*ISSN 2782-2001*
*Системы анализа*
*и обработки данных*
*том 91, № 3, 2023, с. 19–36*

*http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Analysis and data*
*processing systems*
*Vol. 91, No. 3, 2023, pp. 19–36*

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 81.25 DOI: 10.17212/2782-2001-2023-3-19-36

# Задача о беспорядках*

**Ю.Д. ГРИГОРЬЕВ**

*197376, РФ, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт- Петербургский государственный электротехнический университет*

*yuri_grigoriev@mail.ru*

Рассматривается задача характеризации симметричных ожерелий как беспорядков. Данный подход является альтернативным подходу, использующему теорему перечисления Пойа, в том числе лемму Бернсайда. Показана связь между разбиениями чисел и типами перестановок. Типам ожерелий как перестановок сопоставляются беспорядки, в которых ни один элемент не остается на месте, а также беспорядки с неподвижными элементами. Исследуются распределения беспорядков по типам для ожерелий до седьмой степени включительно. Осуществляется подсчет и перечисление беспорядков каждого типа и устанавливается их четность.

Отдельное внимание уделено исследованию свойств симметричных ожерелий. Для каждого типа ожерелий перечисляются их классы симметрий и асимметрий. Одновременно вводятся понятия хиральной и ахиральной симметрии как разновидностей осевой симметрии. Формулируются утверждения, связывающие мощность классов симметрий с порядком симметрии ожерелий. Вводится понятие диаграмм симметрии ожерелий, уставливающих свойства инвариантности симметричных и несимметричных ожерелий заданной длины. В качестве отношения эквивалентности ожерелий используется отношение конгруэнтности, позволяющее использовать геометрический подход к исследованию ожерелий и визуализации получаемых результатов. Для этого ожерельям сопоставляются многосвязные неориентируемые графы, вершинами которых являются вершины правильных многоугольников. При этом соответствии число вершин графа равно длине ожерелья, а количество компонент связности совпадает с количеством цветов бусин.

В качестве приложения полученных результатов рассматривается возможность исследования с помощью ожерелий акцентной динамики стихотворных строф по вертикали. Приведены эмпирические данные по использованию различных типов семистиший в стихотворной практике. Отмечено, что приблизительно четверть из числа существующих симметричных типов ожерелий по различным причинам не находят реального применения.

**Ключевые слова**: перестановка, ожерелье, симметрия, ахиральность, хиральность, функция разбиения, беспорядок, диаграмма симметрий

* *Статья получена 24 апреля 2023 г.*

## ВВЕДЕНИЕ

Ожерелья представляют сложную алгебраическую структуру, требующую для исследования широкого арсенала математических средств, включая методы комбинаторного анализа, теории графов, теории групп [1], теории разбиений [2] и т. д. Задача об ожерельях хорошо известна в перечислительной комбинаторике, а ее решение в стандартной постановке осуществляется использованием теоремы перечисления Пойа, в том числе ее следствия – леммы Бернсайда.

В расширенном аспекте под задачей об ожерельях будем понимать задачу перечисления не всех, а только симметричных ожерелий, так как именно они часто представляют особый интерес во многих прикладных областях, например, в стиховедении. Аналогичные постановки задачи перечисления симметричных структур возникают в физике, филлотаксисе, компьютерной химии, кристаллографии, стилеметрии, математическом стиховедении и многих других смежных областях. Своими корнями эти постановки задач уходят в общую теорию симметрий, устанавливающую (Ф. Клейн), в частности, связь между группами перестановок и симметриями выпуклых многогранников. Настоящая работа посвящена рассмотрению симметричных плоских структур, подпадающих под определение ожерелий, с позиций задачи о беспорядках.

Помимо изложения алгоритмического подхода к задаче перечисления симметричных ожерелий в статье рассматривается приложение задачи о беспорядках к задаче из области математического стиховедения, связанной с перечислением схем рифмовки в семистишных строфах.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать задачу об ожерельях с помощью подхода, основанного на интерпретации ожерелий как перестановок. В этом случае каждому ожерелью сопоставляется граф с числом вершин, равным степени перестановки, т. е. длине ожерелья. Граф перестановки распадается на отдельные компоненты, т. е. является несвязным. Каждая из компонент является циклом. Граф перестановки ожерельем не является, так как его вершины не раскрашены.

Ожерелье называется *симметричным*, если его граф, представленный вершинами правильного $n$-угольника и инцидентными им ребрами, как геометрическая фигура обладает хотя бы одной осевой симметрией. Более точные определения симметричности ожерелий приводятся в разделе 2. Поскольку алгебраических и геометрических критериев симметричности не существует, в статье ставится задача перечисления симметричных ожерелий алгоритмическим способом.

Пусть $T$ – множество ожерелий заданной длины $n$. Смысл перехода от задачи об ожерельях [1, с. 212] к задаче о беспорядках заключается в исключении из алгоритма поиска симметричных ожерелий трудоемкого в смысле временных затрат шага распределения ожерелий $x \in T$ по орбитам. Этот шаг заменяется на перечисление перестановок определенного типа, отвечающих заданному ожерелью. Множество таких перестановок образует класс сопряженных элементов симметрической группы $S_n$, которая хорошо изучена и для которой в ряде случаев имеется множество полезных результатов. Второй шаг алгоритма заключается в выделении в полученном классе сопряженности тех перестановок, которые отвечают симметричным ожерельям.

В задаче об ожерельях циклическая группа $Z_n$ действует на множество ожерелий *T*, на котором определено отношение эквивалентности (в нашем случае отношение конгруэнтности). Действие $Z_n$ на *T* разбивает *T* на блоки, называемые орбитами $\mathrm{Orb}(T, Z_n)$ группы $Z_n$. В задаче о беспорядках ожерелий нет, а есть перестановки $\pi \in S_n$, преобразующие множество $N_n = \{1, 2, ..., n\}$. Здесь $T = N_n$. В этом случае говорят об орбитах $\mathrm{Orb}(a, \pi)$ элементов $a \in N_n$, порождаемых действием симметрий $\pi \in S_n$. Каждой перестановке $\pi \in S_n$ сопоставляется граф, который образуют несовпадающие орбиты $\mathrm{Orb}(a, \pi)$. В статье графы преобразований и орбиты в этом контексте не рассматриваются.

Задача об ожерельях, состоящая в подсчете числа *n* ожерелий $x \in T$ над множеством раскрасок $Y = \{c_1, \ldots, c_r\}$, которые можно построить по заданному *n*-мультимножеству $x = \left[c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r}\right]$, имеет достаточно простое решение. Общая формула для числа таких ожерелий имеет вид [3, с. 19]:

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_r}, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n. \tag{1.1}$$

Однако интерес представляют более тонкие свойства множества *T*, которые удается обнаружить в результате действия на *T* некоторой группы симметрий *G*. В частности, это касается подсчета орбит, в том числе симметричных (орбит с симметричными ожерельями), группы *G*.

**Теорема 1** (Лемма Бернсайда) [1, с. 212; 3, с. 201]. *Пусть T – множество ожерелий x, на котором действует группа симметрий G. Обозначим* $N_{Orb}$ – *количество орбит группы G,* $\mathrm{St}(x) \subset G$ – *стабилизатор G,* $g \in G$ – *подстановка, представленная в виде произведения непересекающихся циклов,* $\alpha_k(g)$ – *число циклов длины k в подстановке* $g \in G$. *Имеют место равенства*:

$$N_{Orb} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in T} |\mathrm{St}(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \alpha_1(g). \tag{1.2}$$

Лемма Бернсайда (1.2) поставленную в статье задачу перечисления симметричных ожерелий не решает. Именно поэтому, за исключением отдельных случаев [4, 5], эту задачу необходимо решать алгоритмически. Однако универсального алгоритма перечисления симметричных ожерелий даже на основе предлагаемого подхода также не существует. В рассматриваемой статье решается задача перечисления симметричных ожерелий длиной $n \le 7$ и отмечаются некоторые особенности таких задач перечисления в общем случае.

## 2. СИММЕТРИЧНЫЕ ОЖЕРЕЛЬЯ

Нас будут интересовать симметричные ожерелья с точки зрения их подсчета и перечисления. Эта задача решается с использованием алгоритмического подхода.

### 2.1. РАЗБИЕНИЯ ЧИСЕЛ И ОЖЕРЕЛЬЯ

Существуют различные эквивалентные определения ожерелий. В теории графов под ожерельем понимается помеченный $r$-связный ( $p,q$ )-граф Г, каждая компонента которого либо $(2,1)$-граф (2-цикл), либо простой $m$-цикл $(m \geq 3)$ с $(m \times m)$-матрицей смежностей

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } |i-j| = 1 \text{ или } |i-j| = m-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.1}$$

В комбинаторике $r$-цветное ожерелье длиной $n$ – это класс эквивалентности $n$-символьных строк над алфавитом размером $r$, где эквивалентными считаются строки, получаемые друг из друга *циклическим сдвигом*.

В геометрии под $n$-ожерельем понимают фигуру, образованную $r$-циклами с вершинами одного цвета, совпадающими с вершинами правильного $n$-угольника. Визуально ожерелье можно представить как структуру из $n$ связанных в кольцо $r$ бусин разных цветов, т. е. цветá бусин соответствуют $r$ символам алфавита. Отношением эквивалентности ожерелий в этом случае является отношение конгруэнтности, при котором два ожерелья эквивалентны, если их графы совпадают при некотором движении. В нашем случае в качестве такого движения рассматриваются вращения, т. е. изометрические преобразования в $R^2$, эквивалентные циклическому сдвигу $n$-символьных строк.

Ожерелья можно интерпретировать как *разбиения* натурального числа $n$ на $r$ слагаемых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, располагаемых в порядке их невозрастания (неубывания). Числа $\lambda_i$ называются *частями* разбиения. Разбиение $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ числа $n$ обозначаем $\lambda \vdash n$. Если дано разбиение $\lambda \vdash n$, то запись $\left[1^{s_1} 2^{s_2} \ldots r^{s_r}\right]$ означает, что в разбиении $\lambda \vdash n$ имеется ровно $s_1$ слагаемых, равных единице, $s_2$ слагаемых, равных двум, и т. д.:

$$\sum_{i=1}^{r} i^{s_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = |\lambda| = n. \tag{2.2}$$

Таким образом, с точностью до обозначений разбиение $\lambda = \left[1^{s_1} 2^{s_2} \ldots r^{s_r}\right]$ интерпретируется как ожерелье $x = \left[c_1^{\alpha_1} \ldots c_r^{\alpha_r}\right]$.

Существуют различные виды разбиений. Обозначим через $p(n)$ *функцию разбиения*, которая определяется как число всех неупорядоченных разбиений числа $n$ [2, с. 15]. Через $Q$ обозначим множество всех разбиений, через $I$ – множество разбиений, не содержащих единичные части, через $D$ – множество разбиений с попарно различными частями. Функцию разбиения в зависимости от того, на каком множестве она определена, обозначим $p(Q,n)$, $p(I,n)$ и $p(D,n)$ соответственно. Возможны также разбиения со всеми четными или нечетными частями, как с совпадающими, так и попарно не совпадающими частями. Ограничимся следующей цепочкой вложений множеств:

$$D \subseteq S \subset I \subset Q.$$

Совокупность циклов, определяющих $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_r^{\alpha_r}\right]$-ожерелье, задает некоторую перестановку чисел над $N_n$. В зависимости от направлений обхода и порядка обхода вершин циклов одному $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_r^{\alpha_r}\right]$-ожерелью сопоставляется несколько перестановок. Поэтому число перестановок степени $n$ всегда больше числа $n$-ожерелий типа $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_r^{\alpha_r}\right]$, см. (1.1).

### 2.2. СИММЕТРИЧНЫЕ ОЖЕРЕЛЬЯ

Пусть $G$ – группа симметрий, $T$ – множество ожерелий. Ожерелье $x \in T$ называется *симметричным*, если существует элемент $g \in G$, $g \neq e$, такой что $gx = x$ [6]. Возможны также другие эквивалентные определения симметрий. Метризуем множество $T$. Пусть $d(x, y)$ – расстояние Хэмминга [7, с. 52], определяемое как число несовпадений $x_i \neq y_i$ координат ожерелий $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, принадлежащих $T \subset N_n$. Данное расстояние используется для строк одинаковой длины любых $r$-ичных алфавитов. Ожерелье $x \in T$ симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $g \in G$, $g \neq e$, такой что $d(gx, x) = 0$ [6]. В связи с этим элементы $g \in G$ называются симметриями. Так как ожерелья будем соотносить с плоским графом, то далее зеркальную и осевую симметрии ожерелья рассматриваем как синонимы.

Согласно Кельвину, ожерелье $x \in T$ (или, что эквивалентно, соответствующая ему конфигурация Г) называется *хиральным*, если оно не совпадает со своим зеркальным отражением при вращениях и сдвигах. Ожерелье $x \in T$ называется *ахиральным*, если его зеркальное отражение $\varphi(x)$ при повороте $\sigma$ на угол 180° совпадает с исходным, т. е. $(\sigma \circ \varphi)x = x$. Хиральное ожерелье $x \in T$ и его зеркальное отражение $y = \varphi(x)$ образуют энантиомерную пару $(x, y)$, элементы которой называются *энантиомерами*. Для ахиральных ожерелий энантиомеры совпадают.

Пусть $k$ – порядок симметрии (это означает наличие у конфигурации $k$ однотипных осей симметрии). Будем использовать обозначения: $[k, 0]$ – осевая симметрия, $[k, k]$ – ахиральная симметрия, $[0, k]$ – хиральная симметрия. Любая симметрия правильного многоугольника переставляет его вершины, т. е. задает перестановку множества его вершин. Например, в случае правильного треугольника так получаются все 6 перестановок его вершин (тождественная, два поворота на 120° и три осевые симметрии), а в случае квадрата или правильного пятиугольника – уже не все [8, с. 28]. В любом случае всякое $n$-ожерелье задается перестановкой степени $n$, разложенной на $r$ циклов. Задача заключается в том, чтобы, рассматривая ожерелья как перестановки, выделить среди них симметричные и перечислить классы конгруэнтности симметричных $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_r^{\alpha_r}\right]$-ожерелий. Это связано с тем, что все конфигурации, представляющие класс симметричных $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_r^{\alpha_r}\right]$-ожерелий одного типа (тип соотносится с конкретным разбиением $\lambda \,|\!\!- n$), изоморфны как графы [1, с. 24], но не все они при этом конгруэнтны.

### 2.3. ЗАДАЧА О БЕСПОРЯДКАХ

Перестановку $\pi$ называют *беспорядком*, если в ней ни один элемент не стоит на своем месте. Число беспорядков из *n* элементов обозначим через $D_n$. Задача о беспорядках – это подсчет и перечисление ожерелий как беспорядков с последующим ответом на вопрос, каким классам симметрии они принадлежат и какими свойствами они характеризуются.

**Теорема 2** [9]. *Формула числа беспорядков в замкнутой форме имеет вид*

$$D_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r (n-r)! = n!\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}\right). \qquad (2.3)$$

Обозначим $D_{n,r}$ – число беспорядков, в которых на своих местах остаются $r$ элементов, а остальные $(n-r)$ элементов образуют беспорядок. Можно видеть, что $D_{n,n}=1$ (все элементы остаются на своих местах), $D_{n,0}=D_n$ (ни один элемент не остается на своем месте).

**Теорема 3** [9]. *Имеет место формула*

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r} = \frac{n!}{r!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right), \quad r = 0, 1,\ldots, n. \qquad (2.4)$$

Если для некоторых $i, j \in N_n$ в подстановке $\pi: i \to k_i$ степени $n$ из $i<j$ следует $k_i > k_j$, то говорят, что пара $(i, j)$ образует *инверсию*. Всякая перестановка может быть разложена в произведение циклов. Скажем, все $[2^r]$-ожерелья изначально являются разложениями в произведение циклов длиной 2. Перестановка называется четной, если число инверсий в ней четно, и наоборот. Четную перестановку $\pi$ обозначим как (+1), а нечетную – как (–1). Очевидно, $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^m$, где $m$ – количество инверсий в $\pi$. В четной перестановке число беспорядков четно, а в нечетной – нечетно [8, с. 16]. Мультивектор $\left[1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots n^{\lambda_n}\right]$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – длины циклов, на которые разлагается данная перестановка степени *n*, называется *типом перестановки*.

**Теорема 4**. *Перестановки одного типа имеют одну и ту же четность.*

*Доказательство*. Четность перестановки определяется четностью числа транспозиций (циклов длиной 2), на которые она разлагается. Отсюда следует, что для перестановок типа $\left[c_1^{\alpha_1}\ldots c_k^{\alpha_k}\right]$ степени *n* ее четность определяется четностью числа $n-|\alpha|$.

## 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Данный раздел посвящен ответу на вопрос о структуре классов симметрий перестановок симметрической группы $S_n$, $n = 4,\ldots,7$. Результат сформулирован в виде *основной теоремы*, доказательство которой размещено в разделах 3.1 и 3.2.

**Теорема 5**. (Основная теорема). *Группы* $S_n$ *порядка* $n \le 6$ *классов асимметрий не содержат*.

Утверждение теоремы 5 высказано в [10, с. 46]. Проведем его доказательство разбором случаев для $n \le 6$ и $n = 7$.

### 3.1. ОЖЕРЕЛЬЯ ДЛИНОЙ $n \le 6$

Случаи $n = 2,3$ тривиальны. Пусть $n = 4$. Единственным разбиением, $\lambda \,|\!- 4 \in I$, помимо $[4^1]$, является $[2^2]$. Ему соответствуют три перестановки вершин квадрата (каждому циклу отвечает свой цвет бусин):

$$[1,\,1]:\ \pi_1 = (12)(34),\quad \pi_2 = (14)(23),\quad [2,\,2]:\ \pi_3 = (13)(24).$$

Так как $\pi_1 \cong \pi_2$ (знак $\cong$ означает отношение конгруэнтности), то имеем два класса симметрий: $C_1 = \{\pi_1, \pi_2\}$ и $C_2 = \{\pi_3\}$. Таким образом, $S = I$. Все перестановки разбиения $[2^2]$ – *четные* беспорядки.

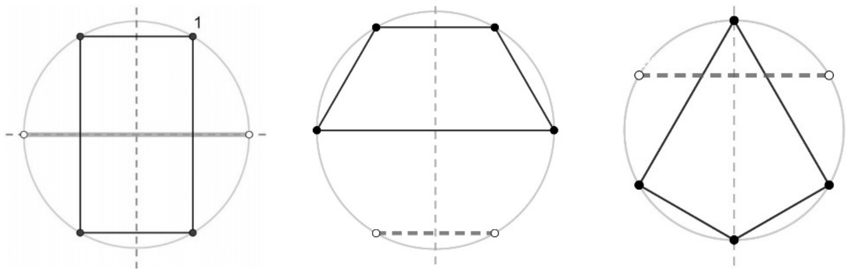
Пусть $n = 5$. Единственным разбиением $\lambda \,|\!- 5 \in I$ является $[3^1 2^1]$. Типу $[3^1 2^1]$ соответствуют два класса симметрий $C_i$, $i = 1, 2$. Действительно, в перестановках $\pi \in S_5$ возможны только два неконгруэнтных 3-цикла (125) и (134) и, следовательно, два класса симметрий с «образующими» перестановками: $\pi_1 = (125)(34)$ и $\pi_2 = (134)(25)$:

$$[1,\,0]:\ C_1 = \langle \pi_1 \rangle,\quad C_2 = \langle \pi_2 \rangle.$$

Поскольку для выбора вершин 3-цикла существует $C_5^3 = 10$ вариантов, то $|C_1| = |C_2| = 10$, т. е. всего существует 20 симметричных $[3^1 2^1]$ перестановок. Все они являются *нечетными беспорядками*.

Пусть $n = 6$. Поскольку $p(6) = 11$, то существуют 11 разбиений $\lambda \,|\!- 6$. Однако $p(I, 6) = 3$, т. е. имеется только три разбиения, не содержащих единичных частей. Это разбиения $[4^1 2^1]$, $[3^2]$ и $[2^3]$. В группе $S_6$ им соответствует 145 беспорядков.

*Тип* $[4^1 2^1]$. Этому типу соответствуют 90(–1) беспорядков. Они образуют три класса симметрий $C_i$, $i = 1, 2, 3$, содержащих соответственно 18, 36 и 36 элементов. Графы (конфигурации) ожерелий, представляющие эти классы, показаны на рис. 1.




*а* *б* *в*

*Рис. 1.* Графы ожерелий типа $[4^1 2^1]$:

*а* – класс $C_1$, симметрия [2, 0], ожерелье aba aba; *б* – класс $C_2$, симметрия [1, 0], ожерелье aab baa; *в* – класс $C_3$, симметрия [1, 0], ожерелье aaa bab

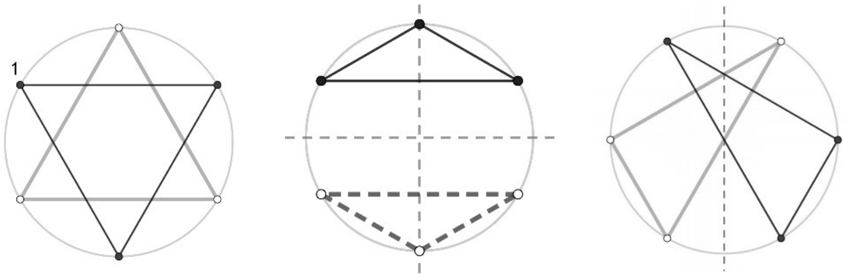
*Fig. 1.* Type $[4^1 2^1]$ necklace graphs:

(*a*) class $C_1$, symmetry [2, 0], necklace aba aba; (*b*) class $C_2$, symmetry [1, 0] necklace aab baa; (*c*) class $C_3$, symmetry [1, 0], necklace aaa bab

**Утверждение 1**. Пусть $N$ – порядок симметрии $[4^1 2^1]$ ожерелий любого из их трех классов $C$, $|C|$ – мощность этого класса. Тогда

$$N \cdot |C| = 36. \tag{3.1}$$

Тип $[3^2]$. Этому типу соответствуют 40 (+1) беспорядков, которые образуют три класса симметрии $C_i$, $i = 1, 2, 3$. Графы их ожерелий показаны на рис. 2.




*а* *б* *в*

*Рис. 2.* Графы ожерелий типа $[3^2]$:

*а* – класс $C_1$, симметрия [6, 0], ожерелье aba bab; *б* – class $C_2$, симметрия [1, 1], ожерелье aaa bbb; *в* – class $C_3$, симметрия [0, 1], ожерелье abb aab

*Fig. 2.* Type $[3^2]$ necklace graphs:

(*a*) class $C_1$, symmetry [6, 0], necklace aba bab; (*b*) class $C_2$, symmetry [1, 1], necklace aaa bbb; (*c*) class $C_3$, symmetry [0, 1], necklace abb aab

Мощности классов равны $|C_1| = 4$, $|C_2| = 12$, $|C_3| = 24$. Отсюда вытекает

**Утверждение 2**. *Пусть N – порядок симметрии* $[3^2]$*-ожерелий какого-либо из их трех классов C,* $|C|$ *– мощность этого класса. Тогда*

$$N \cdot |C| = 24. \tag{3.2}$$

*Тип* $[2^3]$. Этому типу соответствуют 15(–1) беспорядков, которые образуют пять классов симметрии $C_i$, $i = 1, \ldots, 5$, обладающих свойствами:

$$|C_1| = 3, \quad |C_2| = 3, \quad |C_3| = 6, \quad |C_4| = 2, \quad |C_5| = 1.$$

Графы ожерелий, представляющих эти классы, показаны на рис. 3.

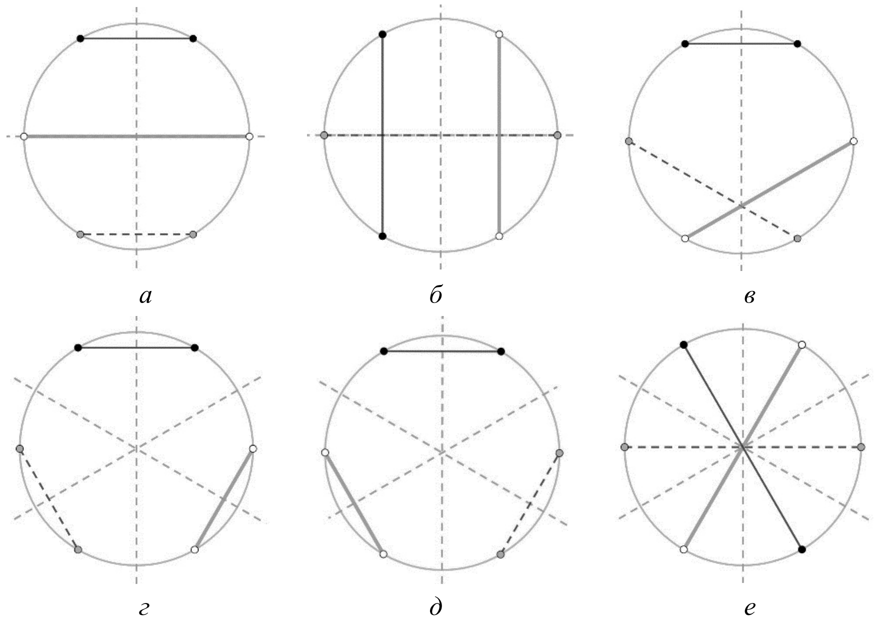


*Рис. 3.* Графы ожерелий типа $[2^3]$:

*а* – класс $C_1$, симметрия [1, 1], ожерелье abc cba; *б* – класс $C_2$, симметрия [1, 1], ожерелье abc acb; *в* – класс $C_3$, симметрия [0, 1], ожерелье abc bca; *г* – класс $C_4$, симметрия [0, 3], ожерелье abb cca; *д* – класс $C_4$ (энантиомер), симметрия [0, 3], ожерелье acc bba; *е* – класс $C_5$, симметрия [0, 3], ожерелье abc abc

*Fig 3.* Type $[2^3]$ necklace graphs:

(*a*) class $C_1$, symmetry [1, 1], necklace abc cba; (*b*) class $C_2$, symmetry [1, 1], necklace abc acb; (*c*) class $C_3$, symmetry [0, 1], necklace abc bca; (*d*) class $C_4$, symmetry [0, 3], ожерелье abb cca (*e*) class $C_4$ (enantiomer), symmetry [0, 3], necklace acc bba; (*f*) class $C_5$, symmetry [0, 3], necklace abc abc

Отсюда вытекает

**Утверждение 3**. *Пусть* $N$ *– порядок симметрии* $[2^3]$*-ожерелий любого из их пяти классов C,* $|C|$ *– мощность этого класса. Тогда*

$$N \cdot |C| = 6. \tag{3.3}$$

Завершением доказательства теоремы 5 является рассмотрение ожерелий длины $n = 7$, для которых не все типы разбиения $\lambda \vdash 7 \in I$ составлены только из классов симметрии. Эта часть доказательства вынесена в раздел 3.2.

### 3.2. ОЖЕРЕЛЬЯ ДЛИНОЙ *n* = 7

Всего имеется $|S_7| = 5040$ перестановок 7-й степени, из них беспорядков без неподвижных точек $D_{7,0} = 1854$, с неподвижными точками – $D_{7,r} = 3186$, $r = 1,\ldots,7$. Поскольку $p(7) = 15$, то существует 15 разбиений $\lambda \vdash 7$, распределение беспорядков которых по типам представлено в табл. 1. Из нее следует, что число четных и нечетных беспорядков совпадает и равно $N = |S_7| / 2 = 2520$. Для вычислений использованы соотношения (2.3) и (2.4).

*Таблица 1*

*Table 1*

**Распределение 7-беспорядков по типам: количество и четность**

**Distributon of 7-disorders by types: number and evenness**

| Число беспоряд-ков | Типы 7-беспорядков и их четность | | | | Всего |
|---|---|---|---|---|---|
| $D_{7,0}$ | $[7^1]$ | $[5^1 2^1]$ | $[4^1 3^1]$ | $[3^1 2^2]$ | 1854 |
| | 720 (+1) | 504(–1) | 420(–1) | 210(+1) | |
| $D_{7,1}$ | $[6^1 1^1]$ | $[4^1 2^1 1^1]$ | $[3^2 1^1]$ | $[3^1 2^2]$ | 1855 |
| | 840(–1) | 630(+1) | 280(+1) | 105(–1) | |
| $D_{7,2}$ | $[5^1 1^2]$ | $[3^1 2^1 1^2]$ | | | 924 |
| | 504(+1) | 420(–1) | | | |
| $D_{7,3}$ | $[4^1 1^3]$ | $[2^2 1^3]$ | | | 315 |
| | 210(–1) | 105(+1) | | | |
| $D_{7,4}$ | $[3^1 1^4]$ | | | | 70 |
| | 70(+1) | | | | |
| $D_{7,5}$ | $[2^1 1^5]$ | | | | 21 |
| | 21(–1) | | | | |
| $D_{7,7}$ | $[1^7]$ | | | | 1 |
| | 1(+1) | | | | |
| Всего | | | | | 5040 |

Согласно табл. 1 перестановки $S_7$ имеют 15 типов. Известно, что количество классов сопряженности симметрической группы $S_n$ равно количеству разбиений $p(n)$ числа $n$, что мы и имеем в данном случае, поскольку $p(7)=15$. Количество элементов $|C|$ в каждом цикловом классе $C=\left[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}\right]$ равно индексу централизатора $Z_{S_n}(g)$ элемента $g\in C$, т. е. $|C|=\left[S_n : Z_{S_n}(g)\right]$. Существует выражение для $|C|$ в замкнутой форме [11, 12], а именно:

$$|C|=\frac{|S_n|}{z_C}, \tag{3.4}$$

где $z_C$ – автоморфизм диаграммы Юнга разбиения $\left[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}...n^{\alpha_n}\right]$ для заданного класса $C$, вычисляемый по формуле

$$z_C=\prod_{k=1}^{n}k^{\alpha_k}\alpha_k!.$$

Например, если $C=[1^3 4^1]$, то $z_C=(1^3 3!)(4^1 4!)=24$. Следовательно, $|C|=7!/24=210$, что соответствует табл. 1.

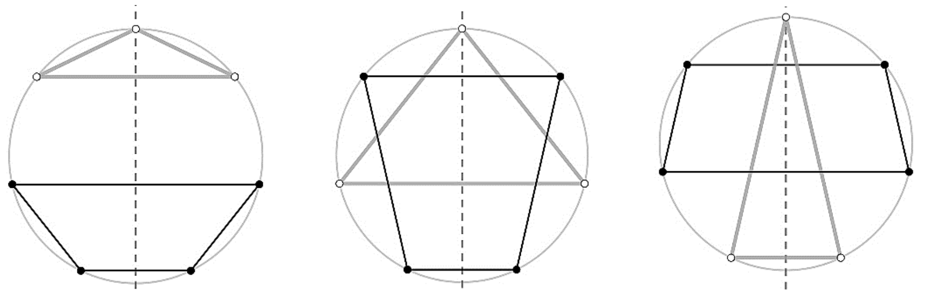
Так как $p(I,7)=3$, то какие-то из трех типов $[5^1 2^1]$, $[4^1 3^1]$ или $[3^1 2^2]$ должны содержать несимметричные ожерелья. Рассмотрим каждый из них.

Тип $[5^1 2^1]$ имеет 3 класса симметрий по 168 беспорядков в каждом [5]. Несимметричных ожерелий нет.

Тип $[4^1 3^1]$ имеет 9 классов симметрий (в них учитываются три варианта обхода вершин в 4-цикле $P_4$ и три возможные комбинации различных 3- и 4-циклов $P_3$ и $P_4$ в одном ожерелье) по 28 беспорядков в каждом, всего 252 беспорядка. Поясним сказанное. Рассмотрим полный граф $K_4$ (граф тетраэдра) [1, с. 29], в котором $n=4$ вершины и $m=6$ ребер. Чтобы разрушить в нем все циклы и получить остов графа $K_4$, необходимо, как минимум, удалить $\nu=m-n+1=3$ ребра ($\nu$ – цикломатическое число графа). Но мы хотим один цикл сохранить. Следовательно, удаляем только два неинцидентных друг другу ребра. Это можно сделать тремя способами, из которых выбираем только один (удаление диагоналей в $K_4$), что приводит к рис. 4. Это те самые три графа из возможных девяти, которые ннтерпретируют схемы рифмовок при анализе акцентной динамики стихотворных строф по вертикали.

Несимметричные беспорядки образуют 6 классов, также имеющих по 28 беспорядков, что в итоге дает 168 беспорядков. Таким образом, всего получаем 420 беспорядков.

*Тип* $[3^1 2^2]$ имеет 9 классов симметрии по 14 беспорядков в каждом, всего 126. Три ожерелья из девяти показаны на рис. 5. Так как 2-циклы допускают три способа взаимного расположения (смежный, перекрестный, охватный), то недостающие 6 графов легко восстанавливаются).



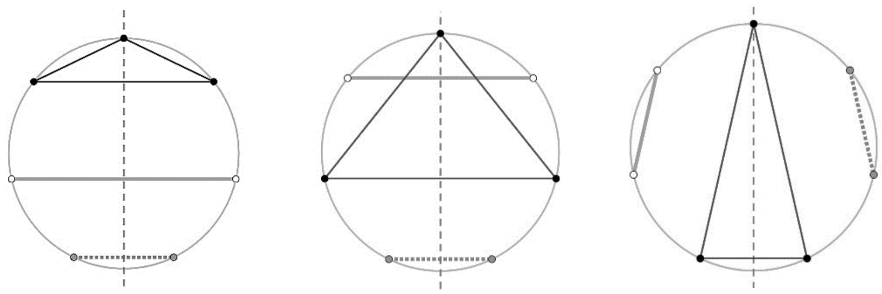
*а* *б* *в*

*Рис. 4.* Графы ожерелий типа $[4^1 3^1]$:

*а* – класс $C_1$, симметрия [1, 0]; ожерелье aaa bbbb; *б* – класс $C_2$, симметрия [1, 0], ожерелье aba baab; *в* – класс $C_3$, симметрия [1, 0], ожерелье abb aabb

*Fig. 4.* Type $[4^1 3^1]$ necklace graphs:

(*a*) class $C_1$, symmetry [1, 0], necklace aaa bbbb; (*b*) class $C_2$, symmetry [1, 0], necklace aba baab; (*c*) class $C_3$, symmetry [1, 0], necklace abb aabb



*а* *б* *в*

*Рис. 5.* Графы ожерелий типа $[3^1 2^2]$:

*а* – класс $C_1$, симметрия [1, 0], ожерелье aaa bccb; *б* – класс $C_2$, симметрия [1, 0], ожерелье aba bccb; *в* – класс $C_3$, симметрия [0, 1], ожерелье abb aacc

*Fig. 5*. Type $[3^1 2^2]$ necklace graphs:

(*a*) class $C_1$, symmetry [1, 0], necklace aaa bccb; (*b*) class $C_2$, symmetry [1, 0], n ecklace aba bccb; (*c*) class $C_3$, symmetry [0, 1], necklace abb aacc

Несимметричные ожерелья образуют 6 классов по 14 беспорядков в каждом, что дает 84 беспорядка. В итоге для этого типа имеем 210 беспорядков.

## 4. ДИАГРАММЫ СИММЕТРИЙ

Сопоставим графам ожерелий *диаграммы симметрий*. Для каждой компоненты графа, т. е. некоторого простого цикла, перечислим длины составляющих его ребер [13]. Суммарное количество ребер по всем циклам образует композицию [2, с. 67] – *упорядоченное разбиение* числового инварианта $J$ на фиксированное число слагаемых $m$, а именно: значение $i$-го элемента композиции равно количеству ребер длиной $i$. Сумма элементов композиции равна $J$.

Для $n = 4,\ldots,7$ диаграммы симметрий $n$-ожерелий представлены в табл. 2. Такие композиции, как хеш-функции $h = (h_1,...,h_{[n/2]})$, не определяют ожерелья однозначно, т. е. существуют одинаковые композиции, или коллизии, которым соответствуют неконгруэнтные ожерелья. Отсюда следует, что инвариант $J$ является неполным, как и определяемый с помощью композиции $h$ индекс Винера $W$ [14]:

$$J = \sum_{i=1}^{[n/2]} h_i , \qquad W = \sum_{i=1}^{[n/2]} ih_i .$$

Композиции ожерелий для всех типов и классов симметрий представлены в табл. 2 (курсивом в столбцах таблицы выделены композиции несимметричных ожерелий). Таким образом, утверждение теоремы 5 доказано.

В заключение отметим, что инварианты важны при проверке изоморфизма графов и в задачах компьютерной химии. Но пока теория инвариантов графов не позволяет выделять симметричные графы из их общего перечня. В этом смысле табл. 2 – лишь небольшой фрагмент, характеризующий сложность проблемы.

*Таблица 2*

*Table 2*

**Композиции $n$ ожерелий, $n$ = 4,…,7. Строки – количество ребер длиной 1, 2 и 3 ($J$ – инвариант)**

**Compositions of $n$ necklases, $n$ = 4,…,7. Rows are number of length edges 1, 2 and 3 ($J$ is an invariant)**

| | $n = 4$ | $n = 5$ | $n = 6$ | | | $n = 7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $[2^2]$ | $[3^1 2^1]$ | $[4^1 2^1]$ | $[3^2]$ | $[2^3]$ | $[5^1 2^1]$ | $[4^1 3^1]$ | $[3^1 2^2]$ |
| 1 | 200 | 130 | 221 | 060 | 201 | 501 | 511 | 311 |
| 2 | 020 | 310 | 401 | 420 | 021 | 330 | 151 | 410 |
| 3 | | | 230 | 222 | 120 | 321 | 331 | 230 |
| 4 | | | | | 300 | | *322* | 131 |
| 5 | | | | | 003 | | *232* | 041 |
| 6 | | | | | | | *223* | 023 |
| 7 | | | | | | | | 113 |
| 8 | | | | | | | | 320 |
| 9 | | | | | | | | 104 |
| 10 | | | | | | | | *122* |
| 11 | | | | | | | | *212* |
| 12 | | | | | | | | *221* |
| $J$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 |

## 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К СТИХОВЕДЕНИЮ

Конвертируем полученные результаты в терминологию стиховедения применительно к строфике, интерпретируя ожерелья как строфы стихотворений. Для этого сопоставим компонентам связности графов ожерелий схемы рифмовок, отражающие акцентную динамику строф по вертикали. Каждый цикл, связывающий вершины одной компоненты связности, обозначим соответствующей буквой. На конкретном примере проанализируем различие между задачами об ожерельях и беспорядках.

Пусть $n = 6$, ожерелье имеет тип $[2^3]$. В стиховедении это соответствует строфе из шести стихов с тремя парными рифмами. Согласно (1.1) всего имеем $P_6(2,2,2) = 90$ ожерелий, которые согласно лемме Бернсайда (1.2) для циклической групп $Z_6$ распределяются по 16 орбитам. С другой стороны, количество беспорядков того же типа согласно (3.4) равно 15, что существенно меньше, чем в первом случае. Это приводит к значительному снижению вычислительных затрат, так как не требует, как в первом случае, распределения 90 ожерелий по 16 орбитам. Если рассмотреть беспорядки над множеством раскрасок, а их всего будет $r! = 6$, то перестановки преобразуются в ожерелья, которых в итоге станет $15 \times 6 = 90$. Это означает, что сокращение вычислений достигается за счет того, что вершины графов перестановок не раскрашены.

Этап распределения ожерелий или беспорядков по классам конгруэнтности является общим для обеих задач и примерно одинаков по сложности. Так, например, для ожерелий типа $[2^r]$ с помощью разработанного алгоритма были получены следующие результаты относительно числа $N_{Sym}(r)$ классов симметричных ожерелий:

$$N_{Sym}(3) = 5, \qquad N_{Sym}(4) = 16,$$

$$N_{Sym}(5) = 53, \qquad N_{Sym}(6) = 210.$$

Полученные результаты для симметричных и несимметричных ожерелий длины $n = 7$ представлены в табл. 3.

Символом «*» в табл. 3 отмечены схемы рифмовок, обнаруженные автором в творчестве различных поэтов – от Лермонтова до Высоцкого (Анненский, Брюсов, Кузмин и др.). Скажем, симметричная схема aaa bccb – это знаменитая бородинская строфа, впервые использованная Лермонтовым в поэме «Бородино».

Отсутствие метки «*» в схеме рифмовки означает, что данная схема неупотребительна (скажем, тип $[5^1 2^1]$) или, говоря точнее, не обнаружена автором статьи. С другой стороны, можно высказать предположение, что непомеченные схемы рифмовок – это схемы, пока еще не использовавшиеся поэтами по эстетическим причинам.

*Таблица 3*

*Table 3*

**Перечень классов симметрий и асимметрий семистиший**

**List of symmetrys and asymmetry classes of seven-line stanzas**

| Номер ожерелья | Тип $[5^1 2^1]$ | Тип $[4^1 3^1]$ | | Тип $[3^1 2^2]$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Симметрия | Симметрия | Асимметрия | Симметрия | Асимметрия |
| 1 | aaa aabb | aaa bbbb | aaa bbab* | aaa bccb* | abc baca* |
| 2 | aaa abab | aba baab* | aaa babb* | aaa bcbc* | abc caba |
| 3 | aaa baab | aba abba* | | aaa bbcc | abc baac* |
| 4 | | | | aba bccb* | abc caab |
| 5 | | | | aba cbac | abb caac* |
| 6 | | | | aba bcac | abb caca* |
| 7 | | | | abc aacb* | |
| 8 | | | | abc aabc | |
| 9 | | | | abc cbba* | |

Таких схем, помимо типа $[5^1 2^1]$, насчитывается семь. Все представленные схемы рифмовок можно изобразить в виде соответствующих графов, включая и те графы, которые в статье опущены.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложен подход к исследованию симметричных ожерелий, основанный на рассмотрении ожерелий как беспорядков разных типов, и приведены результаты подсчета симметричных $n$-ожерелий для $n = 4,\dots,7$. Ожерелья рассматриваются как беспорядки степени $n$. Доказана основная теорема, согласно которой несимметричных ожерелий длиной $n \le 6$ не существует. Для рассмотренных случаев установлено, что ожерелья каждого типа обладают одной четностью. Показано, что типы $[4^1 3^1]$- и $[3^1 2^2]$-ожерелья длиной 7 содержат классы несимметричных ожерелий. Введено понятие диаграмм симметрий ожерелий. Установлена связь между порядком симметрии ожерелий
и мощностью соответствующих классов симметрий.

Дальнейшие направления исследований могут быть связаны с поиском критериев симметричности ожерелий, в частности, с установлением характеристических свойств беспорядков, характеризующих симметричные ожерелья. Эта задача содержательно близка к задаче задания выпуклого многогранника в $R^3$, рассмотренной в [15]. В этой работе показано, что минимальное число параметров, достаточных для задания многогранника, – это число расстояний между его вершинами, и указан алгоритм однозначного восстановления по ним многогранника. Тот же вопрос возникает и в нашем случае: какая минимальная система параметров должна быть задана, чтобы можно было однозначно восстановить соответствующее ей симметричное ожерелье?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
2. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
3. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
4. *Яковенко Д.И.* Задача об ожерельях // Вестник Омского университета. – 1998. – Вып. 2. – С. 21–24.
5. *Григорьев Ю.Д.* Перечисление симметричных ожерелий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – Т. 61. – С. 97–107. – DOI: 10.17223/19988605/61/10.
6. *Petitjean M.* Chirality and symmetry measures: some open problems // Workshop on Rigidity and Symmetry, The Fields Institute, Toronto, October 17–21 2011. – Toronto, 2011.
7. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976. – 600 с.
8. *Шень А.* Перестановки. – М.: Изд-во МЦИМО, 2020. – 76 с. – ISBN 978-54439-2776-3.
9. *Марковский М.В.* Комбинаторика (лекции). Лекция 5. Задача о беспорядках. – URL: https://textarchive.ru/c-1099784-p3.html (дата обращения: 30.08.2023).
10. *Портер Л.Г.* Симметрия – владычица стихов: очерк начал общей теории поэтических структур. – М.: Языки славянской культуры, 2003. – 256 с.
11. *Fulton W., Harris J.* Representation theory: A fist Course. – New York: Springer Science and Business Media, 2013. – 551 p. – (Graduate texts in mathematics; vol. 129).
12. *Жабин А.А.* Спиновые числа Гурвица и операторы разрезания-склейки: магистерская диссертация / Московский физико-технический институт. – Долгопрудный, 2022. – 46 с.
13. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
14. *Wiener H.* Structural determination of paraffin boiling points // Journal of the American Chemical Society. – 1947. – Vol. 69, N 1. – P. 17–20.
15. *Пулатов А.К., Саматова Н.Ф.* О сложности задания выпуклого многогранника в $R^3$ // Дискретная математика. – 1991. – Т. 9, вып. 2. – С. 148–156.

*Григорьев Юрий Дмитриевич*, доктор технических наук, профессор кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ Санкт-Петербургского государственного технического университета («ЛЭТИ»), специалист в области теории планирования эксперимента, теории риска и квантитативной филологии. Имеет более 160 публикаций, в том числе 4 монографии. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

*Grigoriev Yu.D.*, D.Sc. (Eng). professor at the department of computer science in St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), an expert in the field of experimental design theory, risk theory and quantitative philology. He has more 160 publications including 4 monographs. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2023-3-19-36

## *Disorders Problem*[*]

*YU.D. GRIGORIEV*

*St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), 5 Professor Popov Street, St. Petersburg, 197376, Russian Federation*

*yuri_grigoriev@mail.ru*

**Abstract**

The problem of characterizing symmetric necklaces as disorders is considered. Such an idea is an alternative approach to the one using Poya's enumeration theorem, including Burnside's lemma. The relationship between partitions of numbers and permutation types is shown. Disorder types are associated with necklace types considered as permutations in which no element remains in place, as well as with disorders with fixed elements. The distributions of disorders by types for necklaces up to the seventh degree are studied. The number and enumeration of disorders of each type is carried out, and their evenness is established.

Particular attention is paid to the study of the symmetric necklaces properties. Classes of symmetry and asymmetry are enumerated for each necklace type considered. At the same time, the concepts of chiral and achiral symmetry are introduced as varieties of axial symmetry. Relationships between the power of symmetry classes and the order of symmetry of necklaces are revealed. The concept of symmetry diagrams for necklaces is introduced. Diagrams could be applied for determining the properties of invariance of symmetric and asymmetric necklaces of a given length. The concept of congruence is used as an equivalence relation between necklaces. It allows implementing a geometric approach to the study of necklaces and the visualization of the results obtained. For this purpose, necklaces are associated with multiconnected non-oriented graphs, the vertices of which are the vertices of regular polygons. In this case, the number of vertices in the graph corresponds to the necklace's length, and the number of connected components coincides with the number of bead colors.

As an application of the results obtained, the possibility of studying the accent dynamics of poetic stanzas vertically using necklaces is considered. Empirical data on the use of various types of seven-line stanzas in poetic practice are presented. It is noted that approximately a quarter of the existing symmetric types of necklaces for various reasons do not find practical application.

**Keywords**: permutation, necklace, symmetry, achirality, chirality, partition function, disorder, symmetry diagram

## REFERENCES

1. Harary F. *Graph Theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1969 (Russ. ed.: Kharari F. *Teoriya grafov*. Moscow, Mir Publ., 1973. 302 p.).

2. Andrews G.E. *The Theory of Partition*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1976 (Russ. ed.: Endryus G. *Teoriya razbienii*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 256 p.).

3. Sachkov V.N. *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoi matematiki* [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 384 p.

4. Yakovenko D.I. Zadacha ob ozherel'yakh [Necklaces problem]. *Vestnik Omskogo universiteta = Herald of Omsk university*, 1998, no. 2, pp. 21–24.

[*] *Received 24 April 2023.*

5. Grigoriev Yu.D. Perechislenie simmetrichnykh ozherelii [Enumeration of symmetrical necklaces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2022, vol. 61, pp. 97–107. DOI: 10.17223/19988605/61/10.

6. Petitjean M. Chirality and symmetry measures: some open problems. *Workshop on Rigidity and Symmetry*, The Fields Institute, Toronto, October 17–21, 2011.

7. Peterson W.W., Weldon E.J. *Error-Correcting codes*. Cambridge, London, The Mit Press, 1972 (Russ. ed.: Piterson U., Ueldon E. *Kody, ispravlyayushchie oshibki*. Moscow, Mir Publ., 1976. 600 p.).

8. Shen A. *Perestanovki* [Permutations]. Moscow, MTsIMO Publ., 2020. 76 p. ISBN 978-54439-2776-3.

9. Markowsky M. V. *Kombinatorika (Lektsii). Lektsiya 5. Zadacha o besporyadkakh.* [Combinatorial analysis (Lessons). Lesson 5. Disorders problem]. Available at: https://textarchive.ru/c-1099784-p3.html (accessed 30.08.2023).

10. Porter L.G. *Simmetriya – vladychitsa stikhov: ocherk nachal obshchei teorii poeticheskikh struktur* [Symmetry is the sovereign of poetry. Essay on the Principles of a general theory of poetic structures]. Moscow, Yazyki slavyanskoi kul'tury Publ., 2003. 256 p.).

11. Fulton W., Harris J. *Representation theory: A fist Course*. New York, Springer Science and Business Media, 2013. 551 p.

12. Zhabin A.A. *Spinovye chisla Gurvitsa i operatory razrezaniya-skleiki* [Spin Hurwitz numbers and cut-glue operators]. Master's dissertation. Moscow Institut of Physics and Technology. Dolgoprudny town, Moscow region, 2022. 46 p.

13. Ore Ø. *Theory of Graphs*. Providence, American Mathematical Society, 1962 (Russ. ed.: Ore O. *Teoriya grafov*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 352 p.).

14. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*, 1947, vol. 69, no. 1, pp. 17–20.

15. Pulatov A.K., Samatova N.F. O slozhnosti zadaniya vypuklogo mnogogrannika v $R^3$ [Complexity of the specification of a convex polyhedron in $R^3$]. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*, 1991, vol. 9, iss. 2, pp. 148–156. (In Russian).

Для цитирования:

*Григорьев Ю.Д.* Разработка архитектурного решения программного обеспечения для устройств интернет-вещей // Системы анализа и обработки данных. – 2023. – № 3 (91). – С. 19–36. – DOI: 10.17212/2782-2001-2023-3-19-36.

For citation:

Grigoriev Yu.D. Zadacha o besporyadkakh [Disorders Problem]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 3 (91), pp. 19–36. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-3-19-36.