

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.242

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-73-84

A*-оптимальное планирование эксперимента для локально-адаптивных регрессионных моделей

А.А. ПОПОВ

*РФ, 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет*

a.popov@corp.nstu.ru

Сложные регрессионные зависимости можно конструировать с использованием непараметрических моделей или на основе развиваемой концепции локально-адаптивных регрессионных моделей (Locally Adaptive Regression – LAR). В исходном виде предлагаемые LAR-модели неидентифицируемы. Связано это с тем, что для любого значения фактора сумма значений индикаторной функции равна единице. Такая же проблема существует в задаче оценивания параметров моделей дисперсионного анализа, когда уровни факторов кодируют значениями псевдопеременных. Рассматривается вопрос идентификации LAR-моделей. Вводится процедура редукции модели точно так же, как это делается для моделей дисперсионного анализа. Активная идентификация подобных моделей предполагает проведение экспериментов на объекте по построенному априорному плану. Рассматривается случай, когда область определения действующих факторов разбивается на 2 или 3 подобласти. Степень принадлежности факторов той или иной партии определяется через индикаторную функцию, принимающую значение от нуля до единицы. Используемые при построении планов экспериментов критерии связаны с точностью оценок параметров модели, как, например, критерий *A*-оптимальности. В качестве модели используется LAR-модель от одного фактора. При этом выбиралось число партий 2 и 3, а в качестве локальной – линейная и квадратичная модели. Впервые предлагаемые *A*-оптимальные планы сравниваются с ранее построенными *D*-оптимальными планами. Отмечается, что для построенных *A*-оптимальных планов средняя дисперсия оценок параметров значительно меньше, чем для *D*-оптимальных планов. Полученные оптимальные планы могут быть использованы для синтеза на их основе дискретных оптимальных планов.

Ключевые слова: регрессия, модель, локальная модель, нечеткая партия, индикаторная функция, план эксперимента, критерии оптимальности, *A*-оптимальные планы

* Статья получена 27 января 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

Концепция локально-адаптивного моделирования может использоваться для построения сложных регрессионных зависимостей [1–5]. Такая концепция предполагает помимо обычных регрессоров использовать также регрессоры, определенные на нечетких партициях входных факторов. Для обеспечения возможности оценивания всех параметров таких моделей проводится редукция исходных моделей [5]. Активная идентификация подобных моделей предполагает использование в эксперименте на объекте построенного априорного плана. В теории оптимального планирования эксперимента при выборе плана опираются на критерии оптимальности [6]. Одним из самых важных критериев считается критерий A -оптимальности, который предполагает выбор плана через минимизацию следа дисперсионной матрицы. Если использовать, например, критерий E -оптимальности, то эллипсоид рассеивания оценок параметров может иметь наименьшую максимальную ось, но его объем будет большим. При использовании критерия D -оптимальности всё может получиться наоборот: эллипсоид рассеивания будет иметь малый объем, но будет вытянутым по каким-то его главным осям [6–10]. Получается, что критерий A -оптимальности занимает промежуточное положение между критериями D - и E -оптимальности.

1. ПОСТРОЕНИЕ A -ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Будем отталкиваться от традиционной модели наблюдения вида

$$y = f^T(x)\theta + e = \sum_l^m f_l(x)\theta_l + e, \quad (1)$$

где y – отклик; e – ошибка наблюдения; $f^T(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ – вектор регрессоров от факторов $x = (x_1, \dots, x_k)^T$, определенных на области $\tilde{X}$; $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ – параметры, линейно входящие в модель и подлежащие оцениванию по результатам проведенного эксперимента. Разобьем область определения каждого из факторов $x_1, \dots, x_k$ на нечеткие партиции $\mathfrak{R}_{j1}, \mathfrak{R}_{j2}, \dots, \mathfrak{R}_{js_j}, j = 1, \dots, k$. Принадлежность заданного значения фактора той или иной нечеткой партиции будем определять через индикаторные функции $\mu_i(x_1) \in [0, 1], i = 1, \dots, s_1, \mu_j(x_2) \in [0, 1], j = 1, \dots, s_2, \dots, \mu_l(x_k) \in [0, 1], l = 1, \dots, s_k$. В практике нечеткого моделирования используют самые разные по виду индикаторные функции (в частности, треугольные, трапециевидные и сигмовидные [1]). Индикаторные функции конструируют с учетом их нормировки:

$$\sum_{i=1}^{s_1} \mu_i(x_1) = 1, \sum_{j=1}^{s_2} \mu_j(x_2) = 1, \dots, \sum_{l=1}^{s_k} \mu_l(x_k) = 1. \quad (2)$$

Пусть число факторов равно двум. Тогда исходная модель наблюдения будет иметь вид

$$\begin{aligned} y_{ij} = & \theta_0 + \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i(x_1)\theta_{01i} + \sum_{j=1}^{s_2} \mu_j(x_2)\theta_{02j} + \\ & + \left(\theta_1 + \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i(x_1)\theta_{11i} + \sum_{j=1}^{s_2} \mu_j(x_2)\theta_{12j} \right) x_1 + \\ & + \left(\theta_2 + \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i(x_1)\theta_{21i} + \sum_{j=1}^{s_2} \mu_j(x_2)\theta_{22j} \right) x_2 + e_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для идентификации модели (3) необходимо провести редукцию модели, удалив из нее регрессоры, связанные, например, с последними по списку индикаторными функциями [5]. Такой прием мы эффективно использовали для моделей дисперсионного анализа [11].

Под планом эксперимента понимается совокупность величин: $\epsilon = \left\{ \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{matrix} \right\}$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, где верхняя строка в структуре записи плана ϵ представляет собой спектр плана, а нижняя строка – веса точек спектра плана. Плану ϵ соответствует информационная матрица

$$M(\epsilon) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) f^T(x_i). \quad (4)$$

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в работах [12, 13]. Основное внимание уделим решению задачи построения *A*-оптимальных планов. Построение оптимального плана предполагает решение экстремальной задачи, в которой минимизируется конкретный функционал от информационной или дисперсионной матрицы. Достижение в процессе решения оптимизационной задачи точки экстремума определяется по выполнению необходимых и достаточных условий. Для *A*-оптимальности плана ϵ^* необходимое и достаточное условие оптимальности состоит в выполнении [6]:

$$\max_{x \in \tilde{X}} \varphi(x, \epsilon^*) = \text{tr} M^{-1}(\epsilon^*), \text{ где } \varphi(x, \epsilon^*) = f^T(x) M^{-2}(\epsilon^*) f(x). \quad (5)$$

Для простейших моделей оптимальные планы можно получить, используя аналитические выкладки. При использовании численных методов условия (5) будут выполняться с точностью δ :

$$\left| \max_{x \in \tilde{X}} \varphi(x, \epsilon^s) - \text{tr} M^{-1}(\epsilon^s) \right| \leq \delta. \quad (6)$$

В процессе решения в начальный план будем добавлять точки, соответствующие глобальному максимуму функции $\varphi(x, \varepsilon^s)$ [6]. Точность выполнения условий (5) зависит от задаваемой погрешности δ и точности определения глобального максимума функции $\varphi(x, \varepsilon^s)$. Функция $\varphi(x, \varepsilon^s)$ является мульти-модальной, поэтому для гарантированного нахождения ее глобального максимума будем искать его на сетке с мелким шагом. На итерациях будем добавлять в текущий план точки, соответствующие глобальному максимуму $\varphi(x, \varepsilon^s)$ с подбором веса включаемой точки. Близкие точки будем объединять, точки с малыми весами – удалять. Останов алгоритма осуществляется по выполнению соотношения (6).

Входные факторы определим на отрезке $[-1, +1]$. Простейшие LAR-модели предполагают использование в качестве базовой модели линейную относительно факторов модель с двумя партициями. В случае сигмовидных двух партиций индикаторные функции имеют вид

$$\mu_1(x) = 1 / \left(1 + e^{d_2(x-d_1)} \right), \quad \mu_2(x) = 1 / \left(1 + e^{-d_2(x-d_1)} \right),$$

где d_2 – коэффициент пологости; $d_1 = 0$, $\mu(d_1) = 0,5$. В случае трех партиций индикаторные функции следующие:

$$\mu_1(x) = \frac{1}{1 + e^{d_2(x+d_1)}}, \quad \mu_3(x) = \frac{1}{1 + e^{-d_2(x-d_1)}}, \quad \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) - \mu_3(x).$$

LAR-модель с одним фактором на двух партициях имеет вид

$$E(y/x) = f^T(x)\theta = \theta_0 + \theta_1 x + \mu_1(x)\theta_{01} + \mu_1(x)\theta_{11}x,$$

а для трех партиций

$$E(y/x) = f^T(x)\theta = \theta_0 + x\theta_1 + \mu_1(x)\theta_{01} + \mu_2(x)\theta_{02} + \mu_1(x)x\theta_{11} + \mu_2(x)x\theta_{12}.$$

В табл. 1 и 2 в столбцах приведены A -оптимальные планы и их основные характеристики. Точность выполнения условий (6) обеспечивалась на уровне $\delta = 10^{-3}$. Насколько точно выполнялись условия (6), можно проследить на рис. 1, где приведен график функции $\varphi(x, \varepsilon^*)$ построенного A -оптимального плана для $d_2 = 18$.

Пример расположения точек спектра оптимального плана и вид индикаторных функций приведен на рис. 2.

При уменьшении d_2 характеристики оптимальных планов $|M(\varepsilon^*)|$ и $trM^{-1}(\varepsilon^*)$ ухудшаются. Связано это с пологостью индикаторных функций. Особенно заметно это в отношении следа дисперсионной матрицы, представляющего средние габаритные размеры эллипсоида рассеивания оценок параметров. Если для $d_2 = 27$ он равен 31,615, то для $d_2 = 4$ он равен 143,22.

Таблица 1

Table 1

***A*-оптимальные планы для линейной модели с двумя партициями**

***A*-optimal designs for a linear model with two partitions**

d_2	ϵ^*	$ M(\epsilon^*) $	$trM^{-1}(\epsilon^*)$
4	$\begin{Bmatrix} -1 & -0,36 & 0,36 & 1 \\ 0,1764 & 0,3236 & 0,3236 & 0,1764 \end{Bmatrix}$	$0,130 \cdot 10^{-3}$	143,22
8	$\begin{Bmatrix} -1 & -0,241 & 0,241 & 1 \\ 0,1883 & 0,3117 & 0,3117 & 0,1883 \end{Bmatrix}$	$0,590 \cdot 10^{-3}$	55,622
12	$\begin{Bmatrix} -1 & -0,184 & 0,184 & 1 \\ 0,1934 & 0,3066 & 0,3066 & 0,1934 \end{Bmatrix}$	$0,975 \cdot 10^{-3}$	42,497
18	$\begin{Bmatrix} -1 & -0,139 & 0,139 & 1 \\ 0,1971 & 0,3029 & 0,3029 & 0,1971 \end{Bmatrix}$	$0,139 \cdot 10^{-2}$	35,664
27	$\begin{Bmatrix} -1 & -0,107 & 0,107 & 1 \\ 0,2005 & 0,2995 & 0,2995 & 0,2005 \end{Bmatrix}$	$0,182 \cdot 10^{-2}$	31,615

Таблица 2

Table 2

***A*-оптимальные планы для квадратичной модели с двумя партициями**

***A*-optimal designs for a quadratic model with two partitions**

d_2	ϵ^*	$ M(\epsilon^*) $	$trM^{-1}(\epsilon^*)$
4	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,743 & \pm 0,246 \\ 0,1034 & 0,2058 & 0,1908 \end{Bmatrix}$	$0,137 \cdot 10^{-10}$	43411
8	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,663 & \pm 0,174 \\ 0,1012 & 0,2147 & 0,1841 \end{Bmatrix}$	$0,976 \cdot 10^{-9}$	3441
12	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,608 & \pm 0,131 \\ 0,096 & 0,2205 & 0,1835 \end{Bmatrix}$	$0,338 \cdot 10^{-8}$	1698
18	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,576 & \pm 0,097 \\ 0,096 & 0,225 & 0,1785 \end{Bmatrix}$	$0,737 \cdot 10^{-8}$	1149
27	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,552 & \pm 0,071 \\ 0,095 & 0,229 & 0,1775 \end{Bmatrix}$	$0,123 \cdot 10^{-7}$	912

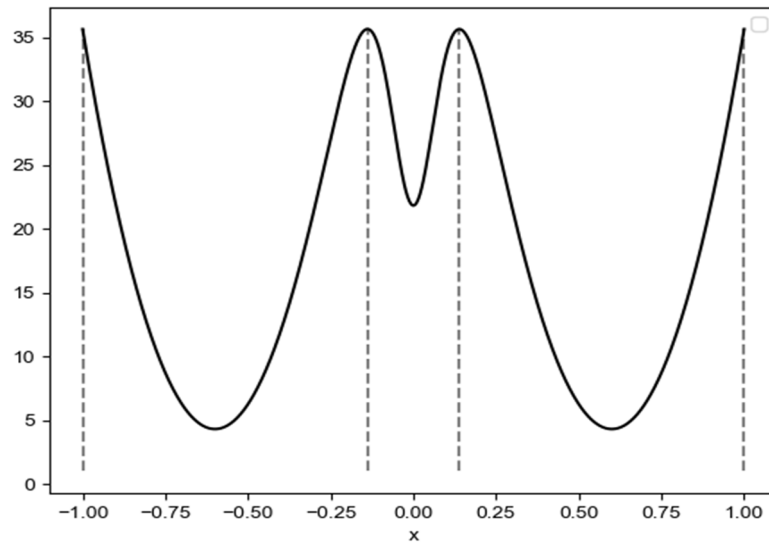


Рис. 1. Функция $\varphi(x, \varepsilon^*)$ для A -оптимального плана при $d_2 = 18$

Fig. 1. The $\varphi(x, \varepsilon^*)$ function for the A -optimal design with $d_2 = 18$

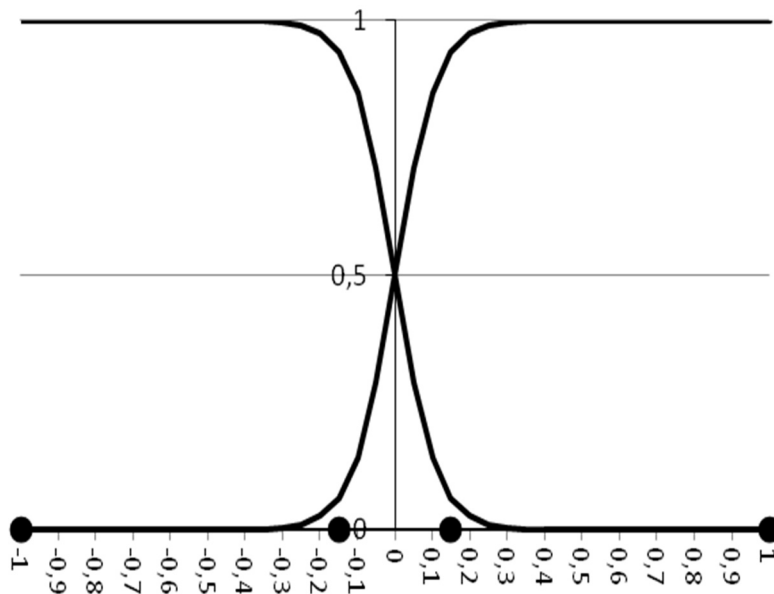


Рис. 2. Спектр оптимального плана для линейной локально-адаптивной модели на двух партициях и вид индикаторных функций при $d_2 = 18$

Fig. 2. Spectrum of the optimal design points for a linear locally adaptive model on two partitions and the type of indicator functions for $d_2 = 18$

Если предполагается, что регрессионная зависимость на локальных участках более сложная, чем линейная, то целесообразно использовать локальные

квадратичные модели (см. табл. 2). Также хорошо просматривается зависимость характеристик оптимальных планов от пологости индикаторных функций. Например, для $d_2 = 27$ след дисперсионной матрицы равен 912, а для $d_2 = 4$ он равен 43 411. Иногда возможно вместо локальной квадратичной модели на двух партициях использовать линейную модель на трех партициях. При использовании трех партиций возникает задача выбора точки пересечения соседних партиций (параметр d_1). Можно стремиться к тому, чтобы ширина нечетких партиций была примерна у всех одинаковой. В нашем случае параметр d_1 выбирался равным 0,4.

В табл. 3 представлены оптимальные планы для линейной модели с тремя партициями и $d_1 = 0,4$. По приведенным характеристикам видим, что линейные модели на трех партициях по характеристикам точности получаемых оценок параметров могут составить конкуренцию квадратичным моделям на двух партициях. При этом число оцениваемых параметров этих моделей одинаково, а описательная способность соизмерима. Как можно видеть, эффект пологости также имеет место быть: для $d_2 = 27$ след дисперсионной матрицы равен 204, а при $d_2 = 8$ он равен 684.

Таблица 3

Table 3

A-оптимальные планы для линейной модели с тремя партициями

A-optimal designs for a linear model with three partitions

d_2	ϵ^*	$ M(\epsilon^*) $	$trM^{-1}(\epsilon^*)$
8	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,602 & \pm 0,224 \\ 0,1287 & 0,2065 & 0,1648 \end{Bmatrix}$	$0,868 \cdot 10^{-8}$	684
12	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,55 & \pm 0,245 \\ 0,1383 & 0,2095 & 0,1522 \end{Bmatrix}$	$0,433 \cdot 10^{-7}$	365
18	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,512 & \pm 0,274 \\ 0,145 & 0,213 & 0,142 \end{Bmatrix}$	$0,119 \cdot 10^{-6}$	256
27	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,485 & \pm 0,302 \\ 0,151 & 0,2145 & 0,1345 \end{Bmatrix}$	$0,239 \cdot 10^{-6}$	204

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В условиях, когда различных критериев оптимальности предложено достаточно много, встает вопрос их выбора при проведении активной идентификации модели объекта. Можно, например, выбирать робастный критерий оптимальности, использование которого позволяет получать планы, близкие к оптимальным и по другим критериям. Для сравнения в табл. 4 приведены D-оптимальные планы для квадратичной LAR-модели [12, 13].

Таблица 4

Table 4

D-оптимальные планы для квадратичной модели с двумя партициями**D-Optimal designs for a quadratic model with two partitions**

d_2	ε^*	$ M(\varepsilon^*) $	$trM^{-1}(\varepsilon^*)$
4	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,69 & \pm 0,22 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{Bmatrix}$	$0,197 \cdot 10^{-10}$	63871
8	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,62 & \pm 0,169 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{Bmatrix}$	$0,137 \cdot 10^{-8}$	5068
12	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,58 & \pm 0,133 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{Bmatrix}$	$0,486 \cdot 10^{-8}$	2601
18	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,56 & \pm 0,106 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{Bmatrix}$	$0,107 \cdot 10^{-7}$	1832
27	$\begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 0,541 & \pm 0,08 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{Bmatrix}$	$0,185 \cdot 10^{-7}$	1492

Видим, что средняя дисперсия оценок параметров для A -оптимальных планов существенно меньше. Используя процедуру округления [6] предложенные непрерывные A -оптимальные планы можно использовать для получения на их базе дискретных планов.

Помимо точности оценивания параметров модели, важной характеристикой применяемых планов эксперимента является дисперсия $d(x, \varepsilon) = f^T(x)M^{-1}(\varepsilon)f(x)$ прогноза отклика в заданную точку факторного пространства. На рис. 3 и 4 представлены графики функции $d(x, \varepsilon)$ для D - и A -оптимальных планов для линейной модели с тремя партициями.

Видим, что по величине максимума функции $d(x, \varepsilon)$ A -оптимальный план немного проигрывает D -оптимальному, а по среднему значению дисперсии отклика планы примерно равны. Можно наблюдать также, что в факторном пространстве есть области с большой дисперсией $d(x, \varepsilon)$ и с малой, что снижает качество прогноза по построенным моделям. В будущем следует рассмотреть критерий Q -оптимальности при построении планов для LAR-моделей [14, 15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для локально адаптивного регрессионного моделирования продолжено рассмотрение концепции активной идентификации таких моделей. Построены A -оптимальные планы для LAR-моделей от одной переменной

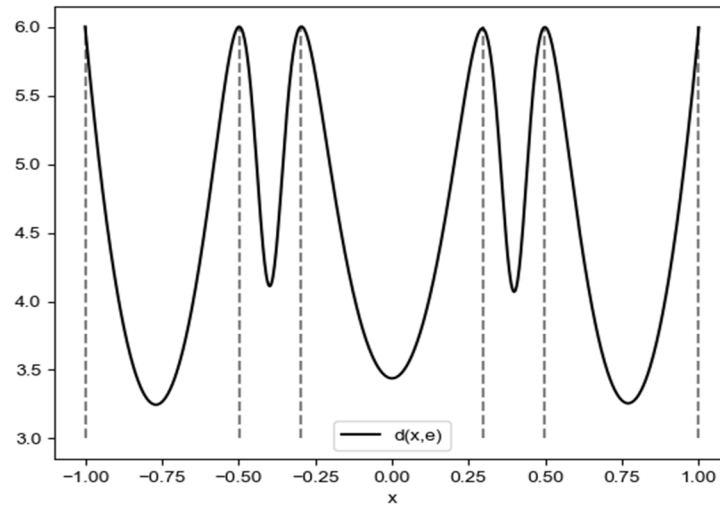


Рис. 3. График функции $d(x, \epsilon)$ D -оптимального плана для линейной локально-адаптивной модели на трех партициях при $d_2 = 27$

Fig. 3. Graph of the $d(x, \epsilon)$ function for the D -optimal plan for a linear locally adaptive model on three partitions at $d_2 = 27$

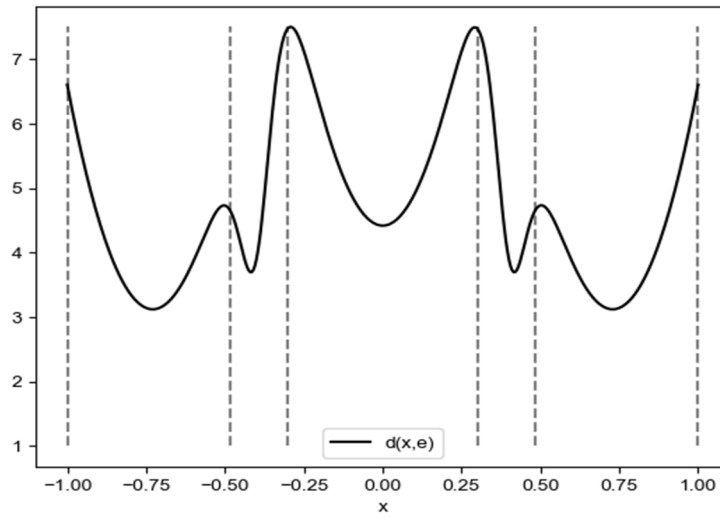


Рис. 4. График функции $d(x, \epsilon)$ A -оптимального плана для линейной локально-адаптивной модели на трех партициях при $d_2 = 27$

Fig. 4. Graph of the $d(x, \epsilon)$ function for the A -optimal plan for a linear locally adaptive model on three partitions at $d_2 = 27$

с линейной базовой моделью на двух и трех партициях и квадратичной базовой моделью с двумя партициями. Проведено сравнение полученных планов с ранее построенными D -оптимальными планами. Отмечается, что A -оптимальные планы обеспечивают значительно меньшие геометрические размеры эллипсоида рассеивания оценок параметров в сравнении с D -оптимальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление: пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Бином, 2013. – 798 с.
2. *Takagi T., Sugeno M.* fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1985. – Vol. 15 (1). – P. 116–132.
3. *Babuska R.* Fuzzy modelling for control. – Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 257 p.
4. *Lilly J.H.* Fuzzy control and identification. – Hoboken, NJ: Wiley, 2010. – 231 p.
5. *Popov A.A., Volkova V.M.* An optimal design of the experiment in the active identification of locally adaptive linear regression models // Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation: Proceedings of the International Workshop, 18–20 September 2019. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2019. – P. 453–460.
6. *Федоров В.В.* Теория оптимального планирования эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
7. *Налимов В.В., Голикова Т.И.* Логические основания планирования эксперимента. – М.: Металлургия, 1981. – 151 с.
8. *Голикова Т.И., Панченко Л.А., Фридман М.З.* Каталог планов второго порядка. Ч. 2. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 384 с.
9. *Голикова Т.И., Панченко Л.А.* Систематизация планов для оценки полиномиальных моделей второго порядка // Планирование оптимальных экспериментов. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – С. 106–149.
10. *Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатеев В.А.* Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. – М.: Наука, 1977. – 208 с.
11. *Попов А.А.* Оптимальное планирование эксперимента в задачах структурной и параметрической идентификации моделей многофакторных систем: монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 296 с.
12. *Попов А.А.* Оптимальное планирование эксперимента при активной идентификации нечетких линейных регрессионных моделей // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7, № 1. – С. 99–114. – DOI: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.020.
13. *Попов А.А.* Оптимальное планирование эксперимента для локально-адаптивных регрессионных моделей // Динамика систем, механизмов и машин. – 2021. – Т. 9, № 4. – С. 125–130. – DOI: 10.25206/2310-9793-9-4-125-130.
14. *Григорьев Ю.Д.* Q -оптимальные и близкие к ним планы эксперимента для полиномиальной регрессии на отрезке // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2020. – Т. 86, № 5. – С. 65–72. – DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-5-65-72.
15. *Попов А.А.* Алгоритмы построения дискретных приближенно Q -оптимальных планов эксперимента при активной идентификации регрессионных моделей многофакторных систем // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 2 (94). – С. 55–68. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-55-68.

Попов Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – статистические методы анализа данных, оптимальное планирование экспериментов, методы машинного обучения. Имеет более 250 публикаций, в том числе 3 монографии. E-mail: a.popov@corp.nstu.ru

Popov Alexander A., D.Sc. (Eng.), Professor, Department of Theoretical and Applied Computer Science, Novosibirsk State Technical University. The main area of his research

is statistical methods of data analysis, optimal design of experiments, and methods of machine learning. He has more than 250 publications, including 3 monographs. E-mail: a.popov@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-73-84

*A-optimal experimental design for locally adaptive regression models**

A.A. POPOV

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

a.popov@corp.nstu.ru

Abstract

Complex regression dependencies can be constructed using nonparametric models or based on the developing concept of locally adaptive regression models (LAR models). The proposed LAR models are not identifiable in their original form. This is due to the fact that for any value of the factor, the sum of the values of the indicator function is equal to 1. The same problem exists in the problem of estimating the parameters of variance analysis models, when the levels of factors are encoded by the values of pseudo-variables. The issue of identifying LAR models is considered. A procedure for reducing the model is introduced in the same way as it is done for variance analysis models. Active identification of such models involves conducting experiments on the object according to the constructed a priori plan. The case is considered when the area of definition of the operating factors is divided into 2 or 3 subareas. The degree of belonging of factors to a particular partition is determined through the indicator function, taking a value from 0 to 1. The criteria used in constructing experimental plans are related to the accuracy of the estimates of the model parameters, such as the A-optimality criterion. The problem of constructing A-optimal plans is solved. The single-factor LAR model is used as the model. In this case, the number of partitions was chosen as 2 and 3, and a local linear model and quadratic model were chosen as the local model. For the first time, the proposed A-optimal plans are compared with previously constructed D-optimal plans. It is noted that for the constructed A-optimal plans, the average dispersion of parameter estimates is significantly less than for D-optimal plans. The obtained optimal plans can be used to synthesize discrete optimal plans on their basis.

Keywords: regression, model, local model, fuzzy partition, indicator function, experimental design, optimality criteria, A-optimal designs

REFERENCES

1. Piegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy modeling and control]*. 2nd ed. Moscow, Binom Publ., 2013. 798 p. (In Russian).
2. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, vol. 15 (1), pp. 116–132.
3. Babuska R. *Fuzzy modelling for control*. Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1998. 257 p.
4. Lilly J.H. *Fuzzy control and identification*. Hoboken, NJ, Wiley, 2010. 231 p.
5. Popov A.A., Volkova V.M. An optimal design of the experiment in the active identification of locally adaptive linear regression models. *Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation: Proceedings of the International Workshop*, 18–20 September 2019, Novosibirsk, 2019, pp. 453–460.

* Received 27 January 2025.

6. Fedorov V.V. *Teoriya optimal'nogo planirovaniya eksperimenta* [Theory of optimal experiment design]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 312 p.
7. Nalimov V.V., Golikova T.I. *Logicheskie osnovaniya planirovaniya eksperimenta* [Logical foundations for design an experiment]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1981. 151 p.
8. Golikova T.I., Panchenko L.A., Fridman M.Z. *Katalog planov vtorogo poryadka*. Ch. 2 [Catalog of plans of the second order. Pt. 2]. Moscow, MSU Publ., 1974. 384 p.
9. Golikova T.I., Panchenko L.A. Sistematizatsiya planov dlya otsenki polinomial'nykh modelei vtorogo poryadka [Systematization of designs for evaluating second order polynomial models]. *Planirovanie optimal'nykh eksperimentov* [Design of optimal experiments]. Moscow, MSU Publ., 1975, pp. 106–149.
10. Krug G.K., Sosulin Y.A., Fatuev V.A. *Planirovanie eksperimenta v zadachakh identifikatsii i ekstrapolyatsii* [Design of experiments in problems of identification and extrapolation]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 208 p.
11. Popov A.A. *Optimal'noe planirovanie eksperimenta v zadachakh strukturnoi i parametricheskoi identifikatsii modelei mnogofaktornykh sistem* [The optimal experiment planning in problems of structural and parametric identification of multifactor systems models]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2013. 296 p.
12. Popov A.A. Optimal'noe planirovanie eksperimenta pri aktivnoi identifikatsii nechetkikh lineinykh regressionnykh modelei [Optimal desing of the experiment with the active identification of fuzzy linear regressionmodels]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 99–114. DOI: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.020.
13. Popov A.A. Optimal'noe planirovanie eksperimenta dlya lokal'no-adaptivnykh regressionnykh modelei [Optimal experiment design for locally-adaptive regression models]. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin = Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*, 2021, vol. 9, no. 4, pp. 125–130. DOI: 10.25206/2310-9793-9-4-125-130.
14. Grigor'ev Yu.D. Q-optimal'nye i blizkie k nim plany eksperimenta dlya polinomial'noi regressii na otrezke [Q-optimal experimental designs and close to them experimental designs for polynomial regression on the interval]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov = Industrial laboratory. Diagnostics of materials*, 2020, vol. 86, no. 5, pp. 65–72. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-5-65-72.
15. Popov A.A. Algoritmy postroeniya diskretnykh priblizhenno Q-optimal'nykh planov eksperimenta pri aktivnoi identifikatsii regressionnykh modelei mnogofaktornykh sistem [Algorithms for constructing discrete approximate Q-optimal experimental designs with active identification of regression models of multifactor systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 2 (94), pp. 55–68. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-55-68.

Для цитирования:

Попов А.А. А-оптимальное планирование эксперимента для локально-адаптивных регрессионных моделей // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 1 (97). – С. 73–84. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-73-84.

For citation:

Popov A.A. A-optimal'noe planirovanie eksperimenta dlya lokal'no-adaptivnykh regressionnykh modelei [A-optimal experimental design for locally adaptive regression models]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2025, no. 1 (97), pp. 73–84. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-73-84.