

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.115

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36

Алгоритмы перечисления симметричных хордовых диаграмм*

Ю.Д. ГРИГОРЬЕВ^{1,а}, В.Ю. ЩЕКОЛДИН^{2,б}

¹ 197376, РФ, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет (НГТУ-НЭТИ)

^а yuri_grigoriev@mail.ru ^б raix@mail.ru

Многие приложения требуют исчерпывающих перечней строк, на которые могут налагаться различные требования, например, такие как их неэквивалентность при действии на них групп симметрии. Ожерелье – это класс эквивалентности r -арных строк при вращении. Непомеченное r -арное ожерелье – это класс эквивалентности r -арных строк при вращении и перестановке символов алфавита. Пусть G – группа симметрий, действующая на заданном множестве ожерелий T . Ожерелье $x \in T$ называется *симметричным*, если существует элемент $g \in G$, $g \neq e$ такой, что $gx = x$. Возможны другие, эквивалентные приведенному определению симметрии ожерелий. Все они так или иначе связаны с определением симметрии фигуры, сопоставляемой с непомеченным ожерельем. Плоская фигура называется *симметричной*, если она самосовмещается при движениях пространства R^2 , т. е. при его изометрических преобразованиях.

Частным случаем фигур и, соответственно, ожерелий являются хордовые диаграммы. Хордовые диаграммы представляют объект для исследования, интересный с разных сторон (теория узлов, диаграммы Фейнмана, представления алгебр Ли), и изучались многими авторами. В статье представлены алгоритмы перечисления *симметричных* хордовых диаграмм и на простых примерах показана их связь с теорией узлов. Перечень симметричных хордовых диаграмм может, в частности, представлять интерес в области математического стиховедения, занимающегося исследованием динамики стихотворных строф по горизонтали (ритм, слоговый объем стихов) и по вертикали (схемы рифмовок, рефренов, и других стилистических средств).

Ключевые слова: хордовые диаграммы, ожерелье, перечисление диаграмм, орбита, классы эквивалентности, лемма Бернсайда, слова Линдона

* Статья получена 27 февраля 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Существует четыре наиболее естественных действия группы на строки в зафиксированном алфавите: a – сохранение строки неизменной, b – обращение строки, c – вращение строки и d – перестановка символов строки с помощью перестановки символов алфавита. Соответственно имеются четыре группы, осуществляющие эти действия: a – циклическая группа $\mathbb{Z}_1$; b – циклическая группа $\mathbb{Z}_2$, действующая на индексы (инверсия); c – циклическая группа $\mathbb{Z}_n$, действующая на индексы; d – симметрическая группа S_r , действующая на алфавит из r символов.

Каждое действие группы, или композиция действий группы, разбивает множество r -арных строк на классы эквивалентности, называемые *орбитами*. Многие приложения требуют исчерпывающих перечней представителей этих классов эквивалентности. Для генерации таких классов естественно выбирать в качестве их представителей строки, наименьшие в лексикографическом смысле. При таком выборе представителей классов известны эффективные алгоритмы генерирования классов эквивалентности для каждого из действий a , b , c и d . Считается, что алгоритм эффективен, если объем вычислений, используемых для образования классов, пропорционален числу образуемых классов [1]. О таких алгоритмах говорят как о САТ-алгоритмах (constant amortized time).

В дополнение к этим четырем естественным группам движений интерес представляют композиции двух или более групп движений. Например, композиции b и c приводят к группам диэдра, результирующие классы эквивалентности которых называются *браслетами*. Савада [2, 3] разработал САТ-алгоритмы генерирования r -арных браслетов и неизоморфных хордовых диаграмм. Приложения хордовых диаграмм и ожерелий общего вида к задачам стиховедения рассматривались в работах Григорьева [4, 5 и 6]. Известна также глубокая связь хордовых диаграмм с теорией узлов [7–10].

В настоящей работе представлен специальный рекурсивный подход к перечислению симметричных хордовых диаграмм. Результаты его использования продемонстрированы для случаев $r = 3$, $r = 4$. Случай $r = 6$ отмечен конспективно в силу ограниченности допустимого объема статьи.

1. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под *хордовой диаграммой* понимается ориентированная окружность (петля Вильсона, рассматриваемая с точностью до сохраняющих ее ориентацию диффеоморфизмов) с выделенным на ней множеством r попарно различных точек (хорд, соединяющих точки этих пар). *Порядком* r хордовой диаграммы называется число хорд в ней. Другими словами, хордовая диаграмма порядка r – это ориентированная окружность, в которой проведено r хорд, все концы которых различны.

Хордовые диаграммы рассматриваются как чисто комбинаторный объект: расстояние между концами хорд и форма хорд не имеют никакого значения, важен лишь порядок, в котором пары точек, соединенных хордами, следуют по кругу (принято задавать движение против часовой стрелки). Таким образом,

хордовая диаграмма – это то же самое, что слово в алфавите из r букв $a_1, \dots, a_r$, в котором каждая буква встречается ровно два раза. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв и произвольной перенумерации переменных $a_1, \dots, a_r$.

Хордовые диаграммы можно рассматривать как $[2^r]$ -перестановки степени $n = 2r$ вершин правильного n -угольника. Разложение перестановки на 2-циклы определяет тип перестановки $[2^r]$. Число P_n перестановок типа $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ определяется по формуле

$$P_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{\alpha_k} \alpha_k!}, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n. \quad (1)$$

Для r -хордовых диаграмм соотношение (1) упрощается и приводится к виду

$$P_{2r}(r) = \frac{(2r)!}{2^r} = r!(2r-1)!! . \quad (2)$$

Две хордовые диаграммы эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из них может быть переведена в другую некоторым вращением, т. е. под действием циклической группы $\mathbb{Z}_{2r}$.

Объектом, тесно связанным с хордовыми диаграммами, является ожерелье. Ожерелье – это лексикографически наименьший элемент класса эквивалентности r -арной строки относительно вращения. Поэтому хордовые диаграммы можно рассматривать как r -арные ожерелья (помеченные объекты). Пусть T – множество таких ожерелий, $|T| = P_{2r}(r)$. Под действием циклической группы $\mathbb{Z}_{2r}$ они распределяются по классам эквивалентности, или орбитам. Известная лемма Бернсайда утверждает, что количество $|T/G|$ орбит в множестве T относительно действия группы G выражается как

$$N_{orb} = |T/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|, \quad (3)$$

где $\text{Fix}(g) = \{x \in T : gx = x, g \in G\}$ – фиксатор, т. е. множество элементов $x \in T$, неподвижных относительно действия на них элементов $g \in G$. Отсюда для $[2^r]$ -ожерелий получаем

$$N_{orb}(r) = \frac{(r-1)!}{2} [1 + (2r-1)!!]. \quad (4)$$

Из (4) в дополнение к (2) находим

$$P_{2r}(r) = 2r N_{orb}(r) - r!. \quad (5)$$

Длина орбит в общем случае является разной, но всегда кратной длине ожерелья. Наличие разных по длине орбит зависит от порядка осевой симметрии r -хордовой диаграммы. Орбита называется *короткой*, если ее длина равна r . Такие орбиты возникают в тех случаях, когда принадлежащие им ожерелья являются *периодическими*, т. е. лексикографически их бусины образуют две одинаковые серии. Другими словами, короткие орбиты представлены периодическими словами.

Количество орбит x и y , имеющих длины a , b , кратные n , определяется из системы уравнений:

$$ax + by = P_{2r}(r), \quad x + y = N_{orb}(r). \quad (6)$$

Пусть d – делитель a . Полагая, что $a = 2r$ – длинная орбита, $b = a/d$ – короткая орбита, и используя (5), получаем

$$x = N_{orb}(r) - \frac{d}{2(d-1)}(r-1)!, \quad y = \frac{d}{2(d-1)}(r-1)!$$

– количество длинных и коротких орбит соответственно. Необходимый нам в дальнейшем случай $d = 2$ дает следующий результат:

$$x = \frac{(r-1)!}{2}[(2r-1)!!-1], \quad y = (r-1)!. \quad (7)$$

Количество классов эквивалентности хордовых диаграмм порядка r определяется алгоритмически. Результат, представленный в табл. 1, приводится в [10]. Он учитывает как симметричные, так и несимметричные диаграммы.

Таблица 1

Table 1

Количество классов эквивалентности $N_{class}(r)$ хордовых диаграмм $\sigma(r)$

Full number of equivalence classes $N_{class}(r)$ for chord diagrams $\sigma(r)$

Число классов	Порядок хордовых диаграмм, r								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_{class}(r)$	1	2	5	18	105	902	9749	127 072	1 915 951

Хордовая диаграмма называется d -*диаграммой*, если ее хорды могут быть разбиты на два семейства, в каждом из которых они не пересекаются. Хордовые d -диаграммы кодируют все изотопические классы узлов и зацеплений [16, с. 258].

2. ХОРДОВЫЕ ДИАГРАММЫ $\sigma(3)$

Пусть $r = 3$, T – множество ожерелий длиной $n = 2r = 6$. Они соответствуют разбиению $\lambda \vdash n$ числа $n = 2 + 2 + 2$ на три слагаемых, $\lambda = (2, 2, 2)$. Этому разбиению соответствует перестановка типа $[2^3] = [0, 3, 0]$.

Имеем $P_6(3) = 90$. Согласно (4) все 90 ожерелий распределяются по $N_{orb}(3) = 16$ орбитам. Обозначим цвета бусин буквами a, b, c . Тогда 16 выбранных произвольно представителей данных орбит имеют вид, представленный в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

Представители орбит 3-арных ожерелий
Representatives of the orbits of 3-ary necklaces

№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье
1	$aab\ bcc$	5	$aac\ bcb$	9	$aba\ ccb$	13	$abc\ acb$
2	$aab\ cbc$	6	$aac\ cbb$	10	$abb\ acc$	14	$abc\ bac$
3	$aab\ ccb$	7	$aba\ bcc$	11	$abb\ cac$	15	$aca\ cbb$
4	$aab\ bbc$	8	$aba\ cbc$	12	$abc\ abc$	16	$acb\ acb$

Есть ли в нашем случае короткие орбиты, и если есть, то сколько их? Согласно (7) получаем $x = 14, y = 2$. Обе короткие орбиты, y_1 и y_2 , содержат по три конгруэнтных ожерелья, отличающихся сдвигами:

$$y_1 = abc\ abc, bcabca, cabcab;$$

$$y_2 = acbacb, bacbac, cbacba.$$

Таким образом, общее число ожерелий на всех орбитах равно $14 \times 6 + 2 \times 3 = 90$.

Ожерелье называется *периодическим*, если при некотором вращении, отличном от тривиального, оно совмещается само с собой. В противном случае ожерелье называется *аперiodическим*. Аперiodические ожерелья называются *словами Линдона* [11]. В рассматриваемом случае короткими и, следовательно, соответствующими периодическим ожерельям являются орбиты $y_1 = 12$ и $y_2 = 16$. Слова Линдона представляют 14 длинных орбит. Подсчет числа слов Линдона осуществляется по формуле Моро:

$$M_r(n) = n^{-1} \sum_{d \mid n} \mu(d) r^{n/d}, \quad (8)$$

где $\mu(\cdot)$ – функция Мебиуса, а суммирование ведется по всем делителям числа n . В нашем случае $M_6(3) = 116$.

Периодические ожерелья возникают в результате действия на T группы $\mathbb{Z}_6$. Но аперiodические ожерелья могут обладать *зеркальной*, или *осевой*, симметрией, соответствующей при действии на T группы диэдра D_3 . Слова Линдона в общем случае не являются индикаторами осевой симметрии. В этом можно убедиться, изобразив соответствующие хордовые диаграммы на плоскости (рис. 1). Глубокий смысл слов Линдона раскрывается не столько в задачах перечисления ожерелий, сколько в теории алгебр Ли и т. д. (см. [12]).

Обозначим «цвета» бусин, т.е. перейдем к 3-хордовым диаграммам. Согласно табл. 2 видим, что 16 хордовых диаграмм образуют 5 классов эквивалентности:

$$I = \{1, 6\}, \quad II = \{2, 5, 7, 9, 11, 15\}, \quad III = \{3, 4, 10\}, \quad IV = \{8, 13, 14\}, \quad V = \{12, 16\}.$$

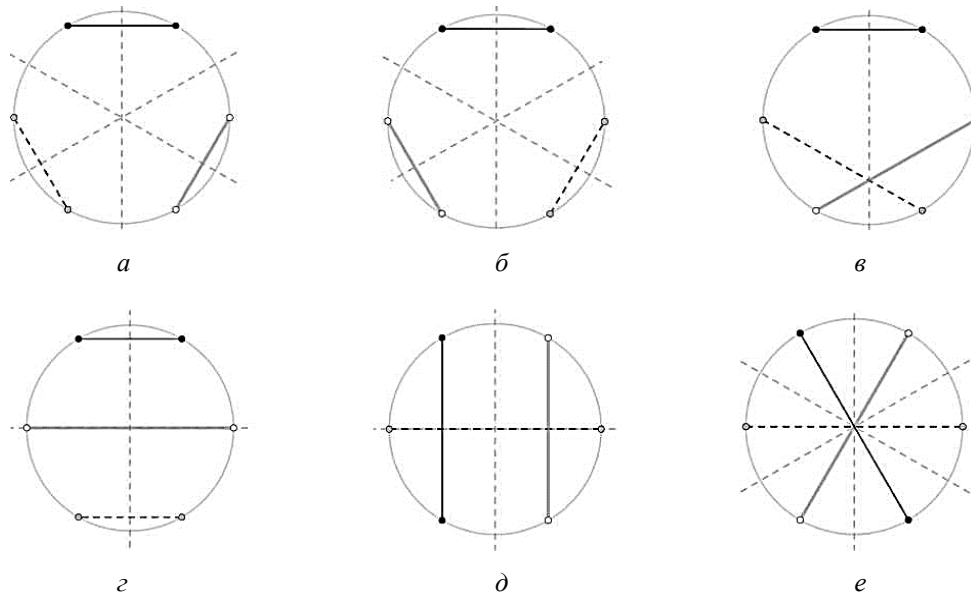


Рис. 1. Классы симметричных хордовых диаграмм $\sigma(3)$:

a – класс I, симметрия $[0, 3]$, $abb\ cca$; $б$ – класс I, симметрия $[0, 3]$, $acc\ bba$;
 $в$ – класс II, симметрия $[0, 1]$, $abc\ bca$; $г$ – класс III, симметрия $[1, 1]$, $abc\ cba$;
 $д$ – класс IV, симметрия $[1, 1]$, $abc\ acb$; e – класс V, симметрия $[0, 6]$, $abc\ abc$

Fig. 1. Classes of symmetrical chord diagrams $\sigma(3)$:

a – class I, symmetry $[0, 3]$, $abb\ cca$; $б$ – class I, symmetry $[0, 3]$, $acc\ bba$;
 $в$ – class II, symmetry $[0, 1]$, $abc\ bca$; $г$ – class III, symmetry $[0, 3]$, $abc\ cba$;
 $д$ – class IV, symmetry $[0, 3]$, $abc\ acb$; e – class V, symmetry $[0, 6]$, $abc\ abc$

Как геометрические объекты, хордовые диаграммы I–V обладают осевой симметрией. В общем случае это не всегда так. Начиная с $r = 4$, существуют и несимметричные хордовые диаграммы.

Хорду диаграммы, которая совпадает с ее осью симметрии и, следовательно, остается неподвижной при ее отражении, будем называть *вертикальной* [13]. *Горизонтальной* будем называть хорду, чьи концы меняются местами при действии такого отражения. Классы эквивалентности диаграмм с горизонтальными хордами назовем *E-диаграммами*, а с вертикальными – *V-диаграммами*. В первом случае ось симметрии диаграммы проходит между начальными и конечными точками хорд, а во втором – одна из хорд обязательно совпадает с осью симметрии. Из этих определений видим, что классы I, II – это *E-диаграммы*, а классы III–V – это *V-диаграммы*. Легко также видеть, что классам I–IV соответствуют *d-диаграммы*.

3. ХОРДОВЫЕ ДИАГРАММЫ $\sigma(4)$

Положим $r = 4$. Количество $P_8(4)$ 4-арных ожерелий, их орбит $N_{orb}(r)$ и классов эквивалентности $N_{class}(r)$, определяемые согласно (2), (4) и табл. 1 соответственно, имеют вид

$$P_8(4) = 2520, N_{orb}(4) = 318, N_{class}(4) = 18.$$

Таблица 3

Table 3

Представители орбит 4-арных ожерелий: 1–16 – симметричные ожерелья, 17, 18 – несимметричные ожерелья

Representatives of the orbits of 4-ary necklaces: 1–16 are symmetric necklaces, 17, 18 are asymmetric necklaces

№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье	№ п/п	Ожерелье
1	<i>aabc ddc b</i>	6	<i>abac bcdd</i>	11	<i>aabc ddbc</i>	16	<i>abcd abcd</i>
2	<i>abcd adcb</i>	7	<i>abcd dabc</i>	12	<i>abca dbcd</i>	17	<i>abcd dbac</i>
3	<i>aabc cddb</i>	8	<i>aabc bcdd</i>	13	<i>abab cdcd</i>	18	<i>abcd dacb</i>
4	<i>abab cddc</i>	9	<i>aacb cddb</i>	14	<i>aabb ccdd</i>		
5	<i>abac bdcd</i>	10	<i>abcd acdb</i>	15	<i>abca dcdb</i>		

Согласно (7) получаем количество длинных и коротких орбит соответственно: $x = 312$, $y = 6$. Шесть коротких орбит имеют вид:

$$y_1 = abcd abcd, bcda bcda, cdab cdab, dcab dcab;$$

$$y_2 = abdc abdc, bdca bdca, dcab dcab, cabd cabd;$$

$$y_3 = acbd acbd, cbda cbda, bdac bdac, dacb dacb;$$

$$y_4 = acdb acdb, cdba cdba, dbac dbac, bacd bacd;$$

$$y_5 = adbc adbc, dbca dbca, bcad bcad, cadb cadb;$$

$$y_6 = adcb adcb, dcba dcba, cbad cbad, badc badc;$$

Таким образом, общее число ожерелий на орбитах равно $312 \times 8 + 6 \times 4 = 2520$.

Перечень самих 18 хордовых диаграмм (рис. 2), две из которых являются несимметричными, в статье [3] не приводится. Из 18 диаграмм только 4 не являются d -диаграммами – это VII, X, XII и XVI. Например, диаграмма XV является d -диаграммой *правого трилистника* [8, с. 259]. Диаграммой *левого трилистника* является V -диаграмма *abcde aedcb*, аналогичная II, но принадлежащая $\sigma(5)$.

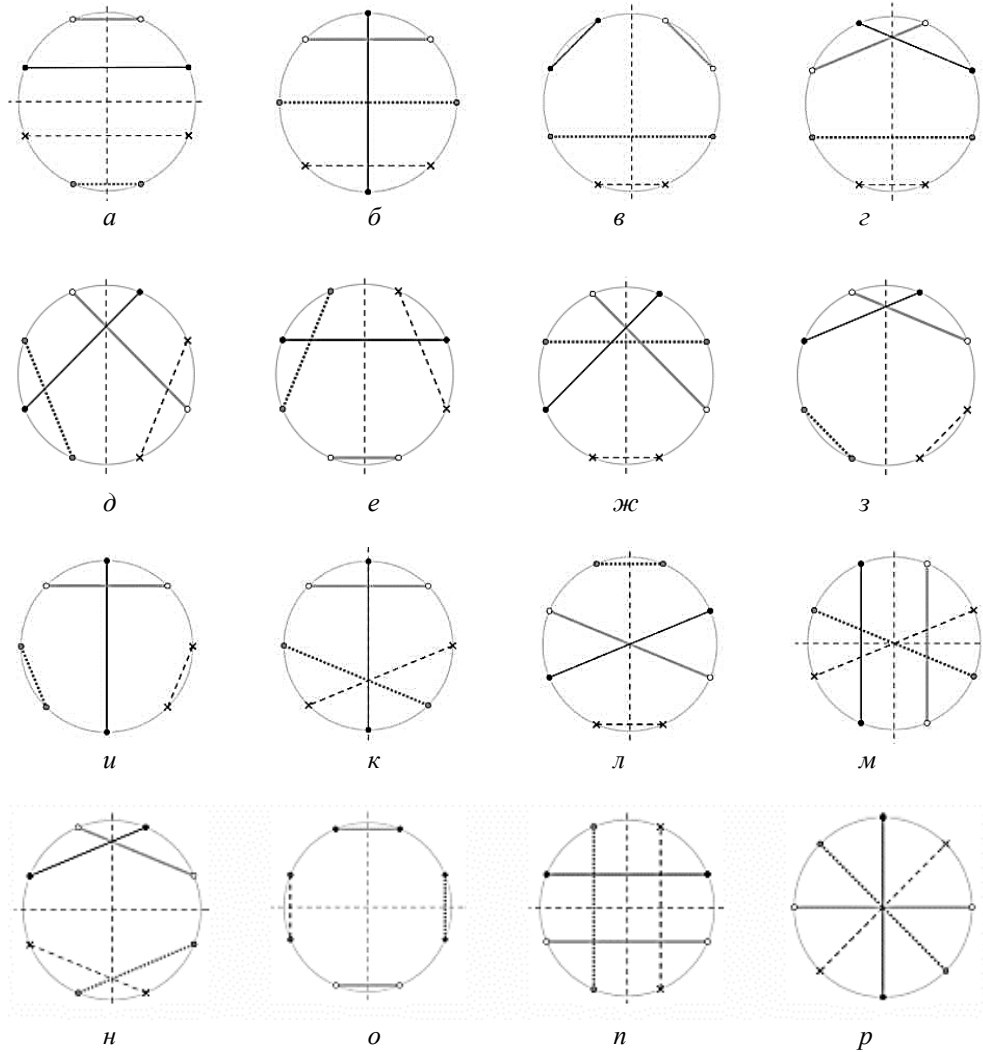


Рис. 2. Классы симметричных хордовых диаграмм $\sigma(4)$:

a – класс I, симметрия $[1, 1]$, $aabc\ ddc b$; $б$ – класс II, симметрия $[1, 1]$, $abcd\ adcb$;
 $в$ – класс III, симметрия $[0, 1]$, $aabc\ cbdd$; $г$ – класс IV, симметрия $[0, 1]$, $abab\ cddc$;
 $д$ – класс V, симметрия $[0, 1]$, $abac\ bdc d$; $е$ – класс VI, симметрия $[0, 1]$, $abac\ cdbd$;
 $ж$ – класс VII, симметрия $[0, 1]$, $abcd\ dabc$; $з$ – класс VIII, симметрия $[0, 1]$, $aabc\ bcdd$;
 $и$ – класс IX, симметрия $[0, 1]$, $aacb\ cddb$; $к$ – класс X, симметрия $[0, 1]$, $abcd\ acdb$;
 $л$ – класс XI, симметрия $[0, 2]$, $aabc\ ddbc$; $м$ – класс XII, симметрия $[0, 2]$, $abca\ dbcd$;
 $н$ – класс XIII, симметрия $[0, 2]$, $abab\ cdcd$; $о$ – класс XIV, симметрия $[0, 4]$, $aabb\ ccdd$;
 $п$ – класс XV, симметрия $[0, 4]$, $abca\ dcdb$; $р$ – класс XVI, симметрия $[0, 8]$, $abcd\ abcd$

Fig. 2. Classes of symmetrical chord diagram $\sigma(4)$:

a – class I, symmetry $[1, 1]$, $aabc\ ddc b$; $б$ – class II, symmetry $[1, 1]$, $abcd\ adcb$;
 $в$ – class III, symmetry $[0, 1]$, $aabc\ cbdd$; $г$ – class IV, symmetry $[0, 1]$, $abab\ cddc$;
 $д$ – class V, symmetry $[0, 1]$, $abac\ bdc d$; $е$ – class VI, symmetry $[0, 1]$, $abac\ cdbd$;
 $ж$ – class VII, symmetry $[0, 1]$, $abcd\ dabc$; $з$ – class VIII, symmetry $[0, 1]$, $aabc\ bcdd$;
 $и$ – class IX, symmetry $[0, 1]$, $aacb\ cddb$; $к$ – class X, symmetry $[0, 1]$, $abcd\ acdb$;
 $л$ – class XI, symmetry $[0, 2]$, $aabc\ ddbc$; $м$ – class XII, symmetry $[0, 2]$, $abca\ dbcd$;
 $н$ – class XIII, symmetry $[0, 2]$, $abab\ cdcd$; $о$ – class XIV, symmetry $[0, 4]$, $aabb\ ccdd$;
 $п$ – class XV, symmetry $[0, 4]$, $abca\ dcdb$; $р$ – class XVI, symmetry $[0, 8]$, $abcd\ abcd$

Пусть $A_n = D_n / G$ – линейное фактор-пространство пространства хордовых диаграмм D_n по модулю G одночленных и четырехчленных соотношений Васильева [10]. Пространство A_4 в силу одночленного соотношения порождается следующими семью нетривиальными хордовыми диаграммами:

$$a = \text{XIII}, b = \text{II}, c = \text{XV}, d = \text{V}, e = \text{X}, f = \text{XII}, g = \text{XVI}.$$

Из четырехчленных соотношений следует, что пространство A_4 трехмерное. Если в качестве базиса выбрать $\{a, d, g\}$, то получаем следующие равенства:

$$b = -a + d, c = 2a - 3d + g, e = -a + 2d, f = -2d + g.$$

4. АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ

Алгоритмы перечисления хордовых диаграмм делятся на универсальные и специализированные. Универсальные алгоритмы предназначены для перечисления ожерелий, порождаемых произвольными разбиениями $\lambda \vdash n$ числа n , а специализированные – только для соответствующих хордовых диаграмм. Скажем, если $n = 8$, то с помощью универсального алгоритма можно перечислить все $(2, 2, 2, 2)$ -ожерелья и, соответственно, все хордовые диаграммы $\sigma(4)$.

С другой стороны, специализированные алгоритмы дают возможность перечислять именно диаграммы, а не ожерелья как слова над произвольным алфавитом. Именно такой алгоритм описан в [3], результат работы которого представлен в табл. 1. Однако этот алгоритм не различает симметричные и несимметричные диаграммы. Скажем, при $r = 4$ мы имеем, соответственно, $16 + 2 = 18$ хордовых диаграмм.

Поскольку в приложениях часто оказываются востребованными именно симметричные диаграммы (например, в стиховедении), интереса заслуживает разновидность алгоритмов перечисления хордовых диаграмм, предоставляющая такую возможность.

Комбинаторные алгоритмы переборного типа имеют, как правило, экспоненциальную сложность, поэтому актуальны так называемые *быстрые* САТ-алгоритмы (см., например, [14, 15]), обладающие линейной сложностью или даже сложностью $O(\sqrt{n})$. Разработка таких алгоритмов в статье не рассматривается.

Способы представления хордовых диаграмм. В работе [3] представлены два специализированных алгоритма перечисления хордовых диаграмм, использующих различные способы представления исходных данных.

Обычное представление диаграмм $\sigma(r)$ заключается в следующем. Каждой хорде присваивается ее уникальный номер от 1 до r . Если выбрать произвольную начальную точку, то, двигаясь по окружности против часовой стрелки (согласно принятому определению диаграммы) и записывая метки начальных и конечных точек, получим строковое представление диаграммы $\sigma(r)$. Таким образом, для представления хордовой диаграммы используется строка длиной $2r$, содержащая ровно по два вхождения меток от 1 до r .

Такие представления эквивалентны при вращении строк, и, следовательно, в каждом классе эквивалентности может быть до $2r(r!)$ строк. Лексикографически наименьшие строки в каждом таком классе эквивалентности известны как *непомеченные ожерелья* (при числе вхождений в строку каждого символа алфавита по два раза). Алгоритм на основе такого представления не является эффективным. Поэтому в [3] был предложен другой подход для представления строк, состоящий в следующем.

Для каждой хорды ее концевая точка помечается меткой, означающей длину инцидентной ей хорды [16]. Длины не зависят от начальных точек, однако существует зависимость между метками начальных и концевых точек, связанных хордой: сумма их значений равняется $2r$. Если мы пойдем по окружности против часовой стрелки, записывая значения концевых точек, то получим новое строковое представление. В этом новом представлении строк уже не будет отношения эквивалентности при перестановке символов алфавита, а число каждого из символов алфавита не будет теперь фиксированным. Оно может возрасти с r до $2r - 1$.

С помощью обычного и нового представлений строк в [3] разработаны два алгоритма перечисления неизоморфных хордовых диаграмм, при этом в обоих случаях для каждого класса эквивалентности назначается свой представитель. Здесь по-прежнему речь идет о классах эквивалентности относительно действия на строки группы вращений, а не группы диэдра (вращений, отражений и их композиций). Опишем два алгоритма, разработанных авторами.

Алгоритм 1. Перечисление диаграмм как ожерелий. На первом шаге формируется $(m \times n)$ -массив U всех возможных ожерелий (m определяется согласно (2), n – длина ожерелья). На втором шаге m исходных ожерелий (элементов массива U) упорядочиваются как r -ичные числа в лексикографическом порядке по убыванию или возрастанию. Результатом является $(m \times n)$ -массив V .

На третьем шаге каждое ожерелье $x \in V$ раскрашиваем $r!$ способами (тождественная раскраска – исходное ожерелье). Упорядочиваем $r!$ экземпляров каждого окрашенного ожерелья в лексикографическом порядке. Среди раскрашенных ожерелий, порождаемых каждым из $r!$ таких ожерелий, удаляем появляющиеся дубликаты. В результате получаем массив уникальных (неизоморфных) ожерелий Q .

На четвертом шаге восстанавливаем номера ожерелий $x \in V$ (или, что эквивалентно, в матрице U). В результате получаем совокупность ожерелий, принадлежащих одному и тому же типу, но в общем случае не исчерпывающим его. Все они будут представлять энантиомерные пары.

На пятом шаге вычеркиваем из массива V строки с номерами ожерелий, принадлежащими множеству Q .

Далее все действия, кроме первого шага, повторяются для всех последующих ожерелий матрицы V , пока вся она не будет исчерпана.

Алгоритм 2. Перечисление симметричных хордовых диаграмм. Пусть OO' – одна из возможных осей симметрии диаграммы. Поскольку $n = 2r$ четно, то возможны два вида симметричных диаграмм: E -диаграмма – ось OO' проходит через середины хорд или между их концевыми точками; V -диаграмма – ось OO' проходит через вертикальную хорду. Последовательно рассмотрим оба варианта диаграмм (табл. 4).

Е-диаграммы. Все линии симметрии (параллельные горизонтальные линии, проходящие через все пары вершин правильного n -угольника) перпендикулярны OO' . Разобьем их на пары. Если $n \equiv 0(\bmod 4)$, то таких пар будет $r/2$, при этом линий симметрий, не имеющих пары, не будет. Например, если $n = 8$, то $r = 4$, и мы имеем две пары линий симметрий (общее число различных комбинаций пар по две равно $C_4^2 = 6$). Если $n \equiv 2(\bmod 4)$, то таких пар будет $(r - 1)/2$, при этом одна линия симметрии окажется свободной, т. е. она пару не образует. Например, если $n = 10$, то $(r - 1)/2 = 2$, и мы имеем две пары линий симметрий и одну параллельную им свободную линию симметрии.

После разбиения линий на пары (всего возможно $C_{[n/2]}^2$ разбиений, которые последовательно перебираются) над линиями симметрии каждой пары осуществляется три возможные операции соединения их хордами – *охват*, *скрещивание* и *склеивание*. Будем обходить концы участвующих в соединении линий по часовой стрелке (можно и в обратном направлении). Тогда вершина 1 цикла обхода, состоящего из четырех вершин, – это левый конец верхней линии. *Охват* – соединяем хордой левые и правые концы выбранных линий симметрии, получаем две хорды (14)(23). *Скрещивание* – получаем хорды (13)(24). *Склеивание* – получаем хорды (12)(34). Эти операции являются аналогами известных в стиховедении охватной, перекрестной и смежной рифм в строфе из четырех стихов. Охватную рифмовку обозначим как 0, перекрестную – 1, смежную – 2. Если имеется одна пара (при $n = 4, 6$), то возможны три варианта соединений линий; если две пары ($n = 8, 10$) – 9 вариантов; если три пары ($n = 12, 14$) – 27 вариантов и т. д.

Таблица 4

Table 4

Полный перечень V - и E -диаграмм $\sigma(4)$, отражающий схемы соединений пар линий симметрии, $(\alpha_i \alpha_j)$, $\alpha_i < \alpha_j$ – пары линий, участвующих в соединениях,

(β) – холостая линия, (0) – вертикальная хорда

A full list of V and E -diagrams for $\sigma(4)$ containing connection plots for pairs of symmetry lines, $(\alpha_i \alpha_j)$, $\alpha_i < \alpha_j$ are pairs of lines for connection, (β) is an idle line, (0) is a vertical chord

V -диаграммы		E -диаграммы					
$(\alpha_1 \alpha_2)(\beta)(0)$		$(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4)$					
(12)(3)(0)		(12)(34)		(13)(24)		(14)(23)	
1	0	1	00	10	00	19	00
2	1	2	01	11	01	20	01
3	2	3	02	12	02	21	02
(13)(2)(0)		4	10	13	10	22	10
4	0	5	11	14	11	23	11
5	1	6	12	15	12	24	12
6	2	7	20	16	20	25	20
		8	21	17	21	26	21
		9	22	18	22	27	22

Зафиксируем схему соединений, определяющую хордовую диаграмму $\sigma(r)$, троичным $[r/2]$ -разрядным числом. Так, для $n = 6, 8, 10, 12, 14$ имеем схемы соединений, перечисленные в табл. 4. Например, для $n = 12, 14$ (три пары линий симметрии) код диаграммы 210 означает, что линиям 1-й пары соответствует склеивание, 2-й пары – скрещивание, а линиям 3-й пары – охват.

В получаемых перечнях хордовых диаграмм такого типа будут встречаться дубликаты, т. е. конгруэнтные диаграммы, которые в окончательном списке симметричных диаграмм должны быть учтены каждая по одному разу.

V-диаграммы. Рассмотрим второй случай: одна из хорд диаграммы $\sigma(r)$ является вертикальной, т. е. совпадает с диаметром окружности, проходя через вершины правильного n -угольника, а все остальные линии симметрии (их теперь $r - 1$) перпендикулярны ей. Кодировка V -ожерелий в троичной системе описывается $[(r-1)/2]$ -разрядными числами. Это означает, что если для E -симметрий рассматриваются r -рифмовки, то для V -симметрий при том же значении r используются рифмовки E -симметрий диаграмм $\sigma(r-1)$. Таким образом, алгоритм перечисления симметричных хордовых диаграмм имеет рекурсивный характер: V -диаграммы для последующего значения r заимствуются из предшествующего столбца табл. 4.

Среди V -диаграмм, так же как и в случае E -ожерелий, встречаются конгруэнтные. Более того, $E \cap V \neq \emptyset$, т. е. пересечение множеств E - и V -диаграмм непустое. Учитывая это и объединяя оба перечня диаграмм $\sigma(r)$ в один, получаем искомый перечень симметричных хордовых диаграмм для каждого r .

Сформированный перечень симметричных хордовых диаграмм является полным, т. е. включает все существующие симметричные диаграммы. В силу наличия среди них конгруэнтных диаграмм перечень требует факторизации – построения фактор-множеств $E/\cong$ и $V/\cong$, или сечений [16], по отношению конгруэнтности $\cong$. Получение фактор-множеств – это заключительный и наиболее трудно реализуемый шаг алгоритма. Результаты вычислений для $\sigma(4)$ представлены в табл. 5.

Таблица 5

Table 5

**Симметричные хордовые диаграммы $\sigma(4)$ (классы эквивалентности C)
как элементы фактор-множеств $E/\cong$ и $V/\cong$**

**Symmetric chord diagrams $\sigma(4)$ (equivalence classes C)
as elements of factor-sets $E/\cong$ and $V/\cong$**

№ п/п	Соединение	Класс	Симметрия	$ C $	Сечение $E/\cong$	Диа- грамма
I	(12)(34)					
1	00	XIV	$[0, 4]$	6	1–25	<i>aabb ccdd</i>
2	01	VII	$[0, 1]$	24	204	<i>aabc bcdd</i>
3	02	III	$[0, 1]$	24	3–7	<i>aabc cbdd</i>
4	11	XIII	$[0, 2]$	12	5–10	<i>abab cdcd</i>
5	12	IV	$[0, 1]$	24	6–8	<i>abab cddc</i>
6	22	I	$[0, 1]$	12	9–18–19–27	<i>aabc ddc b</i>

Окончание табл. 5

End of the Tab. 5

№ п/п	Соединение	Класс	Симметрия	C	Сечение $E/\cong$	Диа- грамма
II	(13)(24)					
7	01	V	[0, 1]	24	11–13	<i>abac bdc d</i>
8	02	VI	[0, 1]	24	12–16	<i>abac cdb d</i>
9	11	XV	[0, 4]	6	14–21	<i>abca dcb d</i>
10	12	VII	[0, 1]	24	15–17	<i>abcd dab c</i>
III	(14)(23)					
11	01	XII	[0, 2]	24	20–24	<i>abca dbcd</i>
12	10	XI	[0, 2]	24	22–26	<i>aabc ddb c</i>
13	11	XVI	[0, 8]	12	23	<i>abcd abcd</i>
	(12)(3)(0)				Сечение $V/\cong$	
14	1	IX	[0, 1]		1	<i>aacb cddb</i>
15	2	X	[0, 1]		2	<i>abcd acdb</i>
16	3	II	[1, 1]		3–4–6	<i>abcd adcb</i>

Таким образом, полный перечень из 27 E -диаграмм порождает 13 элементов фактор-множества $E/\cong$, а перечень из шести V -диаграмм, порождаемый E -диаграммами $\sigma(3)$, дает три элемента фактор-множества $V/\cong$, что в совокупности дает 16 симметричных хордовых диаграмм $\sigma(4)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен алгоритмический подход к проблеме перечисления симметричных хордовых диаграмм. Существующие алгоритмы ориентированы на перечисление всех плоских диаграмм с учетом лишь их симметрии вращения. Основная трудность здесь заключается в том, что с увеличением порядка диаграмм возрастающая сложность быстро исчерпывает возможности этих алгоритмов. В статье дан обзор результатов в области преодоления этих проблем (разработка быстрых или близких к ним алгоритмов). Разработан алгоритм перечисления симметричных диаграмм, учитывающих как осевую симметрию, так и симметрию вращения.

Рассмотрены хордовые диаграммы 3-го и 4-го порядка. Введено понятие E - и V -диаграмм. Для $r = 4$ имеем $|E| = 13$ и $|V| = 3$ соответственно. Для случая $\sigma(6)$, который в статье не рассматривается, результат перечисления с помощью разработанных алгоритмов приводит к $|E| = 168$ и $|V| = 39$. Считая отношения $b_1 = \frac{3}{13}$, $b_2 = \frac{39}{168} = \frac{13}{56}$ частными случаями отношений $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, приходим к последовательности

$$\{a_n\} = \{3; 13; 56; 241; 1037; 4462; 19199; 82609; 355448; \dots\},$$

которая приводит к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = [V/E] = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \simeq 0.232408... \quad (9)$$

В связи с этим можно высказать следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n = 2r$. Тогда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / a_{n+1}$ отношения числа $V(r)$ -диаграмм к числу $E(r)$ -диаграмм удовлетворяет условию (9). В этом смысле величина $[V/E]$ – инвариант Фибоначчи, характеризующий соотношение двух видов симметричных хордовых диаграмм.

Если говорить о полных инвариантах хордовых диаграмм, то этот вопрос на сегодня открыт. Например, не являются полными и связанные с хордовыми диаграммами инварианты Васильева – Гусарова [7]. Однако неполных инвариантов в теории хордовых диаграмм и теории узлов известно много (см., например, [18]). Отыскание новых инвариантов могло бы существенно продвинуть задачу алгоритмического перечисления хордовых диаграмм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fast algorithms to generate necklaces, unlabeled necklaces, and irreducible polynomials over $\text{GF}(2)$ / K. Cattell, F. Ruskey, J. Sawada, C.M. Serra, R. Miers // *Journal of Algorithms*. – 2000. – Vol. 37 (2). – P. 267–282.
2. Sawada J. Generating bracelets in constant amortized time // Manuscript, 1999.
3. Sawada J. A fast algorithm for generating nonisomorphic chord diagrams // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. – 2002. – Vol. 15 (4). – P. 546–561.
4. Григорьев Ю.Д. Восьмистишие как симметричные ожерелья: перечисление и свойства // *Квантитативная филология*. – 2022. №1 (3). – С. 16–31. <http://qpcenter.org/upload/uf/dc2/r0q9y9mndceowq3wpc9gtv7rtk0psbkn.pdf>
5. Григорьев Ю.Д. Перечисление симметричных ожерелий // *Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2022. – Т. 61. – С. 97–107. – DOI: 10.17223/19988605/61/10.
6. Григорьев Ю.Д. Разработка архитектурного решения программного обеспечения для устройств интернет-вещей // *Системы анализа и обработки данных*. – 2023. – № 3 (91). – С. 19–36. – DOI: 10.1721212182-2001-2023-3-19-36.
7. Дужин С.В. Инварианты Васильева – Гусарова // *Математика XX века. Взгляд из Петербурга* / под ред. А.М. Вершика. – М.: МЦНМО, 2010. – С. 87–116.
8. Мантуров В.О. Теория узлов. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005. – 312 с.
9. Алёнов С.В. Диаграммно-стрелочные формулы для инвариантов узлов четвертого порядка // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2005. – Т. 11, № 5. – С. 3–17.
10. Алёнов С.В., Лексин В.П. О диаграммных формулах инвариантов узлов // *Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств*. – М.: Наука, 2006. – С. 10–17. – (Труды МИАН; вып. 252).
11. Lyndon R.C. On burnside's problem // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1954. – Vol. 77 (2). – P. 202–215.
12. Jacobson N. Lie algebras. – New York; London: Interscience Publishers, 1961. – 331 p.
13. Краско Е.С. Перечисление непомеченных хордовых диаграмм максимального рода // *Записки научных семинаров ПОМИ*. – 2017. – Т. 464: Комбинаторика и теория графов. IX. – С. 77–87.
14. Proskurowski A., Ruskey F., Smith M. Analysis of algorithms for listing equivalence classes of k -ary strings induced by simple group actions // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. – 1998. – Vol. 11 (1). – P. 94–109. – DOI: 10.1137/S0895480192234009.
15. Ruskey F., Sawada J. An efficient algorithm for generating necklaces with fixed density // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. – 1999. – Vol. 29 (2). – P. 671–684. – DOI: 10.1137/S0097539798344112.
16. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
17. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. – М.: Мир, 1966. – 272 с.
18. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. – М.: МНЦМО, 1997. – 352 с.

Григорьев Юрий Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ Санкт-Петербургского государственного технического университета (ЛЭТИ), специалист в области теории планирования эксперимента, теории риска и квантитативной филологии. Имеет более 160 публикаций, в том числе 4 монографии. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

Щеколдин Владислав Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры маркетинга и сервиса Новосибирского государственного технического университета (НГТУ-НЭТИ), специалист в области экономико-математического моделирования, планирования оптимальных экспериментов и моделирования логистических систем. Имеет более 100 публикаций, в том числе одну монографию. E-mail: raix@mail.ru

Grigoriev Yu. D., D.Sc. (Eng), professor at the department of Computer Science, St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), an expert in the field of experimental design theory, risk theory, and quantitative philology. He has more 160 publications including four monographs. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

Shchekoldin V. Yu., Ph.D. (Eng), associate professor at the Marketing and Service Department, Novosibirsk State Technical University (NSTU-NETI), an expert in the field of economic and mathematical modeling, experimental design, and logistic systems modeling. He has more than 100 publications including one monograph. E-mail: raix@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36

*Algorithms for enumerating symmetric chord diagrams**

Yu.D GRIGORIEV^{1,a}, V.Yu. SHCHEKOLDIN^{2,b}

¹ St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), 5, Prof. Popova Street, St. Petersburg, 197376, Russian Federation

² Novosibirsk State Technical University (NSTU-NETI), 20, K. Marx Prospekt., Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a yuri_grigoriev@mail.ru ^b raix@mail.ru

Abstract

Numerous applications require exhaustive lists of strings, which may be subject to various requirements, for example, such as their non-equivalence under the action of symmetry groups on them. The necklace is the equivalence class of r -ary strings under rotation. An unlabeled r -ary necklace is an equivalence class of r -ary strings under rotation and permutation of alphabetic characters.

Let G be a symmetry group acting on a given set of necklaces T . A necklace $x \in T$ is called symmetric if there exists an element $g \in G$, $g \neq e$ such that $gx = x$. Other definitions of the symmetry of necklaces are possible, equivalent to the above. All of them, in one way or another, are involved in determining the symmetry of the figure compared to the unlabelled necklace. A flat figure is called symmetrical if it is self-aligned during movements of space R^2 , i.e. during its isometric transformations.

A special case of figures and, accordingly, necklaces are chord diagrams. Chord diagrams represent an object of research that is interesting from different aspects (knot theory, Feynman diagrams, representations of Lie algebras), and has been studied by many authors. The article presents algorithms for enumerating symmetric chord diagrams and shows their connection with the knot theory using simple examples. The list of symmetrical chord diagrams may, in particular, be of interest in the field of mathematical poetry, which studies the dynamics of poetic stanzas horizontally (rhythm, syllabic volume of verses) and vertically (rhyme schemes, refrains, and other stylistic devices).

Keywords: chord diagrams, necklace, enumeration of diagrams, orbit, equivalence classes, Burnside's lemma, Lyndon's words

* Received 27 February 2024.

REFERENCES

1. Cattell K., Ruskey F., Sawada J., Serra C.M., Miers R. Fast algorithms to generate necklaces, unlabeled necklaces, and irreducible polynomials over GF(2). *Journal of Algorithms*, 2000, vol. 37 (2), pp. 267–282.
2. Sawada J. Generating bracelets in constant amortized time. *Manuscript*, 1999.
3. Sawada J. A fast algorithm for generating nonisomorphic chord diagrams. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2002, vol. 15 (4), pp. 546–561.
4. Grigoriev Yu. D. Vos'mistishiya kak simmetrichnye ozherel'ya: perechislenie i svoystva [Och-tahets as symmetrical neclaches: enumeration and properties] // Quantitative Philology 2022. No. 1(3), pp.16–31.
5. Grigoriev Yu.D. Perechislenie simmetrichnykh ozherelii [Enumeration of symmetrical neck-laces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i in-formatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2022, vol. 61, pp. 97–107. DOI: 10.17223/19988605/61/10.
6. Grigoriev Yu.D. Zadacha o besporyadkakh [Disorders Problem]. *Sistemy analiza i obrabotki dannyykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 3 (91), pp. 19–36. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-3-19-36.
7. Duzhin S.V. Invarianty Vasil'eva – Gusarova [Vasiliev-Gusarov invariants]. *Matematika XX veka. Vzglyad iz Peterburga* [Mathematics of the 20th century. A view from St. Petersburg]. Mos-cow, Moscow Center for Continuing Mathematical Education Publ., 2010, pp. 86–116.
8. Manturov V.O. *Teoriya uzlov* [Knot theory]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research Publ., 2005. 312 p.
9. Alenov S.V. Diagrammno-strelochnye formuly dlya invariantov uzlov chetvertogo poryadka [Arrow-diagram formulas for fourth-order invariants of knots]. *Fundamental'naya i prikladnaya ma-tematika*, 2005, vol. 11, no. 5, pp. 3–17. (In Russian).
10. Alenov S.V., Leksin V.P. O diagrammnykh formulakh invariantov uzlov [On diagram for-mulas for knot invariants]. *Geometricheskaya topologiya, diskretnaya geometriya i teoriya mnozhestv* [Geometrical topology, diskret geometry, and set theory]. Moscow, Nauka Publ., 2006, pp. 10–17.
11. Lyndon R.C. On burnside's problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1954, vol. 77 (2), pp. 202–215.
12. Jacobson N. *Lie algebras*. New York, London, Interscience Publishers, 1961. 331 p.
13. Krasko E.S. Counting unlabelled chord diagrams of maximal genus. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2019, vol. 236 (5), pp. 521–526. DOI: 10.1007/s10958-018-4129-x. Translated from *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 2017, vol. 464, pp. 77–87.
14. Proskurowski A., Ruskey F., Smith M. Analysis of algorithms for listing equivalence classes of k-ary strings induced by simple group actions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1998, vol. 11 (1), pp. 94–109. DOI: 10.1137/S0895480192234009.
15. Ruskey F., Sawada J. An efficient algorithm for generating necklaces with fixed density. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1999, vol. 29 (2), pp. 671–684. DOI: 10.1137/S0097539798344112.
16. Ore Ø. *Theory of Graphs*. Providence, American Mathematical Society, 1962 (Russ. ed.: Ore O. *Teoriya grafov*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 352 p.).
17. Faure R., Kaufmann A., Denis-Papin M. *Mathmatiques nouvelles*. T. 1. Paris, Dunod, 1964. 439 p (Russ. ed.: For R., Kofman A., Deni-Papen M. *Sovremennaya matematika*. Moscow, Mir Publ., 1966. 272 p.).
18. Prasolov V.V., Sosinsky A.B. *Uzly, zatsepleniya, kosal trekhmernye mnogoobraziya* [Knots, links, braids and three-dimensional manifolds]. Moscow. Moscow Center for Continuing Mathematical Education Publ., 1997. 352 p.

Для цитирования:

Григорьев Ю.Д., Щеколдин В.Ю. Алгоритмы перечисления симметричных хордовых диа-грамм // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 2 (94). – С. 21–36. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36.

For citation:

Grigoriev Yu.D., Shchekoldin V.Yu. Algoritmy perechisleniya simmetrichnykh khordovykh dia-gramm [Algorithms for enumerating symmetric chord diagrams]. *Sistemy analiza i obrabotki dannyykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 2 (94), pp. 21–36. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36.