эти пробные точки естественно не удовлетворяют ограничениям типа равенств, но информация об их удалённости от ограничений равенств и от глобального минимума оптимизируемой функции учитывается при формировании рабочих шагов (см. предыдущий раздел). Далее рабочие шаги и размеры гиперпрямоугольных областей рассчитываются по алгоритмам параграфа 2 (см., например, (8)) с нормированным ядром, построенным на произведении ядер для минимизируемой функции и для модулей всех функций ограничений равенств.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим функцию

$$I_1(\vec{x}-\vec{c}_2)=6\,|\,x_1+2\,|^{0.6}+6\,|\,x_2-4\,|^{1.6}, \qquad I_2(\vec{x}-\vec{c}_1)=6\,|\,x_1\,|^{1.6}+7\,|\,x_2\,|^{2}+3,$$

$$I_3(\vec{x}-\vec{c}_3)=6\,|\,x_1-4\,|^{0.6}+7\,|\,x_2-4\,|^{0.6}+5, \qquad I_4(\vec{x}-\vec{c}_4)=5\,|\,x_1-4\,|^{1.1}+5\,|\,x_2\,|^{1.8}+6,$$

$$I_5(\vec{x}-\vec{c}_5)=5\,|\,x_1+2\,|^{0.5}+5\,|\,x_2\,|^{0.5}+7, \qquad I_6(\vec{x}-\vec{c}_6)=5\,|\,x_1\,|^{1.3}+5\,|\,x_2+2\,|^{1.3}+8,$$

$$I_7(\vec{x}-\vec{c}_7)=4\,|\,x_1+4\,|^{0.8}+3\,|\,x_2-2\,|^{1.2}+9, \qquad I_8(\vec{x}-\vec{c}_8)=2\,|\,x_1-2\,|^{0.9}+4\,|\,x_2+4\,|^{0.3}+10,$$

$$I_9(\vec{x}-\vec{c}_9)=6\,|\,x_1-2\,|^{1.1}+4\,|\,x_2-2\,|^{1.7}+11, \qquad I_{10}(\vec{x}-\vec{c}_{10})=3\,|\,x_1+4\,|^{1.2}+3\,|\,x_2+2\,|^{0.5}+12,$$

$$f(\vec{x})=\min\{I_i(\vec{x}-\vec{c}_i),\ i=\overline{1,10}\}. \tag{9}$$

Она имеет 10 минимумов (см. рис. 1 и рис. 2) в точках: (–2; 4), (0; 0), (4; 4), (4; 0), (2; 0), (0; –2), (–4; 2), (2; –4), (2; 2), (–4; –2). Глобальный минимум находится в точке (–2; 4): $f(-2;4)=0$. Второй по рангу минимум приходится на точку (0; 0): $f(0;0)=3$, и т.д.

На рис. 1 приведено размещение всех минимумов и указан их ранг (по значению величины минимизируемой функции в точке её минимума).

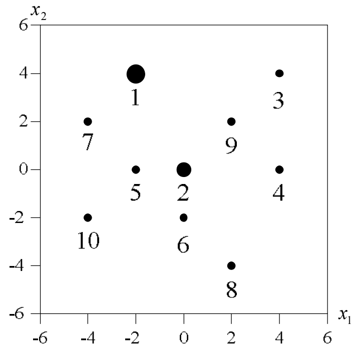

Рис. 1. Расположение минимумов

На рис. 2 представлены пространственный вид минимизируемой функции и линии равных уровней её. На фоне линий равных уровней функции (8) нанесены первые шаги (один или два) алгоритма (5) из четырех различных начальных точек. Область, задаваемая ограничениями неравенствами, прямоугольная и достаточно широкая: $|\,x_1\,|\le 6, |\,x_2\,|\le 6$. Поиск ведётся внутри этой области (квадрата). Скорость сходимости высокая.

Рис. 3 отражает изменения от шага к шагу значения искомых координат, размеров области поиска и величины минимизируемой функции. В алгоритме ядро линейное $p_s(g)=(1-g)^s$ при $s=30$, число пробных точек $n=100$, а также $q=2$ и $\gamma_q=1$.

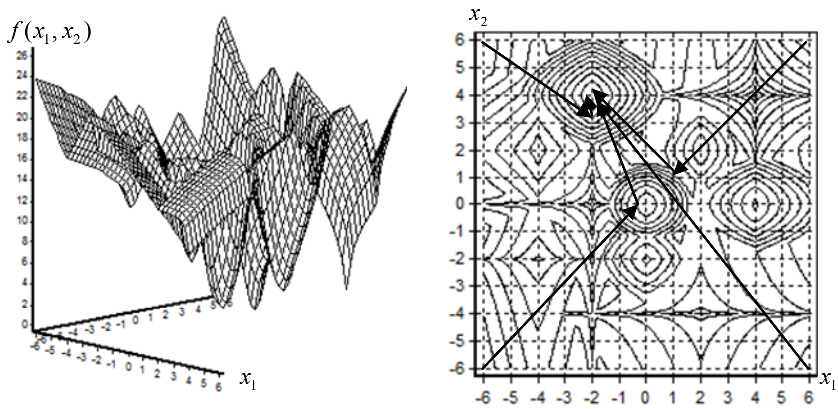

Рис. 2. Функция (9), линии равных уровней ее и первые шаги алгоритма

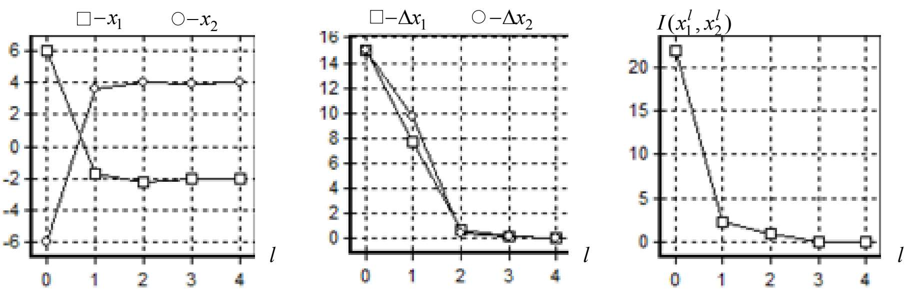

Рис. 3. Изменение по интерациям координат, размеров области поиска и значения минимизируемой функции

Минимизируем ту же 10-экстремальную функцию (8) при наличии одного ограничения равенства

$$\psi_1(x) \equiv x_1 - x_2 = 0 \ \ (\text{или } \ x_2 = x_1\,)$$

и трёх ограничений неравенств

$$\varphi_1(x) \equiv | x_1 | - 6 \le 0\,,\ \varphi_2(x) \equiv | x_2 | - 6 \le 0\,,\ \varphi_3(x) \equiv | x_1 - x_2 | - 6 \le 0\,,$$

выделяющих внутри квадрата (первое и второе ограничения) широкую полосу (третье ограничение) в окрестности диагонали $x_2 = x_1$.

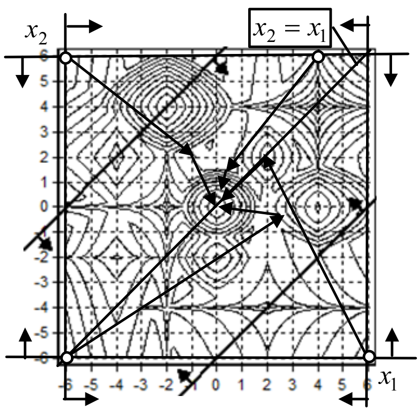

Рис. 4. Линии равных уровней функции (9), ограничения и первые шаги движения в глобальный минимум

На рис. 4 на фоне линии равных уровней минимизируемой функции показана область, определяемая ограничениями неравенствами, и линия ограничения равенства, а также первые шаги алгоритма поиска при четырёх начальных точках поиска.

Поведение минимизируемой функции (9) на линии ограничения равенства без помехи и при 300 % помехе представлено на рис. 5. Глобальный минимум её в допустимой области X приходится на начало координат.

Алгоритмы сохраняют работоспособность при высоком уровне аддитивных помех измерения оптимизируемой функции.

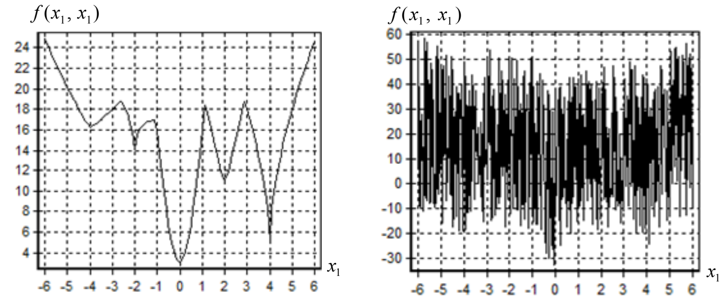

Рис. 5. Функция (9) на линии ограничения равенства $x_2 = x_1$ без помех и при 300 % аддитивной помехе

На функцию (9) аддитивно накладываем равномерно распределённую центрированную помеху $f(x) = \text{функция}(9) + \theta \cdot R[-1;\,1]$. Здесь $R[-1;\,1]$ – равномерно распределённая в интервале $[-1;\,1]$ случайная величина. Коэффициент θ вычисляем по заданной величине отношения «шум-сигнал»: $\rho = 2\theta/\Delta f$. Здесь 2θ – интервал изменения равномерно распределённой помехи, Δf – интервал изменения функции без помехи (при изменении x внутри допустимой области). При $\rho = 1$ шум 100 % по отношению к сигналу (функции без помехи), при $\rho = 0.1$ шум 10 %. Ориентация идёт на максимальную амплитуду изменения сигнальной части (функции без помехи) внутри допустимой области, задаваемой ограничениями неравенствами и равенствами. В рассматриваемом примере при $\rho = 1$ интервал изменения сигнальной части равен 22, а тогда $\theta = 11$.

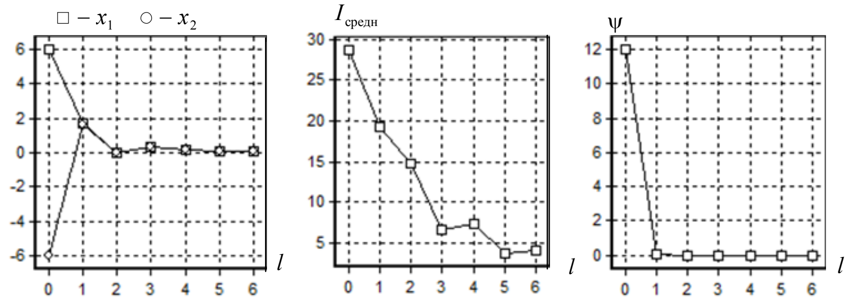

Рис. 6. Подстройка искомых координат усреднённого значения минимизируемой функции и значения левой части ограничения равенства при 300 % помехе

На рис 6. приведены результаты поиска минимума функции (9) при 300 % равномерно распределённой помехе. Чтобы сохранить близкую к 1 оценку вероятности попадания в заданную окрестность истинного решения в алгоритме увеличено число пробных точек: $n = 300$. Ядро по минимизируемой функции параболическое при $s = 50$, а по модулям функции ограничения равенства ядро линейное и $s = 100$, а также $q = 2$, $\gamma_q = 1$, $\beta_2 = 1$. Качество работы алгоритмов оптимизации достаточно высокое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отличие от других подходов к глобальной минимизации функций заключено в разделении на каждой итерации этапа пробных движений и рабочего шага, а также в эффективной обработке информации, извлекаемой в пробных точках. За счёт использования селективного усреднения искомых переменных при обработке информации, извлекаемой в пробных точках, на каждой итерации происходит как заглаживание локальных минимумов, так и фильтрация случайных аддитивных помех, искажающих минимизируемые функции. Выход в малую окрестность истинного глобального минимума в допустимой области, удовлетворяющей ограничениям типа равенств и типа неравенств, осуществляется с близкой к единице оценкой вероятности.

Способ учёта ограничений типа равенств, предложенный в данной работе, можно применять в алгоритмах: 1) поиска главных минимумов многоэкстремальных функций; 2) решения систем нелинейных уравнений; 3) многокритериальной оптимизации; 4) поиска глобальной седловой точки.

За счёт перехода на каждой итерации к относительным значениям всех функций (оптимизируемой и функций ограничений – левых частей ограничений равенств) не возникает проблема масштабирования в исходных задачах оптимизации. Алгоритмы инвариантны также к величине математического ожидания аддитивной случайной помехи измерения минимизируемой функции.

В дальнейшем будут рассмотрены другие варианты учёта ограничений путём использования обобщенных функций (построенных на основе всех функций ограничений равенств) и двумерных ядер, а также за счёт перехода от минимизации исходной функции к минимизации штрафных функций, построенных несколькими способами.

Для исследования синтезированных алгоритмов и решения на их основе реальных задач глобальной оптимизации разработан комплекс программ [7]. Содержание комплекса перестраивается по мере появления новых алгоритмов, по иному учитывающих наличие ограничений и предназначенных для решения перечисленных выше классов задач глобальной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spall J.C.* Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1992. – Vol. 37, iss. 3. – P. 332–341.

2. *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Application. – New York: Springer Verlag, 1997. – 415 p.

3. *Chin D.C.* Comparative Study of Stochastic Algorithms for System Optimization Based on Gradient Approximation // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics. – 1997. – Vol. 27, iss. 2. – P. 244–249.

4. *Красовский А.А.* Селективно-усреднительный метод решения многоэкстремальных задач // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 9. – С. 117–128.

5. *Каплинский А.И., Пропой А.И.* Методы нелокальной оптимизации, использующие теорию потенциала // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 7. – С. 55–65.

6. *Пропой А.И.* Задачи оптимизации и обучения для нелокального поиска в возбудимых средах // Автоматика и телемеханика. I: 1996. – № 1. – С. 57–66; II: 1997. – № 3. – С. 68–81; III: 1997. – № 4. – С. 54–64.

7. *Пропой А.И.* Задача обучения для нелокального поиска в волновых средах // Автоматика и телемеханика. I: 1998. – № 1. С. 120–126; II: – 1998. – № 2. – С. 84–90; III: 1998. – № 3. – С. 98–106.

8. *Медведев А.В, Цыкунова И.М.* Об алгоритмах случайного поиска // Применение вычислительных машин в системах управления непрерывными производствами. – Фрунзе: Илим, 1975. – С. 81–92.

9. *Рубан А.И.* Метод непараметрической оптимизации стохастических объектов // Системы управления: сб. науч. работ. – Томск: Изд-во ТГУ, 1975. – Вып. 1. – С. 101–107.

10. Экстремальная радионавигация / В.И. Алексеев, А.М. Кориков, Р.И. Полонников, В.П. Тарасенко. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

11. *Рубан А.И.* Метод непараметрической поисковой глобальной оптимизации // Кибернетика и вуз: сб. науч. работ. – Томск: ТПУ, 1994. – Вып. 28. – С. 107–114.

12. *Рубан А.И.* Метод непараметрической поисковой оптимизации // Известия вузов. Физика. – 1995. – Т. 38, № 9. – С. 65–73.

13. *Рубан А.И.* Глобальная оптимизация методом усреднения координат. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 303 с.

14. Комплекс программ «Global Optimizer v2.0»: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011617970 “Global Optimizer v2.0” / А.В. Кузнецов, А.И. Рубан. – Зарегистрировано Роспатентом в Реестре программ для ЭВМ 12 октября 2011 г.

Рубан Анатолий Иванович, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой информатики Сибирского федерального университета. Основные направления научных исследований – идентификация, адаптивное управление, теория чувствительности, глобальная оптимизация. Имеет более 270 публикаций. E-mail: ai-rouban@mail.ru, rouban@mail.ru

Global optimization method based on selective averaging of the unknown variables, in the presence of equality restrictions[*]

A.I. RUBAN

Siberian Federal University, 79, Prospect Svobodnij, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, D.Sc. (Eng), professor, e-mail: ai-rouban@mail.ru

Development of the theory and practice of global optimization demands not only to improve existing and to synthesize new effective methods and algorithms of not differentiable optimization in the presence of rather simple restrictions of a type of inequalities, but also to consider real-life more difficult restrictions of an inequality and the general restrictions of equality. In article the way of designing of algorithms of not differentiable global optimization in the pres-

[*] *Received 22 August 2014.*

ence of restrictions of a type of equalities is stated. At the heart of algorithms lies: 1) separation in time of trial and working steps, 2) selective averaging of required variables by results of the experimental data obtained in trial points, 3) the accounting of restrictions of a type of equalities in a multidimensional kernel when performing working steps, 4) adaptive step-by-step reorganization of the sizes of rectangular area of trial movements, 5) use in algorithms of only relative values of all functions (optimized and restrictions). At restrictions equalities in the basic scheme of global optimization rated kernels become multidimensional. These kernels are constructed with use of multiplication of one-dimensional kernels on minimized function and on all functions of restrictions of equalities. Compression of all functions of restrictions in one generalized function allowed to reduce dimension of kernels to two. Essential simplification of structure of algorithms and number of adjusted parameters is reached due to transition in arguments of kernels to the dimensionless variables lying in an interval [0; 1]. On numerical examples the high speed of convergence of algorithms, high precision of the received decision and an estimation of probability of search of the true decision close to unit even at high level of additive noise for minimized function is shown.

Keywords: global optimization, selective averaging, required variable, restrictions of a type of equalities, trial movement, a working step, a multidimensional kernel, not differentiable function, a rated kernel, additive noise

REFERENCES

1. Spall J.C. Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 1992, vol. 37, iss. 3, pp. 332-341.

2. Kushner H.J., Yin G.G. *Stochastic Approximation Algorithms and Application*. New York, Springer Verlag, 1997. 415 p.

3. Chin D.C. Comparative Study of Stochastic Algorithms for System Optimization Based on Gradient Approximation. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics,* 1997, vol. 27, iss. 2, pp. 244-249.

4. Krasovskii A.A. Selektivno-usrednitel'nyi metod resheniya mnogoekstremal'nykh zadach [The selective-averaging method for solving multi-extremal problems]. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, iss. 9, pp. 1410-1419. *Translated from Avtomatika i telemekhanika, 1992, iss. 9, pp. 117-128.*

5. Kaplinskii A.I., Propoi A.I. Metody nelokal'noi optimizatsii, ispol'zuyushchie teoriyu potentsiala [Nonlocal optimization methods that use potential theory]. *Automation and Remote Control,* 1993, vol. 54, iss. 7, pp. 1077-1086. *Translated from Avtomatika i telemekhanika, 1993, iss.7, pp. 55-65.*

6. Propoi A.I. Zadachi optimizatsii i obucheniya dlya nelokal'nogo poiska v vozbudimykh sredakh [Optimization and Learning for Nonlocal Search in Excitable Environment]. *Automation and Remote Control*, I: 1996, vol. 57, iss. 1, pp. 45-52; II: 1997, vol. 58, iss. 3, pp. 383-393; III: 1997, vol. 58, iss. 4, pp. 561-570. *Translated from Avtomatika i telemekhanika, I: 1996, iss. 1, pp. 57-66; II: 1997, iss. 3, pp. 68-81; III: 1997, iss. 4, pp. 54-64.*

7. Propoiy A.I. Propoi A.I. Zadacha obucheniya dlya nelokal'nogo poiska v volnovykh sredakh [The learning problem for nonlocal search in wave media]. *Automation and Remote Control,* I: 1998, vol. 59, iss. 1, pp. 100-105; II: 1998, vol. 59, iss. 2, pp. 224-228. III: 1998, vol. 59, iss. 3, pp. 384-391. *Translated from Avtomatika i telemekhanika, I: 1998, № 1, pp. 120–126. II: 1998, № 2, pp. 84–90. III: 1998, № 3, pp. 98-106.*

8. Medvedev A.V, Tsykunova I.M. *Ob algoritmakh sluchainogo poiska* [On algorithms for random search]. *Primenenie vychislitel'nykh mashin v sistemakh upravleniya nepreryvnymi proizvodstvami* [The use of computers in control systems for continuous production]. Frunze, Ilim Publ., 1975, pp. 81-92.

9. Ruban A.I. [The method of nonparametric optimization for stochastic objects]. *Sistemy upravleniya. Sbornik nauchnykh rabot* [Control systems. Collection scientific papers of the Tomsk State University]. Tomsk, TSU Publ., 1975, iss. 1, pp. 101-107.

10. Alekseev V.I., Korikov A.M., Polonnikov R.I., Tarasenko V.P. *Ekstremal'naya radionavigatsiya* [Extreme radio navigation]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 280 p.

11. Ruban A.I. [Nonparametric method of search global optimization]. *Kibernetika i vuz. Sbornik nauchnykh rabot* [Cybernetics and university. Collection scientific papers of the Tomsk Polytechnic University]. Tomsk, TPU Publ., 1994, iss. 28, pp. 107-114.

12. Ruban A.I. Metod neparametricheskoi poiskovoi optimizatsii [Nonparametric search optimization method]. *Russian Physics Journal,* 1995, vol. 38, iss. 9, pp. 924-931. *Translated from Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika, 1995, no. 9, pp. 65-73.*

13. Ruban A.I. *Global'naya optimizatsiya metodom usredneniya koordinat* [Global optimization by a method of averaging of coordinates]. Krasnoyarsk, KSTU Publ., 2004. 303 p.

14. Kusnetsov A.V., Ruban A.I. Complex of the programs "Global Optimizer v2.0". The Certificate on official registration of the computer program. No. 2011617970, 2011. (In Russian, unpublished).