

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.876.5

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-1-41-52

Моделирование транспортных потоков методом системной динамики*

Ю.В. ШОРНИКОВ^а, К.А. ТИМОФЕЕВ^б

630073, Новосибирск, проспект Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет

^а shornikov@corp.nstu.ru ^б k.timofeev@corp.nstu.ru

В статье рассматривается применение методологии системной динамики для моделирования управляемых транспортных потоков. В классической постановке модели системной динамики представляют систему конечно-разностных уравнений, которая является аппроксимацией задачи Коши методом Эйлера. Реализация конечно-разностных уравнений в системной динамике Дж. Форрестера выполняется специализированными графическими средствами DYNAMO. Предлагается реализацию задачи Коши выполнять структурными схемами, в которых устанавливается взаимно однозначное соответствие конкретных структурных звеньев парадигмам системной динамики. В результате проведенных исследований показано, что аperiodическое звено с типовой нелинейной функцией «насыщение» с достаточной точностью идентифицирует базовые парадигмы системной динамики – темпы, уровни и запаздывания. Показано, что полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений при наложении условий управления имеет разрывы первого рода по производным и требует для эффективного решения методов интегрирования с переменным шагом и переменным порядком.

Предложенный подход моделирования транспортных потоков, в отличие от классического, позволяет использовать современные инструментальные средства моделирования с графическим языком структурных схем и библиотекой методов численного анализа сложных динамических процессов. Реализация конкретного тестового сценария моделирования транспортных потоков выполнена в программном комплексе SimInTech. Получены метрики эффективности методов интегрирования. Проведен сравнительный анализ эффективности методов интегрирования при решении данной задачи. Показано, что наиболее эффективными при решении задач рассмотренного класса являются явные адаптивные методы интегрирования ARK21, AM61 с переменным шагом из библиотеки SimInTech, которые значительно эффективнее явного метода Эйлера в классической системной динамике.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, модели транспортных потоков, системная динамика, жесткие динамические системы, программная модель, численные методы, адаптивные методы интегрирования, моделирование

* Статья получена 27 ноября 2023 г.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов моделирования транспортных потоков [1] является метод системной динамики [2]. При использовании метода системной динамики возникает необходимость численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). При дискретном управлении динамическими процессами в правой части ОДУ могут возникнуть разрывы первого рода по фазовым переменным. В этом случае непрерывная модель объекта становится дискретно-непрерывной или гибридной [3, 4], возможно, с жесткими режимами [5]. Это требует при моделировании применения специальных методов интегрирования [6] с детекцией событий [7]. В статье приводится прозрачный тестовый сценарий моделирования транспортного потока и сравнительный анализ явных методов интегрирования из библиотеки отечественной инструментальной среды моделирования SimInTech [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве модельной задачи рассмотрим пример [9]. На рис. 1 приведена схема одностороннего движения с материка на остров с ограничениями по количеству автомобилей на мосту и острове.

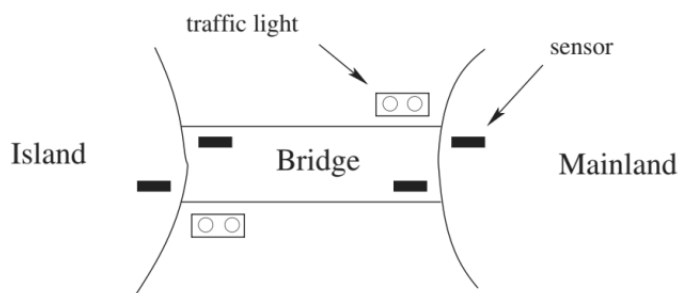


Рис. 1. Одностороннее управляемое светофором движение автомобилей

Fig. 1. One-way traffic light-controlled vehicle movement

Материк (**Mainland**) будем обозначать индексом 1, остров (**Island**) – индексом 2.

Условия задачи включают следующее:

- 1) автомобиль заезжает на мост только на зеленый сигнал светофора;
- 2) автомобиль едет без остановок только в одном направлении с постоянной скоростью;
- 3) приоритет выезда с моста в обоих направлениях;
- 4) приоритет заезда на мост с острова;
- 5) уровень автомобилей [тонн] на мосту и на острове не должен превышать заданных значений.

Для моделирования задачи был использован метод системной динамики. Основными введенными Дж. Форрестером парадигмами системной динамики являются уровни, темпы, запаздывания и функции решений. Модели систем-

ной динамики описываются с помощью разностных уравнений и с учетом оригинальной идентификации переменных имеют вид

$$\begin{aligned} LEV.K &= LEV.J + DT(IN.JK - OUT.JK), \\ OUT.KL &= LEV.K / DEL, \end{aligned} \quad (1)$$

где $LEV.K$ – текущий уровень с момента K ; $IN.JK$ – входной темп на интервале $[J, K]$; $OUT.JK$ – выходной темп на полуинтервале $[J, K]$; DT – постоянный шаг интегрирования, равный постоянной длине интервалов дискретизации; DEL – величина запаздывания.

Функции решений определяют темпы потоков из условий задачи и описываются логико-алгебраическими уравнениями, правые части которых могут быть определены как кусочно-линейные функции. Так, например, в нашем случае выходной поток автомобилей $OUT(t)$ не может превышать некоторой величины b / DEL , связанной с ограниченной скоростью въезда/выезда на мост. Тогда $OUT(t)$ из (1) следует доопределить следующим образом:

$$OUT.KL = \begin{cases} LEV.K / DEL, & LEV.K \leq b, \\ b / DEL, & LEV.K > b. \end{cases} \quad (2)$$

Базовые модели системной динамики (1) являются решением задачи Коши:

$$\begin{aligned} LEV'(t) &= IN(t) - OUT(t), \\ LEV(0) &= LEV_0, \\ OUT(t) &= LEV(t) / DEL, \end{aligned} \quad (3)$$

где LEV – уровень или фазовая переменная состояния с входным и выходным потоками IN, OUT и постоянным запаздыванием DEL .

Анализ парадигм системной динамики (1) – (3) позволяет поставленную задачу управления движением автомобилей рассматривать как задачу компьютерного моделирования непрерывной системы в форме Коши [10]:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $y \in R^N$ – вектор состояния; $f : R \times R^N \rightarrow R^N$ – нелинейная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица; $y_0 \in R^N$ – вектор начальных условий; N – размерность фазового пространства; t – независимая переменная (время).

Система уравнений, описывающая перемещение транспорта в терминологии системной динамики на интервале $[0, t_k]$, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ_{11}}{dt} &= x_1 - y_1, & y_1 &= s_1 f_1(z_{11}), \\
 \frac{dZ_{12}}{dt} &= y_1 - y_2, & y_2 &= \frac{Z_{12}}{T_m}, \\
 \frac{dZ_3}{dt} &= y_2 - y_3, & y_3 &= \frac{Z_3}{T_o}, \\
 \frac{dZ_{22}}{dt} &= y_3 - y_4, & y_4 &= s_2 f_2(z_{22}), \\
 \frac{dZ_{21}}{dt} &= y_4 - y_5, & y_5 &= \frac{Z_{21}}{T_m}, \\
 z_{11}(0) &= z_{12}(0) = z_{21}(0) = z_{22}(0) = z_3(0) = 0, \\
 t &\in [0, t_k],
 \end{aligned} \tag{5}$$

где x_1 – входной темп на въезде в очередь перед светофором с материка на остров; $s_1 = \{0, 1\}$ – бинарная переменная состояний светофора с материка (1 – зеленый, 0 – красный); y_1 – выходной темп из очереди перед светофором с материка; z_{11} – уровень [тонны] автомобилей в очереди на материке; y_2 – темп выезда с материка; T_m – постоянная времени проезда по мосту; z_{12} – уровень автомобилей на мосту в направлении материк – остров; y_3 – темп выезда с острова перед светофором; T_o – постоянная времени нахождения автомобиля на острове; z_3 – текущий уровень автомобилей острове; y_4 – темп выезда с острова; $s_2 = \{0, 1\}$ – бинарная переменная состояний светофора с острова; y_5 – темп выезда с моста в направлении материка; z_{21} – текущий уровень автомобилей в очереди с острова.

Функции решений определяются в соответствии с (2)

$$f_1(z) = f_2(z) = \begin{cases} MAX_TEMP \cdot z / Ms_max, & (z < Ms_max), \\ MAX_TEMP, & z \geq Ms_max, \end{cases} \tag{6}$$

где Ms_max – максимальный уровень до насыщения; MAX_TEMP – максимально возможный темп выезда.

Суммарный уровень на острове рассчитывается как сумма масс на основном участке и очереди:

$$M_o = z_3 + z_{22}. \tag{7}$$

Суммарный уровень на мосту вычисляется как сумма масс в направлении материк – остров и остров – материк

$$M_m = z_{12} + z_{21}. \quad (8)$$

Управление движением реализовано при помощи нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} S_1 &= g_1(M_o)g_2(Z_{21})g_3(M_m), \\ S_2 &= (1 - g_1(M_o)g_2(Z_{21}))g_2(Z_{12})g_3(M_m), \end{aligned} \quad (9)$$

где g_1, g_2, g_3 – разрывные функции следующего вида:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \begin{cases} 1, z \leq M_ostrov - M_most_max, \\ 0, z > M_ostrov - M_most_max, \end{cases} \\ g_2(z) &= \begin{cases} 1, z \leq M_{\min}, \\ 0, z > M_{\min}, \end{cases} \\ g_3(z) &= \begin{cases} 1, z \leq M_most_max, \\ 0, z > M_most_max, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где M_ostrov – максимально допустимый уровень автомобилей на острове;
 M_most_max – максимально допустимый уровень автомобилей на мосту;
 $M_{\min}$ – минимальный уровень, меньше которого мост считается свободным.

Аппроксимация задержки темпа перемещения по мосту выполняется при помощи аperiodического звена первого порядка с уравнением

$$z' = x - y, \quad y = \frac{z}{T}, \quad (11)$$

где u – входной темп, y – выходной темп, T – постоянная времени запаздывания на преодоление моста.

Решением (11) при начальных условиях $z(0) = 1$ будет

$$z(t) = e^{-t/T}, \quad t \in [0, t_k]. \quad (12)$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ характеризует погрешность и время задержки – T_{del} . Тогда с учетом введенной погрешности постоянная времени из (12) имеет вид

$$T = -T_{del} / \ln(\varepsilon). \quad (13)$$


```

//Скорость движения потока
V = 5; // м/с
// Среднее расстояние между машинами, метров
Lone = 1;
// Средний тоннаж единичной машины, тонн
Mone = 1;
// Доля от массы машины, при которой она учитывается 75%
kone = 0.66;
// Длины светофорных участков, метров
Ls = 10;
// Минимальное расстояние между машинами на светофорном участке, м
Lone_min = 1;
// Длина моста, метров
Lm = 10;
// Максимальное количество машин на мосту
N_most_max = 2;
// Максимальное количество машин на острове
N_ost_max = 4;
//Заданное время задержки машин на острове, сек
T_zad_ost = 20;
// Максимальный темп, тонн/с
MAX_TEMP = V*Mone/Lone;
// Максимальная масса машин на светофорном участке (накопление)
Ms_max = Mone*Ls/Lone_min;
//Ограничение массы на мосту, тонн
M_most_max = N_most_max*Mone;
//Заданная задержка машина на мосту
Tm_zad = Lm/V;
//Постоянная времени моста на основе заданной задержки
Tm = -Tm_zad/ln(kone);
// Максимальная масса на острове, т
M_ostrov = N_ost_max*Mone;
//Минимальная масса при которой дорога считается пустой
MIN_MASS = Mone*kone;
//Постоянная времени для звена первого порядка на основе заданного времени
T_ostrov = -T_zad_ost/ln(kone);

```

Рис. 3. Текстовое описание параметров модели в SimInTech

Fig. 3. Text description of the parameters of the model in SimInTech

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В настройках параметров расчета задана относительная точность решения $\varepsilon = 10^{-4}$, начальный шаг интегрирования $h_0 = 10^{-1}$ [единиц времени]. Допустимый диапазон шага интегрирования задан от $h_{\min} = 10^{-1}$ до $h_{\max} = 1$. Конечное время моделирования равно $t_k = 70$.

Тестовый сценарий моделирования состоит в следующем: входной поток автомобилей с материка задан в виде источника прямоугольного сигнала. Максимальное количество автомобилей при одностороннем движении по мосту равно 2. Максимальное количество автомобилей на острове равно 4. Обратное движение с острова начинается с момента времени $t = 31$. При заданных в разделе 1 условиях 1–4 результаты моделирования модели (5) – (14) в реализации структурными схемами (рис. 2) и при выбранных параметрах (рис. 3) приведены на рис. 4.

Для сравнительного анализа будем применять явные методы интегрирования типа Рунге – Кутты с адаптивным выбором численной схемы и переменным шагом ARK21, ARK32, ARK32os, AM61 [11], реализованные в программном комплексе SimInTech. Также для сравнения приведен классический явный метод RKF23[12], неявный метод Гира [13] и диагонально-неявный метод Скворцова 4-го порядка ESDIRK4 [14, 15].

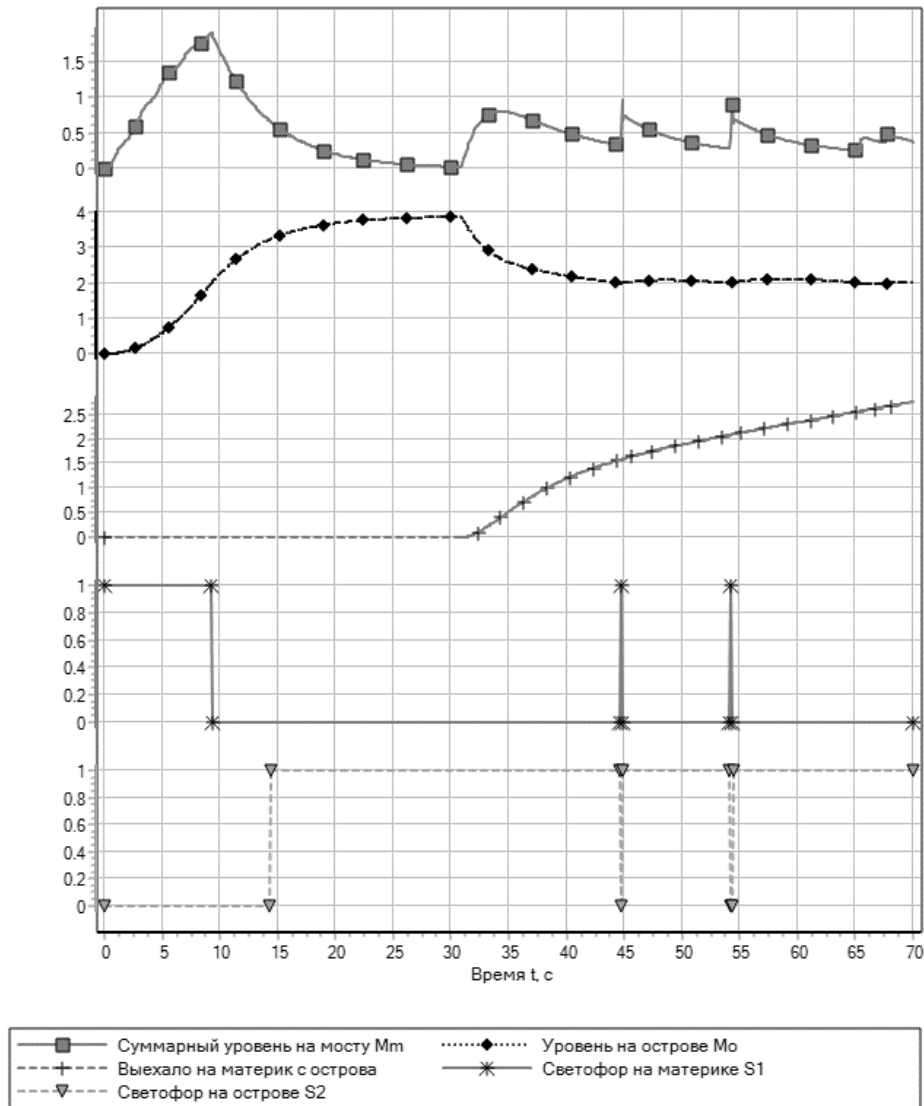


Рис. 4. Графики уровней и состояний светофоров

Fig. 4. Chart of levels and traffic light states

В таблице приведены численные характеристики методов при различных размерностях задачи, N_h – количество хороших шагов, N_{bad} – количество ошибочных шагов, N_f – количество расчетов правой части ОДУ, T – физическое время расчета в секундах.

Характеристики методов интегрирования

Characteristics of integration methods

Метод	RKF23	ARK21	ARK32	AM61	ARK2os	Гира	ESDIRK4
N_h	574	436	444	453	429	641	429
N_{bad}	5	133	223	17	113	53	188
N_f	2310	1576	3114	1395	2599	1337	3615
T, c	0.0027	0.0016	0.0025	0.0018	0.0023	0.0023	0.004

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из приведенных результатов моделирования, построенная модель транспортного потока и алгоритм управления обеспечивают корректное соблюдение заданных ограничений по уровням на острове и мосту. Приведенный график состояний системы управления светофорами соответствует условию соблюдения одностороннего движения.

Наиболее эффективным при решении задач рассмотренного класса является метод AM61 переменного порядка с адаптивной численной схемой. Следующий по эффективности метод ARK21, имеющий порядок 2 для нежестких задач и порядок 1 для жестких. Диагонально-неявные методы интегрирования для задач с переключениями данного класса менее эффективны, так как требуют большего количества вычислений функции, а также численного расчета матрицы Якоби, что сопряжено с вычислительными проблемами при больших размерностях. Неявные методы интегрирования (например, метод Гира) при заданных настройках точности менее эффективны, так как имеют большие вычислительные затраты, но в то же время при приближении к границе превышения массы на острове начинают избыточно дробить шаг интегрирования.

Показано, что использованный метод инструментального моделирования с графическим языком структурных схем для решения общей задачи Коши позволяет улучшить точность и эффективность вычислительных экспериментов сложных динамических процессов методом системной динамики Дж. Форрестера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Недяк А.В., Рудзейт О.Ю., Зайнетдинов А.Р. Классификация методов моделирования транспортных потоков // Вестник евразийской науки. – 2019. – № 6. – URL: <https://esj.today/PDF/87SAVN619.pdf> (дата обращения: 01.03.2024).
2. Forrester J.W. Industrial dynamics. – MIT Press, 1961. – 464 p.
3. Esposito J., Kumar V., Pappas G.J. Accurate event detection for simulating hybrid systems // Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2001). – Springer, 2001. – P. 204–217. – (LNCS; vol. 2034). – DOI: 10.1007/3-540-45351-2_19.
4. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.

5. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential algebraic problems. – 2nd rev. ed. – Springer, 1996. – 614 p.
6. Скворцов Л.М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 230 с. – ISBN: 978-5-97060-636-0.
7. Попов Е.А., Шорников Ю.В. Детекция событий разного типа в гибридных динамических системах // Научный вестник НГТУ. – 2020. – № 4 (80). – С. 159–176. – DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-159-176.
8. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: практикум по моделированию систем автоматического регулирования / Б.А. Карташов, Е.А. Шабаев, О.С. Козлов, А.М. Щекатуров. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 424 с. – ISBN 978-5-97060-482-3.
9. Abrial J.-R. Modeling in Event-B: system and software engineering. – Cambridge University Press, 2010. – 586 p.
10. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Моделирование жестких гибридных систем. – СПб.: Лань, 2019. – 420 с.
11. Скворцов Л.М. Построение и анализ явных адаптивных одношаговых методов численного решения жестких задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60, № 7. – С. 1111–1125. – DOI: 10.31857/S0044466920070108.
12. Fehlberg E. Klassische Runge–Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittwerten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme // Computing. – 1970. – Vol. 6. – P. 61–71. – DOI: 10.1007/BF02241732.
13. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. – Chichester: Wiley, 2008. – 463 p.
14. Скворцов Л.М. Неявный метод пятого порядка для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 6. – С. 978–984.
15. Kvernø A. Singly diagonally implicit Runge–Kutta methods with an explicit first stage // BIT Numerical Mathematics. – 2004. – Vol. 44 (3). – P. 489–502.

Шорников Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета, старший научный сотрудник Института автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук (ИАиЭ СО РАН). Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследования гибридных динамических систем. Имеет более 200 печатных работ. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Тимофеев Константин Александрович, аспирант кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследования динамических систем. Имеет более 10 печатных работ. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

Shornikov Yury V., PhD (Eng.), professor at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University, senior researcher at the Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. The main direction of his scientific research is mathematical modeling and study of hybrid dynamic systems. He has over 200 publications. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Timofeev Konstantin A., postgraduate at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University. The main direction of his scientific research is mathematical modeling, and studies of dynamic systems. He has more than 10 publications. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

Simulation of traffic flows using the system dynamics method*YU.V. SHORNIKOV^a, K.A. TIMOFEEV^b

Novosibirsk State Technical University, Department of Automated Control System, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073

^a shornikov@corp.nstu.ru ^b k.timofeev@corp.nstu.ru**Abstract**

The article discusses the application of the system dynamics methodology for simulation of controlled traffic flows. In the classical formulation, system dynamics models represent a system of finite-difference equations, which is an approximation of the Cauchy problem by the Euler method. The implementation of finite-difference equations in system dynamics by J. Forrester is carried out by the DYNAMO specialized graphical tools. It is proposed that the Cauchy problem be implemented using structural diagrams in which a one-to-one correspondence of specific structural links to system dynamics paradigms is established. As a result of the research, it was shown that an aperiodic link with a typical nonlinear “saturation” function identifies with a sufficient accuracy the basic paradigms of system dynamics, such as rates, levels and delays. It is shown that the resulting system of ordinary differential equations, when imposing control conditions, has discontinuities of the first kind in derivatives and requires integration methods with a variable step and variable order for effective solution.

The proposed approach to modeling traffic flows, in contrast to the classical one, allows the use of modern modeling tools with a graphical language of structural diagrams and a library of methods for numerical analysis of complex dynamic processes. The implementation of a specific test scenario for modeling traffic flows was carried out in the SimInTech software package. The efficiency metrics of integration methods are obtained. A comparative analysis of the effectiveness of integration methods in solving this problem was carried out. It is shown that the most effective in solving problems of the considered class are the explicit adaptive integration methods ARK21, AM61 with a variable step from the SimInTech library, which are much more effective than the explicit Euler method in classical system dynamics.

Keywords: differential equations, traffic flow models, system dynamics, stiff dynamic systems, software model, numerical methods, adaptive integration methods, modeling

REFERENCES

1. Nedyak A.V., Rudzeyt O.Yu., Zainetdinov A.R. Klassifikatsiya metodov modelirovaniya transportnykh potokov [Classification of methods for modeling traffic flows]. *Vestnik evraziiskoi nauki = The Eurasian Scientific Journal*, 2019, no. 6. Available at: <https://esj.today/PDF/87SAVN619.pdf> (accessed 01.03.2024).
2. Forrester J.W. *Industrial dynamics*. MIT Press, 1961. 464 p.
3. Esposito J., Kumar V., Pappas G.J. Accurate event detection for simulating hybrid systems. *Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2001)*. Springer, 2001, pp. 204–217. DOI: 10.1007/3-540-45351-2_19.
4. Kolesov Yu.B., Senichenkov Yu.B. *Modelirovanie sistem. Dinamicheskie i gibridnye sistemy* [Modeling systems. Dynamic and hybrid systems]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2012. 224 p.
5. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential algebraic problems*. 2nd rev. ed. Springer, 1996. 614 p.
6. Skvortsov L.M. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii* [Numerical solution of ordinary differential and differential-algebraic equations]. Moscow, DMK-Press, 2018. 230 p. ISBN: 978-5-97060-636-0.

* Received 27 November 2023.

7. Popov E.A., Shornikov Yu.V. Detektsiya sobytii raznogo tipa v gibridnykh dinamicheskikh sistemakh [Detection of different type events in hybrid dynamical systems]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 4 (80), pp. 159–176. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-159-176.

8. Kartashov B.A., Shabaev E.A., Kozlov O.S., Shchekaturov A.M. *Sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem SimInTech: praktikum po modelirovaniyu sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [The environment for dynamic modeling of technical systems SimInTech: a workshop on modeling automatic control systems]. Moscow, DMK Press, 2017. 424 p. ISBN 978-5-97060-482-3.

9. Abrial J.-R. *Modeling in Event-B: system and software engineering*. Cambridge University Press, 2010. 586 p.

10. Novikov E.A., Shornikov Yu.V. *Modelirovanie zhestkikh gibridnykh sistem* [Modeling of stiff hybrid systems]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2019. 420 p.

11. Skvortsov L.M. Postroenie i analiz yavnykh adaptivnykh odnoshagovykh metodov chislennogo resheniya zhestkikh zadach [Construction and analysis of explicit adaptive one-step methods for solving stiff problems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 7, pp. 1111–1125. DOI: 10.31857/S0044466920070108. (In Russian).

12. Fehlberg E. Klassische Runge – Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittwerten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing*, 1970, vol. 6, pp. 61–71. DOI: 10.1007/BF02241732.

13. Butcher J.C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Chichester, Wiley, 2008. 463 p.

14. Skvortsov L.M. Neyavnyi metod pyatogo poryadka dlya chislennogo resheniya differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii xAn implicit fifth-order method for the numerical solution of differential-algebraic equations]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 978–984. (In Russian).

15. Kværnø A. Singly diagonally implicit Runge – Kutta methods with an explicit first stage. *BIT Numerical Mathematics*, 2004, vol. 44 (3), pp. 489–502.

Для цитирования:

Шорников Ю.В., Тимофеев К.А. Моделирование транспортных потоков методом системной динамики // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 1 (93). – С. 41–52. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-1-41-52.

For citation:

Shornikov Yu.V., Timofeev K.A. Modelirovanie transportnykh potokov metodom sistemnoi dinamiki [Simulation of traffic flows using the system dynamics method]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 1 (93), pp. 41–52. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-1-41-52.