

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 62.5

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-85-104

Влияние методов дискретизации на обусловленность информационной матрицы и характер формирования гиперсфер ошибок в задачах оценивания параметров по малому числу наблюдений*

Е.И. ПОПОВ^{1,a}, А.С. ГЛАЗЫРИН^{2,b}, В.А. КОПЫРИН^{1,c}

¹ РФ, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, 38, Тюменский индустриальный университет

² РФ, 634050, г. Томск, проспект Ленина, 30, Национальный исследовательский Томский политехнический университет

^a popov72@mail.ru ^b asglazyrin@tpu.ru ^c kopyrinva@gmail.com

В работе рассмотрены вопросы применения дискретных моделей динамических систем на основе многошаговых методов для задач идентификации и оценивания параметров по малому числу наблюдений на примере апериодического звена первого порядка. Проблема идентификации параметров динамических систем актуальна в задачах управления стационарными и нестационарными динамическими системами, например, в системах бездатчикового управления синхронными или асинхронными электроприводами погружных установок центробежных электронасосов, находящихся в режиме прерывистой эксплуатации. Задача оценивания параметров решалась в классической постановке метода наименьших квадратов без учета априорной информации о характере шумов в измерительных каналах. Показано, что точность оценивания параметров зависит не только от нормы вектора помех, но и от его ориентации относительно пространства столбцов информационной матрицы, а также от числа обусловленности информационной матрицы. Структура формирования матрицы и обусловленность задачи зависят от выбранного метода аппроксимации производной переменной состояния. Введено уточнение, что полученные результаты оценивания параметров нуждаются в дополнительной постфильтрации для применения в замкнутых системах управления из соображений устойчивости. Согласно полученным результатам, для большинства инженерных приложений в задачах оценивания параметров линейных и нелинейных систем могут быть рекомендованы неявные многошаговые методы. Наибольшая точность оценивания параметров апериодического звена при скользящем среднем для всего рассматриваемого участка моделирования достигалась при использовании методов Тастина и Милна для перехода в дискретное время, позволяющих получить более высокую обусловленность задачи по сравнению с другими методами.

* Статья получена 06 ноября 2024 г.

Ключевые слова: идентификация, оценивание параметров, нестационарная динамическая система, дискретная модель, многошаговые методы, малое число наблюдений, метод наименьших квадратов, гиперсфера ошибок

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач управления стационарными и нестационарными динамическими системами различной природы [1, 2] нередко возникает проблема идентификации параметров математической модели. При этом для большинства инженерных приложений наибольший практический интерес представляет именно динамическая (текущая или online-) идентификация. Характерной задачей является, например, идентификация параметров математической модели электропривода погружной установки скважинной добычи нефти, находящейся в режиме прерывистой эксплуатации. Так, при синтезе бездатчиковой системы управления электроприводом установки центробежных электронасосов (УЭЦН), замкнутой по наблюдателю состояния [3–5], необходимо учитывать, что динамическая система «длинный питающий кабель – погружной электродвигатель» является существенно нестационарной, что связано как с климатическими особенностями региона эксплуатации скважины, так и со спецификой технологического процесса добычи нефти в прерывистых режимах эксплуатации [6, 7].

Другой особенностью рассматриваемой задачи является то, что процесс динамической идентификации настраиваемой модели нестационарной динамической системы электропривода УЭЦН должен выполняться средствами цифрового сигнального процессора наземной станции управления, что накладывает ограничения на вычислительную сложность применяемых алгоритмов идентификации. Иными словами, возникает проблема оценивания параметров по малому числу измерений [8] сигналов электрических датчиков с неравномерным распределением шумов [9], в том числе импульсного характера [10].

Существует большое количество различных методов идентификации параметров динамических систем, различающихся степенью вычислительной сложности и количеством априорной информации, включая метод наименьших квадратов (МНК), марковские оценки, метод максимального правдоподобия, фильтры Колмогорова – Винера – Хопфа и т. д. [11–14]. В практических приложениях большинство методов идентификации сложны в применении, поскольку, как правило, априорная информация о характере помех отсутствует. Основным допущением при использовании этих методов является предположение, что помехи имеют аддитивный характер и нулевое математическое ожидание. Однако в случае малого числа наблюдений условие несмещенности помех не выполняется, вследствие чего возникает необходимость отказа от классических статистических предположений регрессионного анализа [15]. В связи с этим набор инструментов для решения задач идентификации в реальной инженерной практике оказывается сильно ограничен, и задача оценивания параметров моделей должна выполняться в классической МНК-постановке, не включающей априорную информацию об объекте.

Отказ от априорных статистических предположений регрессии приводит к необходимости разработки алгоритмов идентификации, основанных на методах линейной алгебры и аналитической геометрии, а не на методах матема-

тической статистики [16]. В этом случае вся неопределенность связана только с ориентацией вектора помех измерений относительно соответствующих подпространств. Поскольку процесс оценивания ведется по дискретным замерам, модель динамической системы (при известной структуре) также должна быть дискретной. Следовательно, естественным образом возникает гипотеза о том, что способ построения дискретной модели влияет на точность оценивания, поскольку методы перехода в дискретное время отличаются структурой, а значит, будут различаться характеры формирования систем нормальных уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим аperiodическое звено первого порядка (RL -цепочка):

$$\frac{di(t)}{dt} = \hat{k}_1 U(t) + \hat{k}_2 i(t), \quad (1)$$

где $i(t)$ – ток; $U(t)$ – напряжение; $\hat{k}_1 = \frac{1}{\hat{L}}$, $\hat{k}_2 = -\frac{\hat{R}}{\hat{L}}$ – оценки неизвестных параметров модели; $\hat{R}$ – оценка активного сопротивления; $\hat{L}$ – оценка индуктивности; t – время.

Требуется по данным дискретных измерений тока и напряжений выполнить оценивание параметров $\hat{k}_1$, $\hat{k}_2$ на скользящем окне просмотра.

Выражение (1) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, и его решение может быть найдено аналитически, а значит, цифровая модель, связывающая входной и выходной сигналы, может быть получена абсолютно точно (или с погрешностью округления при вычислении на ЭВМ). Однако в большинстве практических приложений модели являются нелинейными и выполнить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений, как правило, не удастся. Таким образом, переход к дискретным моделям при решении обратных задач путем аппроксимации оператора дифференцирования переменной состояния является вынужденной мерой.

При дискретизации уравнения (1) в общем виде получаем следующее разностное уравнение:

$$F_y[k] = \hat{k}_1 F_U[k] + \hat{k}_2 F_i[k], \quad (2)$$

где k – шаг дискретизации; $F_U[k]$ – функция, зависящая от дискретных измерений напряжения; $F_i[k]$ – функция, зависящая от дискретных измерений тока; $F_y[k]$ – функция левой части, не содержащей коэффициентов $\hat{k}_1$, $\hat{k}_2$.

Для исследования выберем следующие методы перехода в дискретное время (явные или неявные), различающиеся порядком точности и видом [16]:

- метод обратной разности (неявный метод Эйлера 1-го порядка):

$$\frac{i[k] - i[k-1]}{\Delta t} = \hat{k}_1 U[k] + \hat{k}_2 i[k];$$

- метод трапеций (метод Тастина 2-го порядка, неявный):

$$2 \frac{i[k] - i[k-1]}{\Delta t} = \hat{k}_1 (U[k] + U[k-1]) + \hat{k}_2 (i[k] + i[k-1]);$$

- явный метод Адамса 4-го порядка:

$$24 \frac{i[k] - i[k-1]}{\Delta t} = \hat{k}_1 (55U[k-1] - 59U[k-2] + 37U[k-3] - 9U[k-4]) + \\ + \hat{k}_2 (55i[k-1] - 59i[k-2] + 37i[k-3] - 9i[k-4]);$$

- неявный метод Адамса 4-го порядка:

$$24 \frac{i[k] - i[k-1]}{\Delta t} = \hat{k}_1 (9U[k] + 19U[k-1] - 5U[k-2] + U[k-3]) + \\ + \hat{k}_2 (9i[k] + 19i[k-1] - 5i[k-2] + i[k-3]);$$

- неявный метод Милна 4-го порядка:

$$\frac{8}{3} \frac{i[k] - i[k-3]}{\Delta t} = \hat{k}_1 (U[k] + 3U[k-1] + 3U[k-2] + U[k-3]) + \\ + \hat{k}_2 (i[k] + 3i[k-1] + 3i[k-2] + i[k-3]);$$

- неявный метод Хемминга 4-го порядка:

$$24 \frac{2i[k] - i[k-1] - i[k-3]}{\Delta t} = \hat{k}_1 (17U[k] + 51U[k-1] + 3U[k-2] + U[k-3]) + \\ + \hat{k}_2 (17i[k] + 51i[k-1] + 3i[k-2] + i[k-3]).$$

Оценивание коэффициентов будем вести методом наименьших квадратов. Для каждого из методов составляется следующая переобусловленная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричном виде:

$$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{y}, \quad (3)$$

где n – число замеров в окне просмотра;

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} F_U[k] & F_i[k] \\ F_U[k-1] & F_i[k-1] \\ \vdots & \vdots \\ F_U[k-n] & F_i[k-n] \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} F_y[k] \\ F_y[k-1] \\ \vdots \\ F_y[k-n] \end{pmatrix}.$$

Псевдорешение матричного уравнения (3) в МНК-постановке находится путем составления и решения следующей СЛАУ:

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

где T – знак транспонирования; $\mathbf{A}$ – информационная матрица (положительно определенная, симметричная), $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$; $\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.

Относительно вектора помех измерений введем следующее единственное предположение: он ограничен по норме: $\|\xi\|_2 \leq R_\xi$.

Поскольку постановка задачи изначально не гарантирует свойства эффективности и несмещенности оценок, необходимо рассмотреть закономерности формирования ошибок идентификации. На точность оценивания параметров влияет не само искажение шумами матрицы $\mathbf{X}$ и вектора $\mathbf{y}$, а изменение обусловленности задачи из-за ошибок измерения [15]. Поскольку вся неопределенность связана с ориентацией вектора ξ в пространстве, норма вектора ошибок оценивания зависит не только от нормы вектора ξ , но и от его ориентации относительно соответствующих подпространств [15].

Поставленная задача решается на малом числе наблюдений, следовательно, в общем случае полученные на каждом шаге оценки нуждаются в дополнительной постфильтрации. Предварительную оценку точности решения задачи идентификации параметров целесообразно выполнить методом скользящего среднего на всем участке моделирования, то есть вычислением средней относительной погрешности оценивания.

Для исследования точности оценивания параметров будем использовать евклидову норму вектора отклонений оценок коэффициентов от соответствующих эталонных значений (ошибок идентификации). Рассмотрим следующую формулу [15]:

$$\Delta \mathbf{k}^T \Delta \mathbf{k} = \|\Delta \mathbf{k}\|_2^2 = \|\xi\|_2^2 \sum_{i=1}^M \lambda_i^{-1} \cos^2 \psi_i, \quad (5)$$

где $\Delta \mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k}$ – вектор отклонений оценки параметров от эталонных; $\xi = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ – вектор помех в выходном сигнале $\mathbf{y}$ при эталонном $\mathbf{y}^*$; λ_i – i -е собственное значение матрицы $\mathbf{X}$; $\psi_i = \angle(\xi, \mathbf{t}_{\lambda_i})$ – угол между вектором ξ и собственным вектором $\mathbf{t}_{\lambda_i}$, определяемым по соотношению $R(\mathbf{X}) = \text{span}[\mathbf{t}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{t}_{\lambda_M}]$, где $R(\mathbf{X})$ – пространство столбцов матрицы $\mathbf{X}$, M – число столбцов матрицы $\mathbf{X}$.

Формула (5) показывает закономерности возникновения ошибок идентификации и в реальной практике не может быть использована для оценки точности процесса идентификации, так как истинное положение вектора ошибок в пространстве всегда неизвестно. Однако в модельных условиях с ее помощью возможно исследовать эффективность формирования матрицы $\mathbf{X}$ и вектора $\mathbf{b}$ при построении дискретной модели динамической системы, если вектор ξ измеренных сигналов один и тот же. Формула (5) связывает спект-

ральные характеристики матрицы $\mathbf{X}$ и положения вектора ξ относительно ее подпространства столбцов, а значит, в модельном случае на норму ошибок оценивания будет влиять только структура и внутренние свойства матрицы $\mathbf{X}$.

Евклидова норма ошибок оценивания $\|\Delta \mathbf{k}\|_2$ является, по существу, радиусом некоторой гиперболы ошибок с центром в точке истинных значений параметров $\mathbf{k}$, которые в модельных условиях всегда известны. В реальной практике вектор $\mathbf{k}$ неизвестен, однако исследование характерных радиусов гиперболы ошибок позволяет оценить эффективность построения дискретной модели при решении задачи оценивания параметров. Каждая гипербола соответствует определенному вектору $\hat{\mathbf{k}}_j$ при движении окна просмотра. Следовательно при исследовании определенного временного периода функционирования динамической системы имеет смысл рассмотреть наибольший, наименьший и средний радиусы гиперболы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рис. 1 изображены переходные характеристики тока и напряжения в апериодическом звене при подключении источника питания, начальные условия приняты нулевыми. На характеристики наложена аддитивная смесь двух групп помех: помехи, имеющие нормальное гауссово распределение, и помехи импульсного характера.

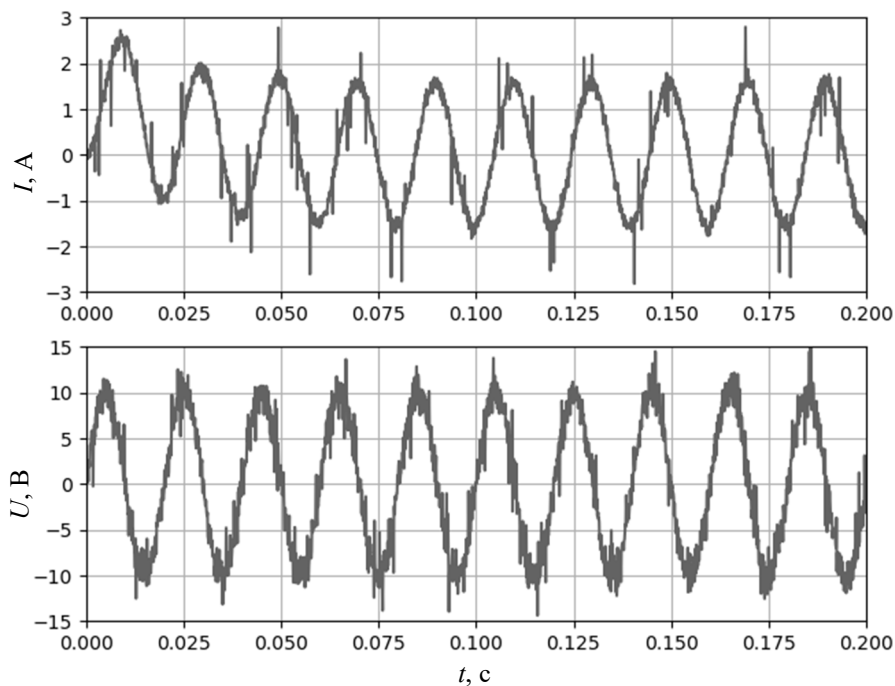


Рис. 1. Осциллограммы токов и напряжений с гауссовым распределением шумов и импульсным характером помех

Fig. 1. Oscillograms of currents and voltages with Gaussian noise distribution and pulse interference pattern

Выполним оценивание параметров $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ методом наименьших квадратов при составлении дискретной модели каждым из методов (рис. 2 и 3). Длину окна просмотра (количество точек, укладываемых в выбранный временной интервал при заданной частоте дискретизации) выберем равной половине и четверти постоянной времени $T_a = \frac{L}{R}$ (100 и 50 точек соответственно). Частота дискретизации 10 кГц. Решение СЛАУ (4) выполнялось итерационным методом [17]: при организации итерационного цикла решения СЛАУ максимальное количество итераций равнялось 1000, досрочный выход из цикла выполнялся при достижении точности 0,01. Эталонные значения параметров приняты равными $k_1 = 50, k_2 = -50$. Рисунки 2 и 3 приведены для окна просмотра длиной в четверть постоянной времени (50 точек).

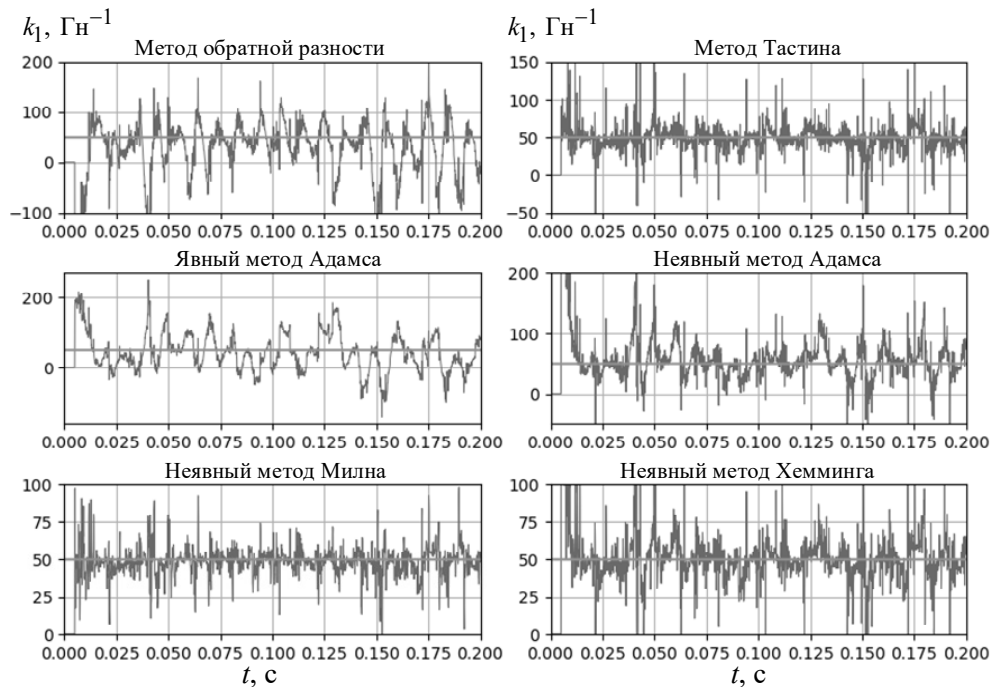


Рис. 2. Переходные характеристики оценок $\hat{k}_1$ (прямая линия – эталонное значение параметра, сигнал – оценка параметра)

Fig. 2. Transition response of estimates $\hat{k}_1$ (straight line is the reference value of the parameter, signal is the parameter estimate)

Средняя относительная погрешность оценивания при построении модели каждым из методов рассчитывалась следующим образом (при общем количестве замеров 2000):

$$\Delta_1 = \frac{\sum_{i=n}^{2000} \frac{\hat{k}_1 - k_1}{k_1}}{2000 - n}, \quad \Delta_2 = \frac{\sum_{i=n}^{2000} \frac{\hat{k}_2 - k_2}{k_2}}{2000 - n}, \quad (6)$$

где n – ширина скользящего окна просмотра.

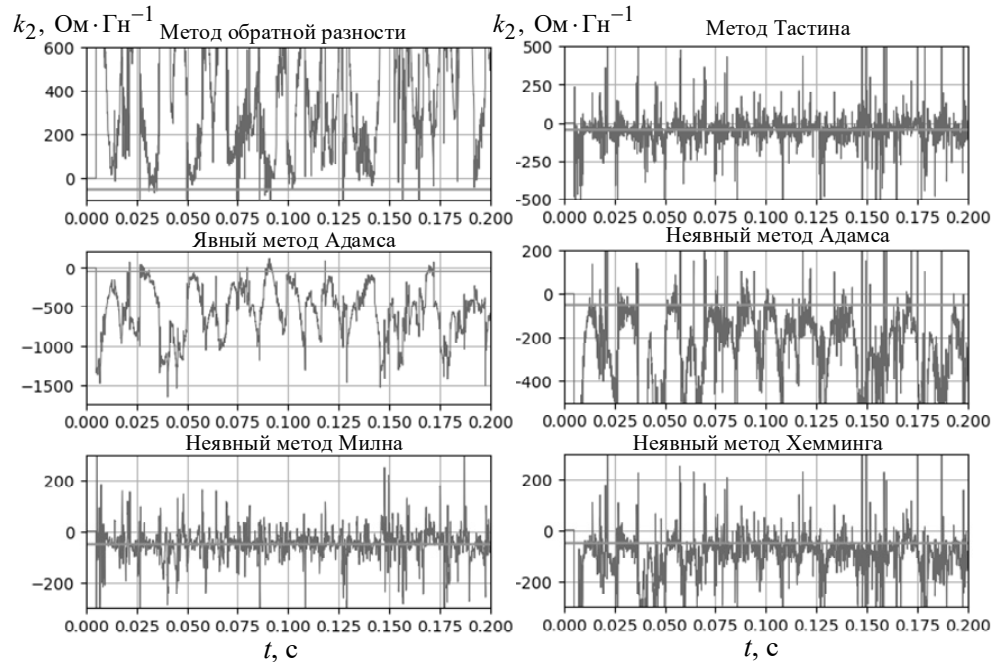


Рис. 3. Переходные характеристики оценок $\hat{k}_2$ (прямая линия – эталонное значение параметра, сигнал – оценка параметра)

Fig. 3. Transition response of estimates $\hat{k}_2$ (straight line is the reference value of the parameter, signal is the parameter estimate)

Результаты расчета относительной погрешности сведем в табл. 1.

Согласно табл. 1 наибольшая точность оценивания параметра $\hat{k}_1$ достигается при составлении дискретной модели аperiodического звена методами Тастина, Милна и Хемминга, относительная погрешность оценивания составляет менее 3 % при ширине окна просмотра в четверть постоянной времени и менее 1,5 % – при половине постоянной времени. Наибольшая погрешность оценивания характерна для метода обратной разности. Несмотря на то что для перехода в дискретное время использовались методы Адамса 4-го порядка точности, погрешность оценивания параметра $\hat{k}_1$ для этих методов выше и составляет более 10 % для $n = 50$ точек и более 5 % для $n = 100$ точек. При этом более высокая точность оценивания при увеличении окна просмотра свойственна неявному методу Адамса.

Высокая точность оценивания параметра $\hat{k}_2$ методом наименьших квадратов свойственна только при составлении дискретной модели методами Тастина и Милна. Для остальных методов погрешность оценивания составляет от 61,9 до 1089,8 %. При этом точность оценивания параметра $\hat{k}_2$ при использовании явного метода Адамса снижается даже в сравнении с методом обратной разности.

Необходимо отметить, что погрешность оценки параметров зависит от выбранного метода постфильтрации. Полученный уровень средней относительной

Таблица 1

Table 1

Сравнение погрешностей оценивания $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ для каждого из методов перехода в дискретное время

Comparison of $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ estimation errors for each of the methods of transition to discrete time

Методы	Метод обратной разности (неявный 1-го порядка)	Метод Тастина (неявный 2-го порядка)	Явный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Милна 4-го порядка	Неявный метод Хемминга 4-го порядка
$T_{\text{окна}} = \frac{1}{4} T_a$ ($n = 50$ точек)						
Относительная погрешность оценивания k_1 , %	45,5	2,1	14,1	14,4	2,6	1,4
Относительная погрешность оценивания k_2 , %	1089,8	1,6	1015,5	438,5	1,9	99,4
$T_{\text{окна}} = \frac{1}{2} T_a$ ($n = 100$ точек)						
Относительная погрешность оценивания k_1 , %	20,3	1,3	9,5	5,6	0,6	0,4
Относительная погрешность оценивания k_2 , %	649,2	1,4	940	270,1	2,2	61,9

погрешности за время моделирования фактически обусловлен результатом пост-фильтрации методом скользящего среднего на всем участке, за исключением длины первого окна просмотра. В рамках настоящей работы скользящее среднее выбрано для расчета математического ожидания полученных оценок, погрешность оценивания в этом случае является относительным смещением оценки.

3. ПОСТРОЕНИЕ ГИПЕРСФЕР ОШИБОК

Гиперсферы ошибок оценивания при построении дискретных моделей каждым из методов для ширины окна просмотра $n = 50$ точек изображены на рис. 4–6. Движение рабочей точки метода обусловлено смещением окна просмотра в течение всего времени функционирования динамической системы. Поскольку размерность пространства коэффициентов при оценивании параметров апериодического звена равна двум $\hat{\mathbf{k}} \in R^2$, гиперсферы ошибок имеют радиус $\left\| \begin{pmatrix} \hat{k}_1 - k_1 \\ \hat{k}_2 - k_2 \end{pmatrix} \right\|_2$.

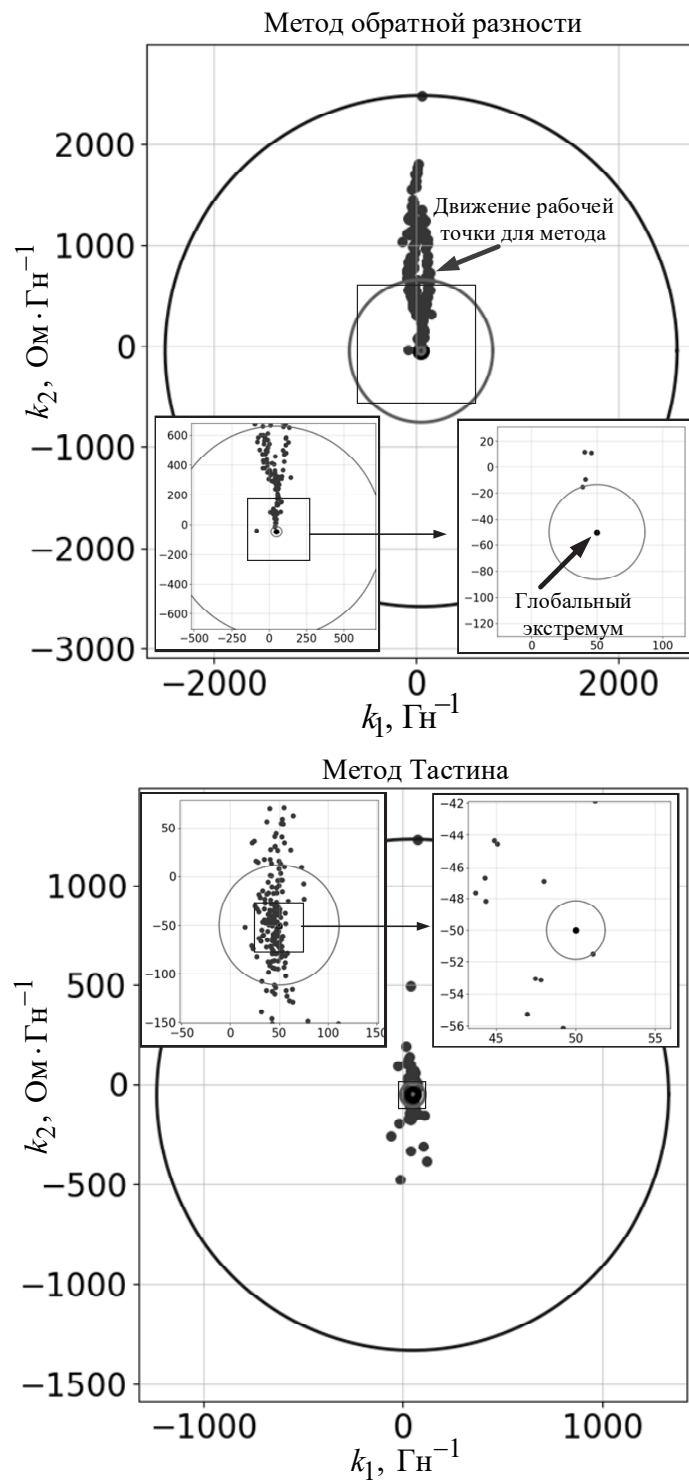


Рис. 4. Гиперсферы ошибок метода обратной разности и метода Тастина

Fig. 4. Error hyperspheres of the backward difference method and Tustin's method

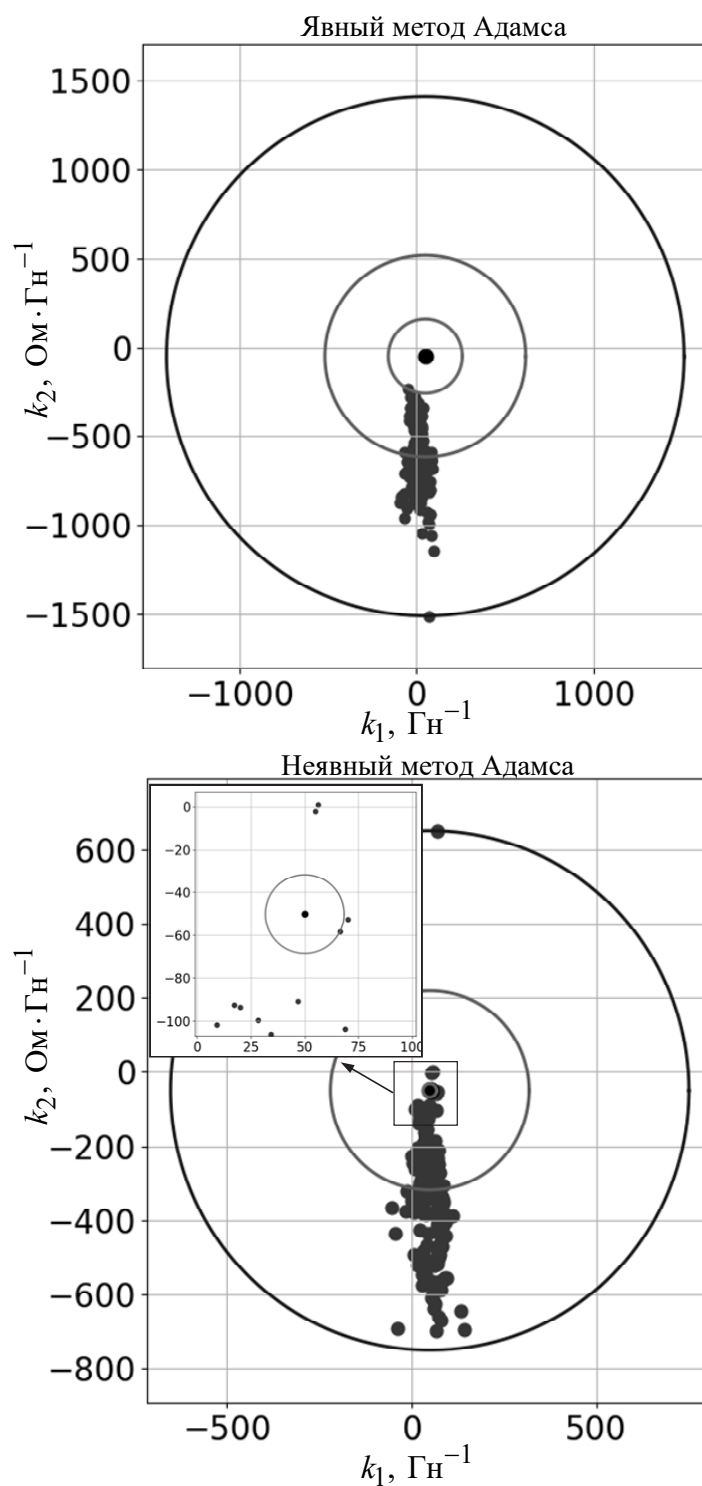


Рис. 5. Гиперсферы ошибок явного и неявного методов Адамса

Fig. 5. Error hyperspheres of Adams's explicit and implicit methods

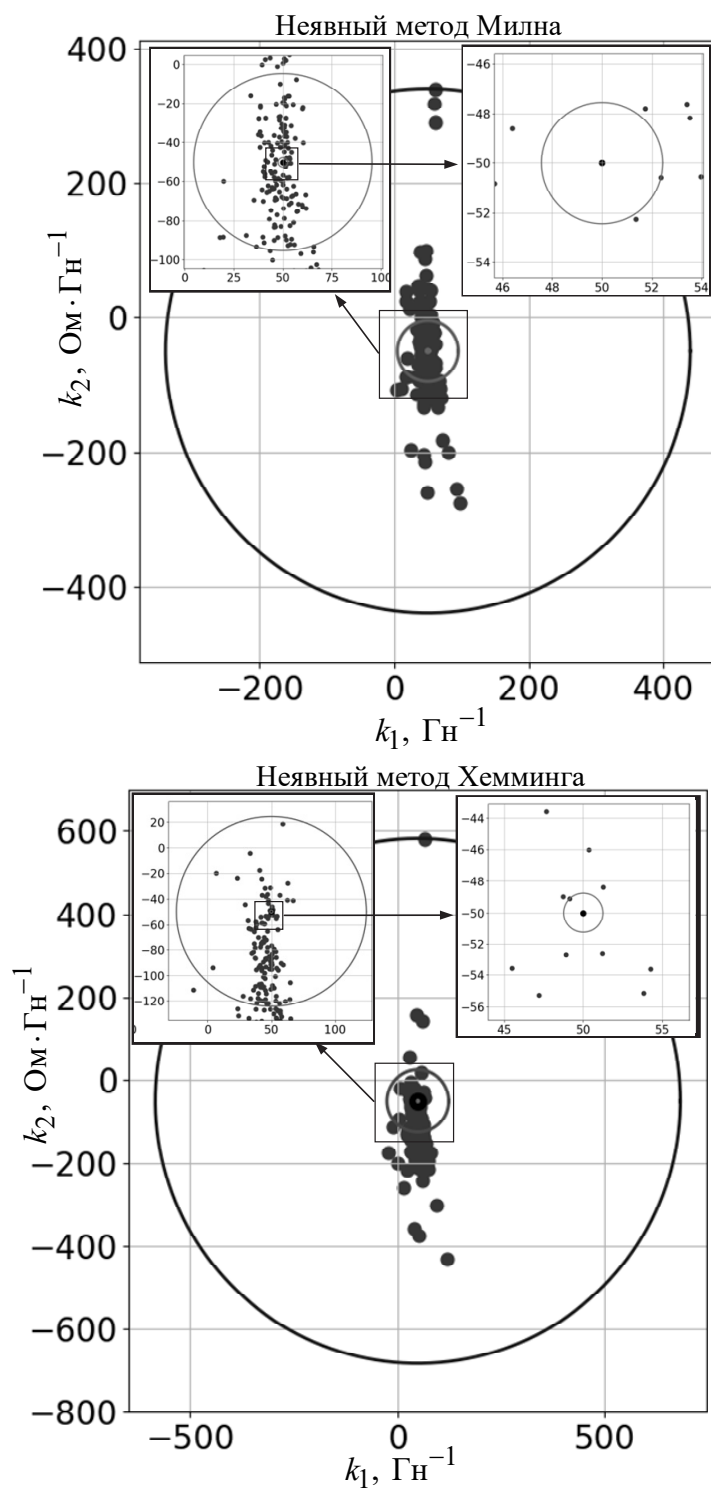


Рис. 6. Гиперсферы ошибок неявных методов Милна и Хемминга
 Fig. 6. Error hyperspheres of the Milne and Hamming implicit methods

Наибольший, наименьший и средний радиусы рассчитывались соответственно по формулам:

$$R_{\max} = \left\| \left(\hat{k}_{1\max} - k_1, \hat{k}_{2\max} - k_2 \right)^T \right\|_2, \quad (7)$$

$$R_{\min} = \left\| \left(\hat{k}_{1\min} - k_1, \hat{k}_{2\min} - k_2 \right)^T \right\|_2, \quad (8)$$

$$R_{\text{cp}} = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, \quad (9)$$

где $\hat{k}_{\max}$, $\hat{k}_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее отклонение оценки параметра $\hat{k}$.

Для рис. 4–6 принят общий принцип построения трех концентрических гипербсфер ошибок и движения рабочей точки метода и точки глобального экстремума в центре гипербсфер, показанный на рис. 6 для метода обратной разности.

Таблица 2

Table 2

Сравнение радиусов гипербсфер ошибок для каждого из методов перехода в дискретное время

Comparison of the error hypersphere radii for each of the discrete time transition methods

Методы	Метод обратной разности (неявный 1-го порядка)	Метод Тастина (неявный 2-го порядка)	Явный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Милна 4-го порядка	Неявный метод Хемминга 4-го порядка
Минимальный радиус $R_{\min}$	36,6	1,8	208,8	18,3	2,4	1,2
Средний радиус R_{cp}	708,9	61,6	566,3	268,7	45,4	74,5
Максимальный радиус $R_{\max}$	2530	1281	1459	700,8	389,9	632,6

Анализ рис. 2–6 также показал, что относительное смещение оценки параметра $\hat{k}_2$ выше, чем параметра $\hat{k}_1$, при составлении дискретной модели апериодического звена каждым из методов. При этом для метода обратной разности и методов Адамса характерно смещение оценки параметра $\hat{k}_1$ в область

отрицательных значений, что противоречит физическому смыслу параметра. Смещение параметра $\hat{k}_2$ в область положительных значений в большей степени характерно для метода обратной разности и метода Тастина.

В контексте представленной работы задача оценивания коэффициентов является частным случаем более широкой проблемы идентификации параметров настраиваемых математических моделей. Смещение оценок параметров в отрицательную область значений в замкнутой системе управления может привести к потере ее устойчивости. Полученные оценки нуждаются в дополнительном процессе постфильтрации, например, на основе алгоритмов цифровой прогнозирующей фильтрации [18].

Наименьшие минимальный и средний радиусы гиперболы ошибок (см. табл. 2) были получены при составлении дискретной модели методами Тастина и Милна. Наибольшие радиусы гиперболы ошибок возникают при использовании явного метода Адамса, а также метода обратной разности.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МНК-ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ПЕРЕХОДА В ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ

Для нормы вектора ошибок оценивания при $\xi \in R(X)$ известна следующая оценка [15, 19]:

$$\lambda_{\max}^{-1} (X^T X) R_{\xi}^2 \leq \|\Delta k\|_2^2 \leq \lambda_{\min}^{-1} (X^T X) R_{\xi}^2, \quad (10)$$

где $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения информационной матрицы $A = X^T X$.

Из формулы (6) следует, что собственные числа информационной матрицы $A = X^T X$ должны быть как можно больше для уменьшения ошибки оценивания. Рассмотрим следующие индикаторы при решении МНК-задачи для каждого из методов дискретизации: наименьшее собственное значение, определитель и число обусловленности $\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ информационной матрицы A [20] при $n = 50$. Поскольку первые два индикатора зависят от масштаба, выполним предварительную нормировку информационной матрицы:

$$\bar{A} = \left(\frac{A}{\text{trace}(A)} \right), \quad (11)$$

где $\bar{A}$ – нормированная по собственному следу матрица A .

Результаты расчетов сведем в табл. 3.

Полученные в табл. 3 соотношения между индикаторами для каждого из методов коррелируют с соотношениями между относительными погрешностями оценивания (см. табл. 1) и радиусами гипербол (см. табл. 2). Чем выше точность решения МНК-задачи, тем больше значения наименьшего собственного числа и определителя информационной матрицы, число обусловленности при этом меньше.

Таблица 3

Table 3

Сравнение средних значений индикаторов обусловленности для каждого из методов перехода в дискретное время

Comparison of average values of conditionality indicators for each of the methods of transition to discrete time

Методы	Метод обратной разности (неявный 1-го порядка)	Метод Тастина (неявный 2-го порядка)	Явный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Адамса 4-го порядка	Неявный метод Милна 4-го порядка	Неявный метод Хемминга 4-го порядка
$\lambda_{\min}(\bar{A})$	$29,21 \cdot 10^{-3}$	$29,33 \cdot 10^{-3}$	$27,65 \cdot 10^{-3}$	$29,25 \cdot 10^{-3}$	$29,36 \cdot 10^{-3}$	$29,31 \cdot 10^{-3}$
$\det(\bar{A})$	$27,33 \cdot 10^{-3}$	$27,40 \cdot 10^{-3}$	$26,39 \cdot 10^{-3}$	$27,36 \cdot 10^{-3}$	$27,41 \cdot 10^{-3}$	$27,38 \cdot 10^{-3}$
$\text{cond}(\bar{A})$	33,22	33,08	35,14	33,17	33,04	33,1

Однако необходимо отметить, что разница между степенью обусловленности задачи для каждого из методов невелика. Кроме показателей обусловленности информационной матрицы, в работе остались нерассмотренными и другие методы проверки информативности данных, такие как показатель парной сопряженности или показатель диагонального преобладания [15], заслуживающие отдельного исследования.

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что точность оценивания параметров апериодического звена не зависит напрямую от порядка метода перехода в дискретное время и связана с обусловленностью задачи при составлении матрицы X , а значит, с внутренней структурой самого многошагового метода. Наибольшая точность оценивания параметров при проведении вычислительного эксперимента достигалась в случае использования методов Тастина, Милна и Хемминга при составлении дискретной модели (а значит, и матрицы X). Особенностью этих методов по сравнению с явными и неявными методами Адамса является отсутствие обратных знаков в рекуррентной формуле методов перед функциями правой части.

ВЫВОДЫ

1. Для большинства инженерных приложений количество инструментов для решения задачи идентификации и оценивания параметров остается сильно ограниченным. Как правило, априорная информация о динамической системе отсутствует, что приводит к необходимости рассматривать задачу не из статистических предпосылок, а из соображений обусловленности поставленной задачи как таковой. При постановке задачи оценивания параметров классическим методом наименьших квадратов возникает проблема поиска подсистемы, наиболее свободной от шума.

2. Точность оценивания параметров динамической системы зависит от обусловленности задачи и информационной матрицы $A = X^T X$. При этом составление матрицы X переобусловленной нормальной СЛАУ МНК-задачи для одной и той же динамической системы различается для разных методов перехода в дискретное время. Анализ свойств обусловленности задачи идентификации параметров дискретных моделей в МНК-постановке в общем виде представляет собой достаточно сложную задачу и требует отдельного исследования. Однако полученные результаты показывают, что выбор метода перехода в дискретное время для решения обратных задач является самостоятельной проблемой.

3. Для большинства инженерных задач могут быть рекомендованы методы Тастина и Милна. Также заслуживают внимания методы Хемминга и не рассмотренный в настоящей работе метод Ингланда, обладающий тем же свойством, что и методы Тастина и Милна. При этом точность идентификации с применением неявных методов выше, чем с использованием явных.

4. Полученные результаты могут быть использованы при решении задачи идентификации линейных динамических систем (например, систем электропривода постоянного тока при использовании дополнительных алгоритмов постфильтрации полученных оценок). Кроме того, дополнительного исследования требуют вопросы оценивания параметров нелинейных нестационарных систем, таких как системы электропривода установок погружных центробежных электронасосов, модель динамической системы которых включает звенья редуцированной математической модели длинного кабеля и погружного синхронного (асинхронного) электродвигателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632 с.
2. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 4. – С. 27–41.
3. Разработка наблюдателя угловой скорости ротора и момента сопротивления на валу регулируемого синхронного двигателя с постоянными магнитами, питающегося через длинный кабель / А.С. Глазырин, Е.И. Попов, В.А. Копырин, С.С. Попов, Е.В. Боловин, В.З. Ковалев, Р.Н. Хамитов, В.В. Тимошкин // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2024. – Т. 335, № 11. – С. 237–257. – DOI: 10.18799/24131830/2024/11/4879.
4. Разработка наблюдателя с оперативным мониторингом угловой скорости ротора и момента сопротивления на валу погружного асинхронного двигателя / А.С. Глазырин, С.С. Попов, Е.И. Попов, В.А. Копырин, Р.Н. Хамитов, А.А. Филипас, В.В. Тимошкин, Е.А. Беляускене, Ю.О. Кулеш, Е.В. Боловин, В.З. Ковалев, М.В. Денек // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2024. – Т. 335, № 9. – С. 203–219. – DOI: 10.18799/24131830/2024/9/4826.
5. Патент № 2825800 Российская Федерация, СПК Н02Р 21/18 Н02Р 25/022. Устройство получения сигнала оценки частоты вращения ротора и сигнала оценки момента сопротивления на валу синхронного электродвигателя с постоянными магнитами: № 2024102836: заявл. 06.02.2024; опубл. 29.08.2024 / Глазырин А.С., Боловин Е.В., Кладиев С.Н., Копырин В.А., Ковалев В.З., Филипас А.А., Тимошкин В.В., Архипова О.В., Попов С.С., Попов Е.И., Набунский И.А., Кузнецов М.С., Раков И.В.; патентообладатель Национальный исследовательский Томский политехнический университет.
6. Уразаков К.Р., Рукин М.В., Борисов А.О. Моделирование тепловых процессов в погружном двигателе электроцентробежного насоса, работающего в периодическом режиме // Известия

Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2023. – Т. 334, № 4. – С. 62–71. – DOI: 10.18799/24131830/2023/4/3959.

7. Надежность погружных нефтяных насосов при периодической эксплуатации / Е.А. Лихачёва, В.Г. Островский, Н.А. Лыкова, А.Н. Мусинский, П.А. Байдаров // ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. – 2021. – Т. 6, № 1. – С. 54–58. – DOI: 10.51890/2587-7399-2021-6-1-54-58.

8. Фурсов В.А. Идентификация моделей систем формирования изображений по малому числу наблюдений: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.16 / Институт систем обработки изображений Российской академии наук. – Самара, 1999. – 284 с.

9. Гребенюк К.А. Основные виды шумов в электронных полупроводниковых приборах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. – 2012. – Т. 12, № 1. – С. 63–65. – DOI: 10.18500/1817-3020-2012-12-1-63-65.

10. Козлова Л.Е. Разработка нейросетевого наблюдателя угловой скорости ротора в электроприводе по схеме ТРН-АД: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.03 / Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск, 2016. – 144 с.

11. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 681 с.

12. Pollock D.S.G. Wiener-Kolmogorov filtering, frequency-selective filtering, and polynomial regression // *Econometric Theory*. – 2007. – Vol. 23 (1). – P. 71–88. – DOI: 10.1017/S026646660707003X.

13. Васюков В.Н. Общая теория связи. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 580 с.

14. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1958. – 334 с.

15. Фурсов В.А. Идентификация систем по малому числу наблюдений. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 81 с.

16. Пантелеев А.В., Якимов Ф.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 376 с.

17. Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей. – Томск: Томский государственный университет, 2007. – 208 с.

18. Боловин Е.В. Разработка алгебраических методов идентификации параметров асинхронных двигателей на основе дискретных моделей: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.03, 05.09.01 / Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск, 2018. – 271 с.

19. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.

20. Фурсов В.А., Гошин Е.В. Адаптивная идентификация по малому числу наблюдений с контролем обусловленности // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16–19 июня 2014. – М., 2014. – С. 2720–2727.

Попов Евгений Игоревич, аспирант кафедры кибернетических систем, ассистент кафедры электроэнергетики Тюменского индустриального университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование и машинное обучение в системах электропривода. Имеет более 30 печатных работ. E-mail: popovei72@mail.ru

Глазырин Александр Савельевич, доктор технических наук, профессор отделения электроэнергетики и электротехники Инженерной школы энергетики Национального исследовательского Томского политехнического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, мониторинг, диагностика и идентификация погружных электродвигателей установок центробежных электронасосов. Имеет более 120 печатных работ и учебных пособий. E-mail: asglazyrin@tpu.ru

Копырин Владимир Анатольевич, кандидат технических наук, и. о. заведующего кафедры кибернетических систем Тюменского индустриального университета. Основное направление научных исследований – искусственные нейронные сети, математическое моделирование, машины реального времени, цифровые двойники электропривода. Имеет более 110 печатных работ и учебных пособий. E-mail: kopyrinva@mail.com

Popov Evgeny I., postgraduate student, assistant lecturer, Industrial University of Tyumen. His research interests are currently focused on mathematical modelling and machine learning in electric drives systems. He has more than 30 publications. E-mail: popovei72@mail.ru

Glazyrin Alexander S., D. Sc., professor, National Research Tomsk Polytechnic University. His research interests include mathematical modeling, monitoring, diagnostics, identification, observers, electric centrifugal pump installations, and submersible electric motors. He has more than 120 publications and teaching manuals. E-mail: asglazyrin@tpu.ru

Kopyrin Vladimir A., PhD (Eng.), associate professor, Industrial University of Tyumen. His research interests include neural networks, mathematical modeling, real-time machines, automatic control system, and digital counterparts of the electric drive. He has more than 110 publications and teaching manuals. E-mail: kopyrinva@mail.com

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-85-104

The influence of discretization methods on the conditionality of the information matrix and the nature of the formation of error hyperspheres in problems of parameter estimation based on a small number of observations*

E.I. POPOV^{1,a}, A.S. GLAZYRIN^{2,b}, V.A. KOPYRIN^{1,c}

¹ *Industrial University of Tyumen, 38 Volodarsky Street, Tyumen, 625000, Russian Federation*

² *National Research Tomsk Polytechnic University, 30 Lenin Street, Tomsk, 634050, Russian Federation*

^a *popov72@mail.ru* ^b *asglazyrin@tpu.ru* ^c *kopyrinva@gmail.com*

Abstract

The paper considers the issues of application of discrete models of dynamic systems based on multi-step methods for identification and parameter estimation problems based on a small number of observations using the example of a first-order aperiodic unit. The problem of identification of parameters of dynamic systems is relevant in control problems of stationary and non-stationary dynamic systems, for example, in sensorless control systems of synchronous or asynchronous electric drives of submersible centrifugal electric pumps operating in intermittent operation mode. The problem of parameter estimation was solved in the classical formulation of the least squares method without taking into account a priori information about the nature of noise in the measuring channels. It was shown that the accuracy of parameter estimation depends not only on the norm of the interference vector, but also on its orientation relative to the column space of the information matrix, as well as on the condition number of the information matrix. The matrix formation structure and the problem conditionality depend on the selected approximation method of the state variable derivative. It has been clarified that the obtained parameter estimation results require additional post-filtering for use in closed-loop control systems for reasons of stability. According to the obtained results, implicit multi-step methods can be recommended for most engineering applications in the problems of estimating the parameters of linear and nonlinear systems. The highest accuracy of estimating the parameters of the aperiodic link in terms of the moving average for the entire considered section of the simulation was achieved using the Tustin and Milne methods for transition to discrete time, which allowed for a higher degree of conditionality of the problem compared to other methods.

Keywords: identification, parameter estimation, dynamic system, discrete model, multi-step methods, small number of observations, least squares method, error hypersphere

* Received 06 November 2024.

REFERENCES

1. Pupkov K.A., Egupov N.D., eds. *Nestatsionarnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya: analiz, sintez i optimizatsiya* [Non-stationary automatic control systems: analysis, synthesis and optimization]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007. 632 p.
2. Kalman R.E. Identification of noisy systems. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40 (4), pp. 25–42. Translated from *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1985, vol. 40, no. 4, pp. 27–41.
3. Glazyrin A.S., Popov E.I., Kopyrin V.A., Popov S.S., Bolovin E.V., Kovalev V.Z., Khamitov R.N., Timoshkin V.V. Development of an observer of rotor angular velocity and resistance moment on the shaft of an adjustable permanent magnet synchronous motor powered through long cable. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov = Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2024, vol. 335, no. 11, pp. 237–257. DOI: 10.18799/24131830/2024/11/4879.
4. Glazyrin A.S., Popov S.S., Popov E.I., Kopyrin V.A., Khamitov R.N., Filipas A.A., Timoshkin V.V., Beliauskene E.A., Kulesh Yu.O., Bolovin E.V., Kovalev V.Z., Deneko M.V. Desing of an observer with real time monitoring speed and load torque for submersible induction motors. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov = Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2024, vol. 335, no. 9, pp. 203–219. DOI: 10.18799/24131830/2024/9/4826.
5. Glazyrin A.S., Bolovin E.V., Kladiev S.N., Kopyrin V.A., Kovalev V.Z., Filipas A.A., Timoshkin V.V., Arkhipova O.V., Popov S.S., Popov E.I., Nabunskii I.A., Kuznetsov M.S., Rakov I.V. *Ustroystvo polucheniya signala otsenki chastoty vrashcheniya rotora i signala otsenki momenta soprotivleniya na valu sinkhronnogo elektrodvigatelya s postoyannymi magnitami* [Device for obtaining rotor speed estimation signal and signal for estimating moment of resistance on shaft of synchronous electric motor with permanent magnets]. Patent RF, no. 2825800, 2024.
6. Urazakov K.R., Rukin M.V., Borisov A.O. Modelirovanie teplovykh protsessov v pogruzhnom dvigatele elektrosentrobezhnogo nasosa, rabotayushchego v periodicheskom rezhime [Simulation of thermal processes in a submersible motor of an electric centrifugal pump operating in a periodic mode]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov = Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2023, vol. 334, no. 4, pp. 62–71. DOI: 10.18799/24131830/2023/4/3959.
7. Likhacheva E.A., Ostrovskiy V.G., Lykova N.A., Musinskiy A.N., Baidarov P.A. Nadezhnost' pogruzhnykh neftyanykh nasosov pri periodicheskoi ekspluatatsii [Oil submersible pumps reliability during cyclic operation]. *PRONEFT". Professional'no o nef'ti = PROneft. Professionally about oil*, 2021, vol. 6 (1), pp. 54–58. DOI: 10.51890/2587-7399-2021-6-1-54-58.
8. Fursov V.A. *Identifikatsiya modelei sistem formirovaniya izobrazhenii po malomu chislu nablyudenii*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Identification of imaging system models from a small number of observations. Dr. eng. sci. diss.]. Samara, 1999. 284 p.
9. Grebenyuk K.A. Osnovnye vidy shumov v elektronnykh poluprovodnikovyykh priborakh [Main types of noises in electronic semiconductor devices]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Fizika = Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 63–65. DOI: 10.18500/1817-3020-2012-12-1-63-65.
10. Kozlova L.E. *Razrabotka neirosetevogo nablyudatelya uglovoi skorosti rotora v elektroprivode po skheme TRN-AD*. Diss. kand. tekhn. nauk [Development of the neural network observer of the angular velocity of the rotor in the electric drive according to the thyristor voltage regulator-asynchronous motor scheme. PhD eng. sci. diss.]. Tomsk, 2016. 144 p.
11. Eykhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya. Otsenivanie parametrov i sostoyaniya* [Systems identification. Parameter and state Estimation]. Moscow, Mir Publ., 1975. 681 p. (In Russian).
12. Pollock D.S.G. Wiener-Kolmogorov filtering, frequency-selective filtering, and polynomial regression. *Econometric Theory*, 2007, vol. 23 (1), pp. 71–88. DOI: 10.1017/S026646660707003X.
13. Vasyukov V.N. *Obshchaya teoriya svyazi* [General Theory of Communication]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2017. 580 p.
14. Linnik Yu.V. *Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy matematiko-statisticheskoi teorii obrabotki nablyudenii* [The method of least squares and the basics of the theory of processing observations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 334 p.
15. Fursov V.A. *Identifikatsiya sistem po malomu chislu nablyudenii* [Identification of systems with a small number of observations]. Samara, SSAU Publ., 2007. 81 p.

16. Panteleev A.V., Yakimova F.S., Bosov A.V. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya v primerakh i zadachakh* [Ordinary differential equations in examples and problems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 376 p.
17. Kuksenko S.P., Gazizov T.R. *Iteratsionnye metody resheniya sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii s plotnoi matritsei* [Iterative methods for solving a system of linear algebraic equations with a dense matrix]. Tomsk, Tomsk State University Publ., 2007. 208 p.
18. Bolovin E.V. *Razrabotka algebraicheskikh metodov identifikatsii parametrov asinkhronnykh dvigatelei na osnove diskretnykh modelei*. Diss. kand. tekhn. nauk [Development of algebraic methods for identifying parameters of asynchronous motors based on discrete models. PhD eng. sci. diss.]. Tomsk, 2018. 271 p.
19. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. 5th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p.
20. Fursov V.A., Goshin E.V. [Adaptive identification by a small number of observations with conditionality control]. *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014* [XII All-Russian Conference on the Problems of Management of the VSPU], Moscow, 16–19 June, 2014, pp. 2720–2727. (In Russian).

Для цитирования:

Попов Е.И., Глазырин А.С., Копырин В.А. Влияние методов дискретизации на обусловленность информационной матрицы и характер формирования гиперсфер ошибок в задачах оценивания параметров по малому числу наблюдений // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 1 (97). – С. 85–104. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-85-104.

For citation:

Popov E.I., Glazyrin A.S., Kopyrin V.A. Vliyanie metodov diskretizatsii na obuslovlennost' informatsionnoi matritsy i kharakter formirovaniya gipersfer oshibok v zadachakh otsenivaniya parametrov po malomu chislu nablyudenii [The influence of discretization methods on the conditionality of the information matrix and the nature of the formation of error hyperspheres in problems of parameter estimation based on a small number of observations]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2025, no. 1 (97), pp. 85–104. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-1-85-104.