

УДК 519.6

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34

Быстрый алгоритм вычисления матрично-векторных произведений в задаче разложения функций в ряды Фурье на круге^{*}

Н.А. ЗЕЛЕНЧУК^а, А.В. ТЕРЕХОВ^б

630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

^а n.zelenchuk@corp.nstu.ru ^б a.terexov@corp.nstu.ru

Значительный интерес состоит в разработке и исследовании возможностей применения быстрых алгоритмов для вычисления матрично-векторных произведений в контексте преобразования на круге, что позволит существенно улучшить эффективность вычисления моментов Цернике. В статье рассмотрен эффективный способ сжатия матриц преобразования для функций Цернике на основе алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ) и метода экстракомпонент. Высокая производительность алгоритма достигается за счет перехода от исходной матрицы к матрице с разреженным портретом посредством специальной процедуры, реализованной на основе дискретного преобразования Фурье. Предполагается, что сжатие матрицы выполняется однократно на подготовительном этапе, тогда как количество преобразуемых векторов таково, что вычислительными затратами подготовительного этапа можно пренебречь. Такой подход сокращает время счета матрично-векторного произведения на вычислительном этапе вследствие исключения близких по модулю к нулю элементов сжатой матрицы. Разработанный алгоритм позволяет экономично умножать исходную матрицу преобразования на вектор с использованием БДПФ, что снижает оценку вычислительной трудоемкости метода в целом.

Подготовительный этап потребует выполнения порядка $O(N^2 \log N)$ операций, в то время как на вычислительном этапе необходимо выполнить $O(N \log N)$ арифметических действий, что значительно меньше оценки $O(N^2)$ для прямого способа расчета матрично-векторного произведения. Результаты вычислительных экспериментов показали устойчивость, корректность и быстроедействие процедур, что позволяет сократить время вычислений на несколько порядков по сравнению с прямым умножением матрицы преобразования на вектор для решения задачи разложения функций в ряды по базису Цернике.

Ключевые слова: интегральные преобразования, дискретные преобразования, матрицы преобразования, быстрые алгоритмы, сжатие матрицы, ортогональные многочлены, ряды Фурье, многочлены Цернике

^{*} Статья получена 28 февраля 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Дискретное преобразование Фурье является одним из основных методов численного анализа, поскольку существует быстрый алгоритм, позволяющий значительно сократить вычислительные затраты с $O(N^4)$ до $O(N^2 \log N)$ в двумерном случае в задачах расчета матрично-векторного произведения вида

$$y = \mathcal{F}x, \quad \mathcal{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad y, x \in \mathbb{C}^N,$$

где \mathcal{F} – эрмитова матрица преобразования Фурье [1]. Несмотря на экономичность алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), представляет интерес разработка быстрых методов для разложения функции в ряд по ортогональным многочленам, в том числе по многочленам Цернике.

В настоящее время функции Цернике широко применяются в различных научно-технических областях, включая прямые и обратные задачи оптики, аэрокосмическую инженерию, аэродинамику и анализ изображений [2, 3, 5–7]. Следовательно, для решения этих задач методами математического моделирования и численного анализа актуальной является разработка быстрого метода разложения функции в ряд по многочленам Цернике.

Вычисление моментов Цернике является вычислительно затратным процессом, например, по сравнению с разложением функции в ряд по многочленам Чебышева. Это обусловлено необходимостью многократного вычисления факториалов высоких порядков при определении радиальной составляющей многочленов. Также следует учитывать, что использование трехчленных рекуррентных соотношений, как правило, приводит к неустойчивости расчетов. В процессе нахождения значений многочленов Цернике требуются многократные вычисления тригонометрических функций и произведения векторов на плотные матрицы преобразования, что приводит к снижению производительности как прямого, так и обратного преобразований. Задачи реализации таких преобразований по вычислительной сложности эквивалентны в оценке числа арифметических операций и имеют вид $O(N^4 M^2)$. С целью решения этих проблем было предложено множество алгоритмов быстрого вычисления моментов Цернике [8–12]. Все существующие к данному моменту алгоритмы быстрого преобразования Цернике имеют существенно большую вычислительную сложность в сравнении с преобразованием Фурье [1]. Рассматриваемая задача становится критичной в областях, где требуются высокая точность и производительность алгоритмов, например обработка изображений для распознавания образов. Значительный интерес состоит в разработке и исследовании возможности применения быстрых алгоритмов для вычисления специальных матрично-векторных произведений в контексте преобразования Цернике, что позволит существенно улучшить эффективность вычисления коэффициентов разложения Цернике. Недавно разработанный метод экстракомпонент для быстрого вычисления матрично-векторных произведений специального вида [4] обладает высокой производительностью и общностью, что позволяет успешно применить его к решению поставленной задачи.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЦЕРНИКЕ

Рассмотрим прямую и обратную задачи разложения функции в ряд по многочленам Цернике, которые могут быть сформулированы в следующем виде:

$$F(\rho, \varphi) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N \left[A_n^m \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) + B_n^m \check{U}_n^m(\rho, \varphi) \right],$$

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho, \\ B_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \check{U}_n^m(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $F(\rho, \varphi)$ – функция, заданная на единичной окружности $(\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi)$; ϵ_m – нормирующий множитель ($\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ в противном случае); A_n^m и B_n^m – коэффициенты разложения, $\widehat{U}_n^m(\rho, \varphi)$ – базисные функции Цернике:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}, \\ \check{U}_n^m(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}, \\ R_n^m(\rho) &= \sum_{l=0}^{(n-m)/2} (-1)^l \frac{(n-l)!}{l! \left(\frac{n+m-l}{2}\right)! \left(\frac{n-m-l}{2}\right)!} \rho^{n-2l}, \end{aligned}$$

где $R_n^m(\rho)$ – радиальные многочлены Цернике.

Расчет значений интеграла (1) производится в два этапа

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \widehat{G}(\rho) R_n^m(\rho) \rho d\rho, \\ B_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \check{G}(\rho) R_n^m(\rho) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\rho) &= \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} d\varphi, \\ \check{G}(\rho) &= \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь наиболее вычислительно затратной операцией является расчет интеграла (2), тогда как значения функций (3) могут быть приближенно определены посредством БПФ алгоритма. С ростом значений n и m число нулей как для функций $R_n^m(\rho)$, так и для функций $e^{im\varphi}$ возрастает. Однако нули функций $R_n^m(\rho)$ расположены на интервале $(0, 1)$ с неравномерным шагом таким, что минимальное расстояние между любыми соседними нулями уменьшается с ростом n . Расчет интегралов от быстро осциллирующих функций

методом Ньютона–Котеса требует высоких вычислительных затрат [13]. Выбор метода Гаусса для интегрирования с неравномерным расположением узлов и весов является наиболее подходящим для данного случая, при этом квадратурная формула представляется в виде

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) \rho d\rho \approx \sum_{k=0}^K \omega_k R_n^m(\rho_k), \quad (4)$$

где $K = (n - m) / 2$ – фиксированное количество узлов ρ_k ($k = 0, 1, \dots, K$) и весов ω_k . С целью обеспечения ортогональности матриц преобразования необходимо удвоить количество узлов сетки. При численном интегрировании быстроосциллирующих функций требуется достичь высокой точности вычислений для сохранения ортогональности функций в их скалярном произведении [15]. Для базисных функций $R_n^m(\rho)$ это означает, что интеграл их произведения должен удовлетворять следующему условию ортогональности:

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho) \omega(\rho) d\rho = \frac{\delta_{nn'}}{2(n+1)},$$

где $\delta_{nn'}$ – символ Кронекера. Недостаточная точность расчета интегралов (4) может привести к потере ортогональности и, как следствие, эрмитовости матриц. В результате становится невозможным устойчивое обращение преобразования Цернике.

2. АЛГОРИТМ СЖАТИЯ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЦЕРНИКЕ МЕТОДОМ ЭКСТРАКОМПОНЕНТ

Рассмотрим реализацию метода экстракомпонент [4] при построения быстрого алгоритма для преобразования Цернике. Считая, что значения функции $G(\rho)$ заранее вычислены, исследуем проблему вычисления сумм:

$$\begin{matrix} A_n^m \\ B_n^m \end{matrix} \approx \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \sum_{k=0}^K \omega_k \begin{matrix} \widehat{G}(\rho_k) \\ \check{G}(\rho_k) \end{matrix} R_n^m(\rho_k),$$

которые запишем в виде матрично-векторного произведения $F = V\tilde{F}$, где

$$V := \left(R_n^m(\rho_k) \right)_{k,n=0}^{K,N} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (N+1)}, \quad (5)$$

$$F = \begin{pmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{pmatrix}_{n=0}^N, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} \widehat{G}(\rho_k) \\ \check{G}(\rho_k) \end{pmatrix}_{k=0}^K.$$

Первую строку матрицы V для $m = 0$ определим как

$$V_{1\bullet} = [1, R_2^0(\rho_0), R_4^0(\rho_0), \dots, R_N^0(\rho_0)], \quad (6)$$

где ρ_k – это нули многочлена $R_{2N}^0(\rho)$. Элементы вектора $V_{1\bullet}$ приведены на рис. 1, *а*; модули соответствующих фурье-компонент $\mathcal{F}V_{1\bullet}^T$ представлены на рис. 1, *б*.

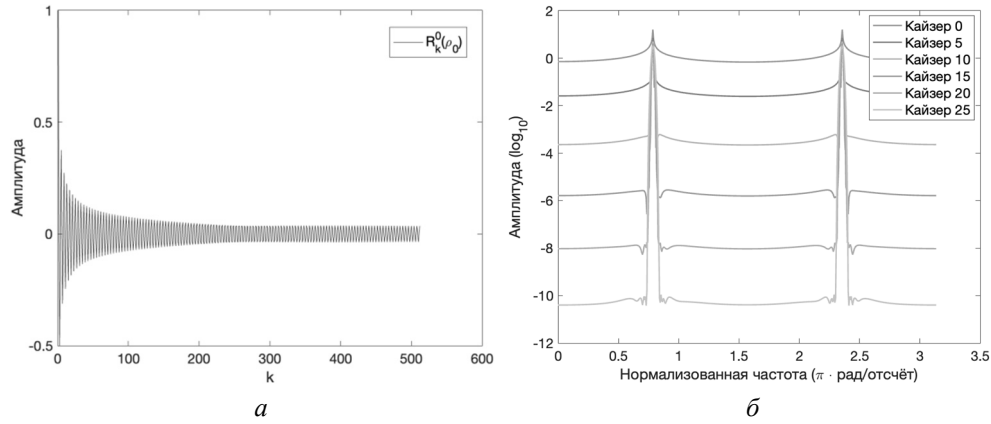


Рис. 1. График элементов строки $V_{1\bullet}$, где значения многочленов в точке $\rho_0 = 0,706$ соединены линиями (*а*); абсолютные значения коэффициентов соответствующего ряда Фурье для различных весовых функций (*б*)

Fig. 1. Plot of row elements $V_{1\bullet}$, where individual values of the polynomial at the point $\rho_0 = 0,706$ are connected by lines (*a*); absolute values of the coefficients of the corresponding Fourier series for different weight functions (*b*)

В окрестности $k = 0$ наблюдается осциляция функции $R_k^0(\rho_0)$ (рис. 1, *а*). Из-за невыполнения условия периодичности границ в точке ρ_0 спектр функции будет неограниченным, т.е. возникает явление Гиббса (рис. 1, *б* (Кайзер 0)). Устранение (или ослабление) явления Гиббса достигается применением оконных функций к спектру исходного сигнала [14]. Для этого может быть использована оконная функция Кайзера

$$\omega_n^{\zeta, N} = \frac{I_0 \left[\zeta \sqrt{1 - \left(\frac{2n-1}{N} \right)^2} \right]}{I_0(\zeta)}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\zeta \geq 0$ – коэффициент, определяющий долю энергии, сосредоточенной в главном лепестке спектра оконной функции.

Рассмотрим для строки (6) преобразование $\ddot{V}_{1\bullet} = \mathcal{F}W_N V_{1\bullet}^T$, где диагональная матрица W_N задана как

$$W_N = \text{diag}\{\omega_0^{\zeta,N}, \omega_1^{\zeta,N}, \dots, \omega_N^{\zeta,N}\} \in \mathbb{R}^{N+1, N+1}.$$

Абсолютные значения для компонент спектра в логарифмическом масштабе представлены на рис. 1, б, откуда видно, что с ростом параметра ζ спектр для (6) локализован в области главного лепестка и для некоторого $\varepsilon > 0$ элементы матрицы, удовлетворяющие условию $|\tilde{v}_{1j}| < \varepsilon \max_j |\tilde{v}_{1j}|$, можно полагать равными нулю [4]. Поступая аналогичным образом для всех строк матрицы V , получаем итоговую сжатую матрицу преобразования

$$\ddot{V} = V W_N \mathcal{F}^*,$$

для которой большинство элементов могут быть исключены из расчета в силу их относительной малости.

Принимая во внимание свойство эрмитовости $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = E$, где E – единичная матрица, запишем произведение $F = V\tilde{F}$ как

$$F = V \underbrace{W_N \mathcal{F}^* \mathcal{F} W_N^{-1}}_E \tilde{F} = \ddot{V} \mathcal{F} W_N^{-1} \tilde{F}, \quad (7)$$

а произведение $\tilde{F} = V^T F$ как

$$\tilde{F} = \underbrace{W_K^{-1} \mathcal{F}^* \mathcal{F} W_K}_E V^T F = W_K^{-1} \mathcal{F} \ddot{V}^T F. \quad (8)$$

Таким образом, предварительно вычислив матрицы \ddot{V} и \ddot{V}^T , обладающие компактным портретом, можно экономично рассчитать искомые матрично-векторные произведения. Одно фурье-преобразование и одно умножение на сжатую матрицу \ddot{V} или \ddot{V}^T потребуется выполнить для каждого умножаемого вектора. Умножение на матрицу W_N незначительно увеличивает общий объем вычислений.

Элементы матрицы W_N^{-1} могут принимать большие значения, поэтому произведения с этой матрицей будут увеличивать вычислительные погрешности, возникающие при реализации формул (7) и (8) вследствие исключения относительно малых элементов матриц \ddot{V} и \ddot{V}^T . Необходимо модифицировать расчетные формулы с целью ограничения роста погрешностей. В методе экстракомпонент предлагается определять расширенную матрицу V_e , полученную из матрицы V путем добавления новых столбцов [4]. Добавить слева экстрастолбцы для расширенной матрицы V_e не представляется возможным, поскольку порядок n не может принимать отрицательные значения, поэтому

добавляются экстрастолбцы справа. Предполагается, что первые s столбцов матрицы V являются экстрастолбцами матрицы V_e . Следовательно,

$$F = V_e \tilde{F}_e = \left(R_n^m(\rho_k) \right)_{k,n=0}^{K,N+s} \tilde{F}_e,$$

где

$$\tilde{F}_e = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{экстра}}, \underbrace{\tilde{f}_{s+1}, \tilde{f}_{s+2}, \dots, \tilde{f}_N}_{\tilde{F}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{экстра}} \right)^T,$$

а $s \geq 0$ – параметр, задающий число добавленных справа столбцов. Результат вычисления $V_e \tilde{F}_e$ не будет содержать слагаемых, соответствующих произведению первых s компонент вектора \tilde{F} и первых столбцов матрицы V . Эти слагаемые вычисляются на следующих шагах метода экстракомпонент, для чего формируется подматрица, состоящая из первых s столбцов матрицы V . Далее процесс умножения повторяется аналогичным образом (рис. 2). На заключительном шаге умножение матрицы на вектор экономичнее выполнять посредством прямого метода, так как порядок матрицы на последнем шаге будет незначителен.

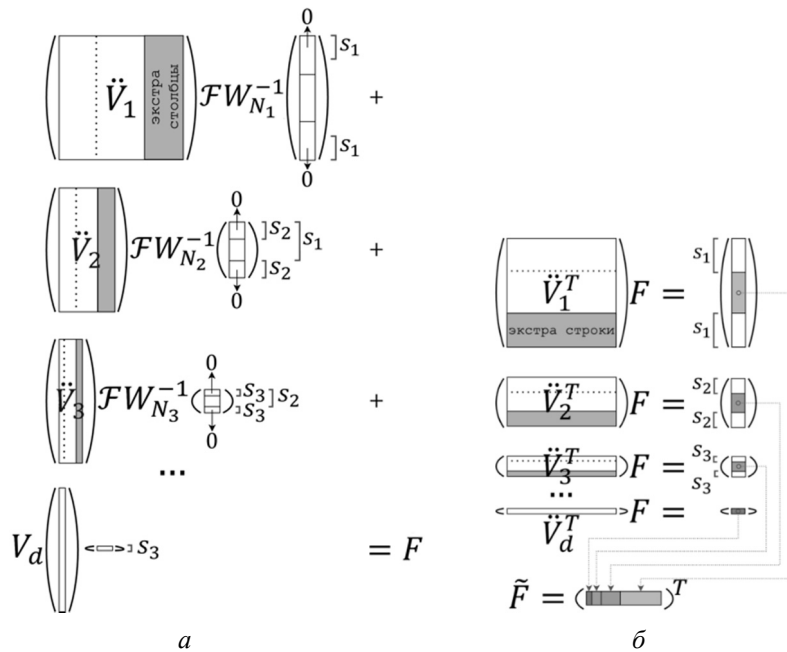


Рис. 2. Многошаговый вариант метода экстракомпонент для расчета произведения:

a) $F = V\tilde{F}$; б) $\tilde{F} = V^T F$

Fig. 2. Multi-step variant of the extra-component method for computing the product

a) $F = V\tilde{F}$; b) $\tilde{F} = V^T F$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим вопрос оценки эффективности предлагаемых алгоритмов для умножения вектора на матрицу вида (5) при вычислении значений ряда Цернике в точках $\rho_k \in (0, 1)$. Размерность матрицы преобразования (рис. 3, а) $2N \times N$, а коэффициенты разложения рассчитываются в нулях многочлена $R_{4N}^0(\rho)$.

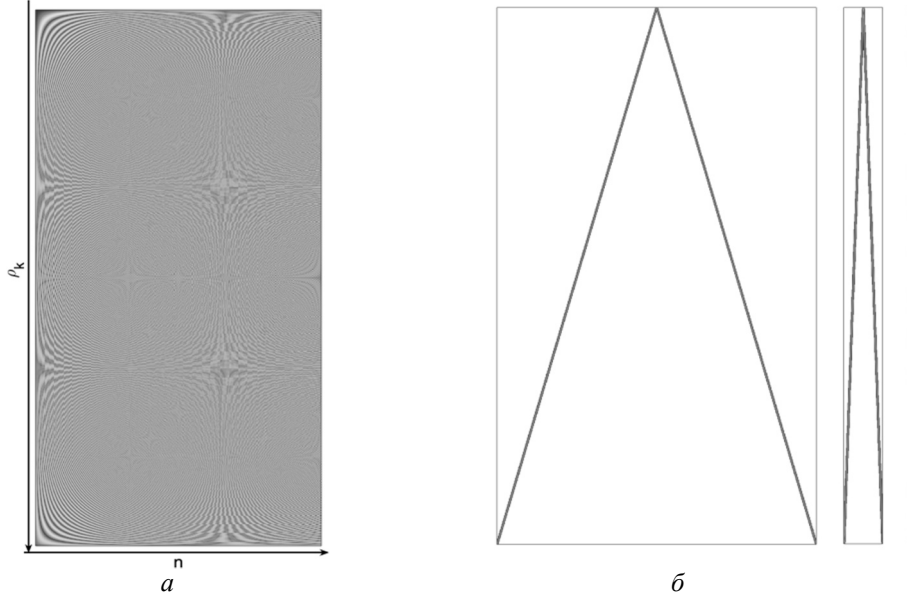


Рис. 3. Декомпозиция матрицы преобразования $V \in \mathbb{R}^{1024 \times 512}$ (а) на сжатые матрицы $V_1 W_{614} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $V_2 W_{124} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$ и матрицу $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$ (б)

Fig. 3. Decomposition of transform matrix $V \in \mathbb{R}^{1024 \times 512}$ (а) into compressed matrices $V_1 W_{614} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $V_2 W_{124} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$, and matrix $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$ (б)

Вычислительные процедуры были реализованы в виде программ на языке MATLAB с использованием библиотек Apple Accelerate BLAS (ILP64) для ускорения расчетов матрично-векторных произведений и FFTW для эффективного выполнения быстрого преобразования Фурье. Расчеты проводились на процессоре Apple M2 Pro с тактовой частотой 3500 МГц и 16 ГБ оперативной памяти.

Так как элементы матрицы (5) вещественные, то коэффициенты ряда Фурье будут симметрично сопряженными относительно нулевой частоты, и, следовательно, на подготовительном шаге достаточно вычислить только половину сжатой матрицы \check{V} . На рис. 3 представлена исходная матрица преобразования V , а также сжатые матрицы $\check{V}_1 \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $\check{V}_2 \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$ и матрица $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$, полученная на последнем шаге метода экстракомпонент, для которой сжатие нецелесообразно. В отличие от прямого умножения вектора на матрицу V предложенный подход требует последовательного умножения на три матрицы, представленные на рис. 3, б. В отсутствие необходимости деления на весовую функцию Кайзера итоговый результат можно было бы получить, умножив только первую сжатую матрицу на вектор. Однако для

предотвращения деления на близкие к нулю элементы матрицы W_N требуется дополнительное умножение на две матрицы различных порядков. Благодаря разреженной структуре и компактности портретов сжатых матриц их умножение на вектор может быть выполнено с высокой эффективностью.

Результаты численных расчетов представлены в табл. 2. Предложенный метод, несмотря на высокую оптимизацию фреймворка Accelerate, позволяет значительно сократить время вычислений коэффициентов Цернике в широком диапазоне значений N благодаря компактной структуре сжатой матрицы преобразования (рис. 4, табл. 1). С целью достижения точности порядка 10^{-6} число экстрастолбцов задавалось $s \approx N / 8$.

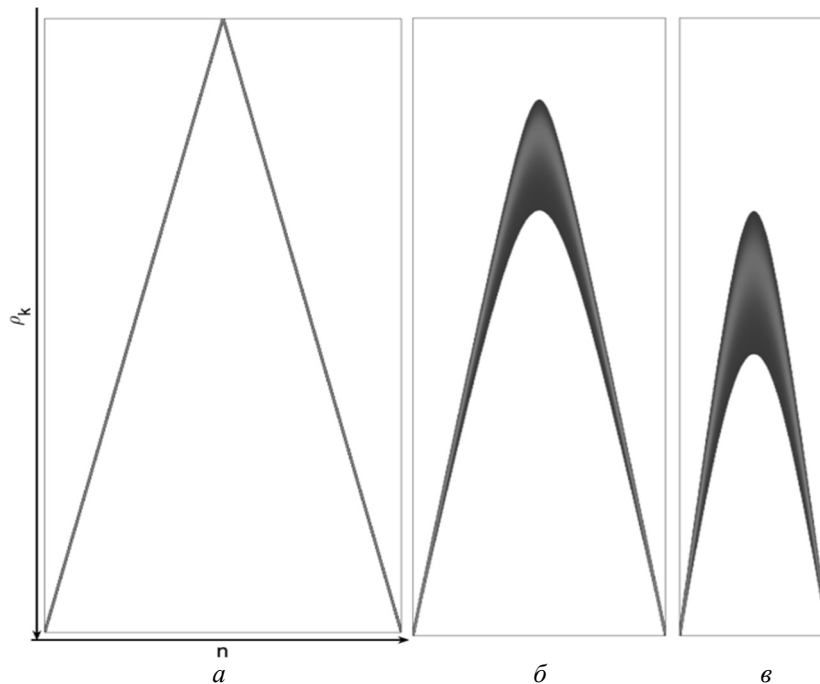


Рис. 4. Амплитуда элементов сжатой матрицы $VW_N \mathcal{F}^*$

для функций $R_n^m(\rho_k)$, где $\rho_k \in (0, 1)$, $m \leq n \leq 1024$:

a) $m = 1$; б) $m = 300$; в) $m = 600$

Fig. 4. The amplitude of the elements of the compressed matrix $VW_N \mathcal{F}^*$

for functions $R_n^m(\rho_k)$, where $\rho_k \in (0, 1)$, $m \leq n \leq 1024$:

a) $m = 1$; b) $m = 300$; c) $m = 600$

При разработке экономичных процедур умножения векторов на матрицы для преобразования Цернике следует учитывать, что с ростом m степень сжатия матрицы преобразования сокращается. Это снижает эффективность алгоритмов, основанных на методе экстракомпонент. Исключение составляют случаи, когда значения азимутального порядка m близки к N (рис. 4 и 5), при которых порядок умножаемой матрицы становится незначительным. Решение этой проблемы будет рассмотрено в следующих работах.

Таблица 1

Table 1

Размеры подматриц $2N \times N_i$ на i -м шаге многоуровневого алгоритма умножения сжатой матрицы по строкам на вектор. На заключительном шаге размерность матрицы составляет $2N \times N_d$ элементов

The dimensions of the submatrices $2N \times N_i$ at the i -th step of the multi-level algorithm for multiplying the compressed matrix row-wise by a vector. At the final step, the dimension of the matrix is $2N \times N_d$ elements

N	N_1	N_2	N_3	N_d
64	73	–	–	9
128	145	–	–	17
256	288	–	–	32
512	575	72	–	9
1024	1149	142	–	17
2048	2296	280	–	32
4096	4590	555	70	9
8192	9178	1106	136	16

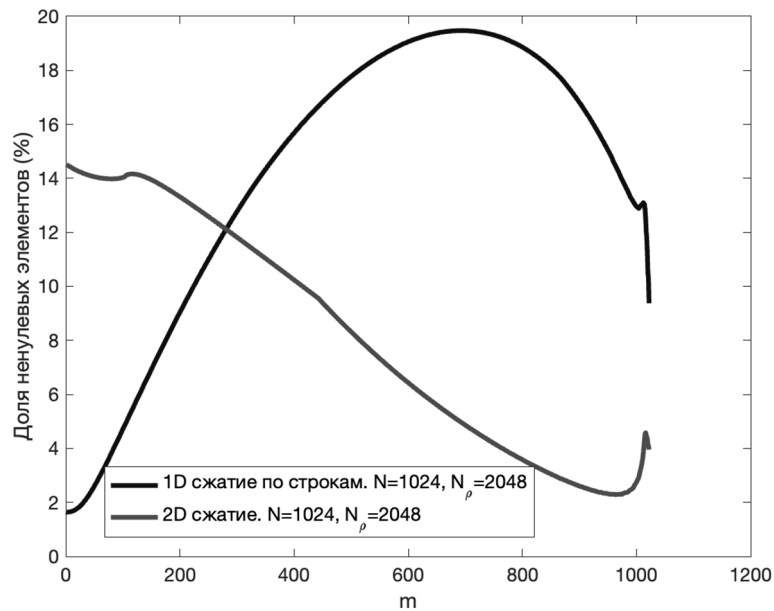


Рис. 5. Сравнение качества 1D- и 2D-алгоритмов сжатия матрицы для многочленов $R_n^m(\rho_k)$ от m при $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Fig. 5. Comparison of the performance of 1D- and 2D-matrix compression algorithms for polynomials $R_n^m(\rho_k)$ of m when $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Таблица 2

Table 2

Зависимости времени счета (T , секунды) и точности вычислений для прямого и быстрого алгоритмов умножения вектора на матрицу вида (5) от порядка матрицы N (для достижения точности расчета 10^{-6} количество экстрастолбцов было задано $N/8$ на основе вычисления параметров $\zeta(\epsilon_1)$ и $s(\epsilon_2, \zeta)$)

Dependencies of computation time (T in seconds) and calculation accuracy for the direct and fast algorithms for vector-matrix multiplication of the form (5) as a function of the matrix order N (to achieve a calculation accuracy of 10^{-6} the number of extra columns was set to $N/8$, based on the computation of the parameters $\zeta(\epsilon_1)$ and $s(\epsilon_2, \zeta)$)

N	AF_BLAS	$\epsilon_1 = 10^{-9}, \epsilon_2 = 10^{-4}$		
	T_1	T_2	$\frac{T_1}{T_2}$	$\frac{\ Vx - \dot{V}FW_N^{-1}x\ _2}{\ Vx\ _2}$
64	3,19E-05	3,58E-05	0,89	2,17E-06
128	6,13E-05	5,18E-05	1,18	4,85E-06
256	1,99E-04	7,12E-05	2,80	3,96E-06
512	7,19E-04	1,34E-04	5,36	4,99E-06
1024	2,74E-03	2,32E-04	11,79	4,83E-06
2048	1,61E-02	6,21E-04	25,87	5,26E-06
4096	4,86E-02	1,09E-03	44,48	5,69E-06
8192	0,16	2,58E-03	63,55	5,65E-06

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен общий подход к построению быстрых алгоритмов для расчета интегрального преобразования Цернике. Вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый способ на основе метода экстракомпонент может быть эффективно применен для решения поставленной задачи. Высокая производительность алгоритма достигается за счет перехода от исходной матрицы к матрице с разреженным портретом посредством специальной процедуры на основе дискретного преобразования Фурье. Предполагается, что сжатие матрицы выполняется однократно на подготовительном этапе, тогда как количество преобразуемых векторов таково, что вычислительными затратами подготовительного этапа можно пренебречь. Такой подход сокращает время счета матрично-векторного произведения на вычислительном этапе вследствие исключения близких по модулю к нулю элементов сжатой матрицы. Высокая производительность метода в целом обеспечивается благодаря широкому использованию векторизованных инструкций современных микропроцессоров.

Дальнейшее направление исследований заключается в разработке новых методов и подходов, направленных на повышение эффективности сжатия матриц преобразования Цернике при высоких азимутальных порядках m . Это значительно улучшит точность и производительность алгоритмов решения задач в областях, таких как обработка изображений, моделирование сложных поверхностей, лазерные технологии и аэрокосмическая инженерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coolley J., Tukey J.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // *Mathematics of Computation.* – 1965. – Vol. 19 (90). – P. 297–301.
2. *Zernike F., Stratton F.J.M.* Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* – 1934. – Vol. 94 (5). – P. 377–384.
3. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // *Journal of the Optical Society of America.* – 1976. – Vol. 66 (3). – P. 207–211.
4. *Terekhov A.V.* An extra-component method for evaluating fast matrix-vector multiplication with special functions // *Numerical Algorithms.* – 2022. – Vol. 92. – P. 2189–2217.
5. *Born M., Wolf E.* Principles of optics. – New York: Pergamon Press, 1983. – 854 p.
6. *Bezdidko S.N.* The use of Zernike polynomials in optics // *Soviet Journal of Optical Technology.* – 1974. – Vol. 41. – P. 425–429.
7. *Niu K., Tian C.* Zernike polynomials and their applications // *Journal of Optics.* – 2022. – Vol. 24 (12). – P. 123001. – DOI: 10.1088/2040-8986/ac9e08.
8. A theoretical comparison among recursive algorithms for fast computation of Zernike moments using the concept of time complexity / N. Bastani, A. Vard, M. Jabalameli, V. Bastani // *American Journal of Computational Mathematics.* – 2021. – Vol. 11. – P. 304–326.
9. *Kintner E.C.* A recurrence relation for calculating the Zernike polynomials // *Optica Acta: International Journal of Optics.* – 1976. – Vol. 23 (6). – P. 499–500. DOI: 10.1080/713819279.
10. *Deng A., Wei C., Gwo C.-Y.* Stable, fast computation of high-order Zernike moments using a recursive method // *Pattern Recognition.* – 2016. – Vol. 56. – P. 16–25. – DOI: 10.1016/j.patcog.2016.02.014.
11. *Prata A., Rusch W.V.T.* Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients // *Applied Optics.* – 1989. – Vol. 28 (4). – P. 749–754. DOI: 10.1364/AO.28.000749.
12. *Chong C.-W., Paramesran R., Mukundan R.* A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments // *Pattern Recognition.* – 2003. – Vol. 36. – P. 731–742.
13. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.
14. *Анго А.* Математика для электро- и радионинженеров / с предисл. Л. Де Бройля. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
15. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

Зеленчук Никита Андреевич, аспирант, ассистент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Автор 9 научных работ, в том числе обладатель одного свидетельства о регистрации программы для ЭВМ. Область научных интересов: вычислительная математика, численные методы, интеллектуальный анализ данных и машинное обучение. E-mail: n.zelenchuk@corp.nstu.ru

Терехов Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Автор более 30 научных работ, в том числе обладатель двух свидетельств о регистрации программ для ЭВМ. Область научных интересов: вычислительная математика, численные методы, математическое моделирование. E-mail: a.terexov@corp.nstu.ru

Zelenchuk Nikita A., post graduate student and assistant lecturer at the Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. He is the author of 9 scientific papers, including one registration certificate for a computer program. His research interests include

computational mathematics, numerical methods, data mining, and machine learning. E-mail: n.zelenchuk@corp.nstu.ru

Terekhov Andrew V., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor at the Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. He is the author of more than 30 scientific papers, including two registration certificates for computer programs. His research interests cover computational mathematics, numerical methods, and mathematical modeling. E-mail: a.terexov@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34

A fast algorithm for computing matrix-vector products in the problem of function decomposition into Fourier series on a circle*

N.A. ZELENCHUK^a, A.V. TEREKHOV^b

630073, Novosibirsk, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation

^a n.zelenchuk@corp.nstu.ru ^b a.terexov@corp.nstu.ru

Abstract

A significant interest lies in the development and exploration of the potential application of fast algorithms for computing matrix-vector products in the context of transforms on the circle, which will substantially improve the efficiency of calculating Zernike moments. This paper presents an efficient method for compressing transform matrices for Zernike functions based on the Fast Discrete Fourier Transform (FDFT) algorithm and the extra-component method. The proposed approach enables efficient multiplication of the initial transform matrix by a vector using FDFT, significantly reducing the computational complexity of the overall method. It is assumed that matrix compression is performed only once during the preparatory stage, while the number of vectors to be transformed is sufficiently large for the computational costs of this stage to be negligible. This approach reduces the computation time of the matrix-vector product during the processing stage by eliminating matrix elements with magnitudes close to zero. The preparatory stage will require performing of the order of $O(N^2 \log N)$ operations, while the computational stage will involve performing $O(N \log N)$ arithmetic operations, which is significantly less than the estimate $O(N^2)$ for the direct method of calculating the matrix-vector product. Computational experiments demonstrate the stability, accuracy, and efficiency of the procedures, which makes it possible to substantially reduce the computation time by several orders of magnitude compared to direct matrix-vector multiplication for the current problem of decomposing functions into series according to the Zernike basis.

Keywords: integral transforms, discrete transforms, transform matrices, fast algorithms, matrix compression, orthogonal polynomials, Fourier series, Zernike polynomials

REFERENCES

1. Cooley J., Tukey J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 1965, vol. 19 (90), pp. 297–301.
2. Zernike F., Stratton F.J.M. Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1934, vol. 94 (5), pp. 377–384.
3. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, vol. 66 (3), pp. 207–211.
4. Terekhov A.V. An extra-component method for evaluating fast matrix-vector multiplication with special functions. *Numerical Algorithms*, 2022, vol. 92, pp. 2189–2217.

* Received 28 February 2024.

5. Born M., Wolf E. *Principles of optics*. New York, Pergamon Press, 1983. 854 p.
6. Bezdidko S.N. The use of Zernike polynomials in optics. *Soviet Journal of Optical Technology*, 1974, vol. 41, pp. 425–429.
7. Niu K., Tian C. Zernike polynomials and their applications. *Journal of Optics*, 2022, vol. 24 (12), p. 123001. DOI: 10.1088/2040-8986/ac9e08.
8. Bastani N., Vard A., Jabalameli M., Bastani V. A theoretical comparison among recursive algorithms for fast computation of Zernike moments using the concept of time complexity. *American Journal of Computational Mathematics*, 2021, vol. 11, pp. 304–326.
9. Kintner E.C. A recurrence relation for calculating the Zernike polynomials. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 1976, vol. 23 (6), pp. 499–500. DOI: 10.1080/713819279.
10. Deng A., Wei C., Gwo C.-Y. Stable, fast computation of high-order Zernike moments using a recursive method. *Pattern Recognition*, 2016, vol. 56, pp. 16–25. DOI: 10.1016/j.patog.2016.02.014.
11. Prata A., Rusch W.V.T. Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients. *Applied Optics*, 1989, vol. 28 (4), pp. 749–754. DOI: 10.1364/AO.28.000749.
12. Chong C.-W., Paramesran R., Mukundan R. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 2003, vol. 36, pp. 731–742.
13. Krylov V.I. *Priblizhennoe vychislenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 328 p.
14. Angot A. *Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov* [Mathematics for electrical and radio engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 780 p. (In Russian).
15. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. 2nd ed., rev. Moscow, Nauka Publ., 1979. 416 p.

Для цитирования:

Зеленчук Н.А., Терехов А.В. Быстрый алгоритм вычисления матрично-векторных произведений в задаче разложения функций в ряды Фурье на круге // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 21–34. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34.

For citation:

Zelenchuk N.A., Terekhov A.V. Bystryi algoritm vychisleniya matrichno-vektornykh proizvedenii v zadache razlozheniya funktsii v ryady Fur'e na kruge [A fast algorithm for computing matrix-vector products in the problem of function decomposition into Fourier series on a circle]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 21–34. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34.