

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.115

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-25-44

Перечисление ритмических фигур четырёхстопного ямба*

Ю.Д. ГРИГОРЬЕВ^{1,а}, В.Ю. ЩЕКОЛДИН^{2,б}

¹ 197376, РФ, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет (НГТУ-НЭТИ)

^а yuri_grigoriev@mail.ru ^б raix@mail.ru

Рассматривается задача ритмической характеристики четырёхстопного ямба, поставленная А. Белым. Разработан алгоритм перечисления всех вариантов ямба в четверостишии. В его основу положен принцип классификации объектов, принятый в задачах математической лингвистики и математической биологии. В качестве основного инструмента классификации использованы три варианта полных отношений эквивалентности (равенство, одинаковость, конгруэнтность). Отношение равенства используется для разбиения анализируемого корпуса строф на классы с равным числом пиррихий. Отношение одинаковости разбивает эти классы на подклассы строф с одинаковой системой отступлений от полноударности. Отношение конгруэнтности сопоставляет этим подклассам совокупности ритмических вариантов, называемых орбитами. Благодаря этому удастся перечислить все те возможные варианты строф, которые могут и не встретиться в конкретном корпусе стихотворений, подвергнувшись анализу.

Для того чтобы охватить всё многообразие ритмических вариантов в стихотворении, А. Белый предложил особую графическую систему, в основе совершенно правильную, но в итоге лишь подвергшуюся критике со стороны современников, не предложивших, в свою очередь, в этом направлении ничего нового. В настоящей работе для продолжения идей А. Белого привлекается инструмент задачи об ожерельях. В результате не только перечисляются все ритмические фигуры четырёхстопного ямба, связанные с пропусками ударений, но и открывается возможность устранить недостаток графического метода, заключающийся в невозможности учитывать отягчения неударных слогов (добавочные ударения). Для этого достаточно от двухцветных ожерелий перейти к трехцветным.

Кроме того, на основе предложенного подхода среди всего корпуса строф выделены так называемые симметричные строфы. Показано, что примерно две трети предложенных А. Белым ритмических фигур соответствуют симметричным строфам. Для перечисления симметричных строф использованы методы теории разбиений и теории линейных диофантовых уравнений.

* Статья получена 17 марта 2025 г.

Для анализа всех вариантов ямба использован корпус стихов А. Блока, включающий циклы «Стихи о Прекрасной Даме» и «Ямбы» и отдельные стихотворения из других циклов.

Ключевые слова: ритмическая структура, пиррихий, четырехстопный ямб, отношение, строфа, ожерелье, лемма Бернсайда, симметрия

ВВЕДЕНИЕ

Стихосложение и анализ поэзии на любом языке всегда представляли собой сложную комбинацию искусства, науки и лингвистического мастерства. Метрическая структура стихов имеет первостепенное значение и интерес для исследователей русской поэзии. Русская просодия не так четко следует определенной системе классификации стихов с точки зрения их метра, как, скажем, санскритская [1], но и здесь существуют определенные возможности для ее реализации. Такая классификация позволяет пролить свет на метрические предпочтения поэта, создать базу знаний о различных размерах, используемых в конкретных соображениях стихов, поэмах, периодах творчества поэтов и т. д. Помимо этого, открываются и другие полезные для исследователя возможности.

Задача исследования ритма в стихосложении весьма актуальна, но во всей своей полноте вряд ли имеет всеобъемлющее решение. Тем не менее некоторые конкретные размеры и ритмические структуры в них представляют особый интерес. К их числу относится, например, четырехстопный ямб (далее – 4-ст. ямб). С одной стороны, это очень распространенная форма, а с другой, если ограничиться еще и конкретным размером строфы, скажем, четверостишием, то формализация закономерностей ритма в такой строфе не встречает принципиальных затруднений с вычислительной точки зрения.

Теорией ритма, начиная с Ломоносова [2], занимались и занимаются многие исследователи. Не будем их перечислять, отметим лишь А. Белого [3], работа которого служит отправной точкой для данной статьи, а также Баевского [4], Жирмунского [5] и Красноперову [6], на работы которых мы непосредственно ссылаемся.

Нас будут интересовать не специфические особенности поэтики русского ямба, а формальная сторона его закономерностей, описываемая в терминах бинарных отношений, которые являются важным инструментом для решения задач математической лингвистики [7]. Этому сравнительно мало обсуждаемому аспекту теории стихосложения применительно к 4-ст. ямбу посвящена эта работа.

1. ЧЕТЫРЕХСТОПНЫЙ ЯМБ

В отмеченной выше работе 1739 года Ломоносов пишет: «... неправильными и вольными стихами те называю, в которых вместо ямба или хорea можно пиррихии положить». Уже давно это положение не имеет силы, и вместо полноударного ямба или наряду с ним сегодня используется огромное число его ритмических вариантов, связанных с пропусками ударений на сильных позициях.

Ограничим нашу задачу исследования ритмических вариантов ямба, не сводя ее к исследованию творчества отдельных поэтов или решению некоторой задачи сугубо математической лингвистики. Выбранные нами строфы

А. Блока носят чисто иллюстративный характер. На их основе лишь демонстрируется предлагаемый метод систематизации и классификации ритмических структур ямба.

Для реализации этой цели привлекаются иерархический принцип построения классификационных систем, а в качестве сопровождающего его математического аппарата – сравнительно простые сведения из дискретной математики, в том числе связанные с задачей об ожерельях, с теориями разбиений и линейными диофантовыми уравнениями.

1.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В стопной теории стихосложения пиррихии принято обозначать через $\cup\cup$, а ударные стопы – через $\cup-$. По ситуации будем использовать как равнозначные алфавит $A = \{0, 1\}$ и алфавит $B = \{\cup-, \cup\cup\}$.

Источником порождения ритма в стихосложении является наличие в составе языке различных типов ритменных слов [6]. Анализ стихотворной практики показывает, что, как минимум, существуют три типа ритмических слов, частотность которых в языке и, соответственно, использование которых влияет на частоту появления пиррихий в ритмической структуре стиха или строфы в целом. Типами таких слов являются: 1) *короткие слова* – не создают пропусков ударения на сильном месте строки ($\cup-\cup$: отрада, –: дань и т. п.); 2) *длинные слова*: а) с длинным началом – создают пропуск своей предударной частью ($\cup\cup-\cup$: колесница и т. п.); б) с длинным концом – создают пропуск своей заударной частью ($\cup-\cup\cup$: изволила и т. п.). Под самим же ритмом А. Белый понимал всякого рода отклонения в строгом чередовании ударных и безударных слогов, присущих тому или иному метру.

В 4-ст. ямбе существует $N = 2^3 = 8$ ритмических форм. За ними закрепилась стандартная римская нумерация [4, с. 110]. Они представлены в табл. 1 (4-я стопа и обозначения ударных стоп опущены).

Таблица 1

Table 1

Ритмические формы четырехстопного ямба

Rhythmic forms of iambic tetrameter

Ритмическая форма				Примеры строф [8]
I	–	–	–	«И краток путь средь долгой ночи...»
II	$\cup\cup$	–	–	«Он приклонил с вниманьем ухо...»
III	–	$\cup\cup$	–	«Смотри – я отступаю в тень...»
IV	–	–	$\cup\cup$	«Мне битва сердце веселит...»
V	–	$\cup\cup$	$\cup\cup$	«Все сущее – увековечить...»
VI	$\cup\cup$	–	$\cup\cup$	«Над человеческим созданием...»
VII	$\cup\cup$	$\cup\cup$	–	Нет примеров
VIII	$\cup\cup$	$\cup\cup$	$\cup\cup$	Нет примеров

Формы VII и VIII крайне вычурны и встречаются очень редко. Ограничиваясь первыми шестью, применительно к четверостишию получаем $N = 6^4 = 1296$ ритмических структур строфы. Далее для краткости вместо римских цифр для нумерации форм будем использовать арабские, помещая запись строфы в квадратные скобки (скажем, вместо [IV, II, IV, I] будем писать [4241]).

Понятно, что среди 1296 структур [хузи] есть просто невозможные с точки зрения просодии русского языка, но всё равно количество вариантов остается слишком большим, необходимо каким-то образом систематизировать механический перебор вариантов ритма, сведя его к разумному минимуму.

1.2. ОЖЕРЕЛЬЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РИТМА

Четвертая стопа в 4-ст. ямбе всегда ударная. Опустим ее. В результате остаются 12 стоп, пропуски ударений на сильных позициях (иктах) которых определяют ритмическую структуру строфы. Примем соглашение, что за последней стопой строфы следует первая. Такую последовательность стоп длиной n (в нашем случае $n = 12$) назовем $(r, n-r)$ -ожерельем $x = (a_1, \dots, a_n)$ из n бусин a_i двух цветов. Один цвет отводится *пиррихиям*, т. е. безударным стопам (обозначим их через 1), а другой цвет $(n-r)$ – оставшимся бусинам (ударным стопам, обозначим их через 0). Таким образом, всякое ожерелье представляет собой мультимножество

$$x = [c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_r^{\alpha_r}], \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n,$$

где $c_i \in \{0, 1\}$ – цвета бусин над алфавитом $\mathfrak{X} = \{0, 1\}$.

С каждым ожерельем $x = [c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_r^{\alpha_r}]$ свяжем неориентированный помеченный граф $\Gamma = (V, E)$, где $n = |V|$ – число его вершин, из которых r имеют цвет 1, $n-r$ – цвет 0. Следовательно, Γ – двусвязный граф. Будем считать, что все вершины $v \in V$ его компонент связности имеют степень $\deg v = 2$, т. е. являются r - и $(n-r)$ -циклами соответственно. Графу Γ , связанному с $(r, n-r)$ -ожерельем, сопоставим его *геометрическую реализацию* $\sigma = K(V, E)$, называемую σ -фигурой. Последняя представляет собой объединение двух выпуклых многоугольников X_r и X_{n-r} , не имеющих общих вершин, которые совпадают с вершинами правильного n -угольника X_n . Очевидно, что в силу взаимной дополнительности циклов X_r и X_{n-r} в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением лишь одного из них (скажем, X_r). Конфигурацию пиррихий непосредственно в ритмополе строфы А. Белый называет *фигурой* [3]. Каждой из них мы сопоставляем множество S соответствующих σ -фигур X_r .

Пусть T – множество ожерелий. Вводя на T и S дискретные топологии $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$, получаем два равномоощных дискретных топологических пространства $(T, \mathcal{T})$ и $(S, \mathcal{S})$. Эти пространства гомеоморфны, т. е. между ними существует биективное соответствие, при котором оба обратных отображения,

определяемые этим соответствием, непрерывны. Это означает, что нет необходимости рассматривать в качестве σ -фигур именно многоугольники X_r . Этот способ взаимно-однозначного соответствия между фигурами в T и S наиболее нагляден в геометрическом отношении и позволяет привлекать к рассмотрению элементы теории симметрии [9, 10].

Пример 1. Рассмотрим одну из строф А. Блока [8, с. 24].

Таблица 2

Table 2

Пример формализации ритмической фигуры строфы
An example of formalization of the rhythmic figure of a stanza

Строфа [4414]	Ритмическая структура, алфавит A				Алфавит B		
Я вышел. Медленно сходили	У–	У–	УУ	У–	0	0	1
На землю сумерки зимы	У–	У–	УУ	У–	0	0	1
Минувших дней молодые были	У–	У–	У–	У–	0	0	0
Пришли доверчиво из тьмы	У–	У–	УУ	У–	0	0	1

В результате приходим к модели строфы, представленной (3, 9)-ожерельем, где $r = 3$ – число бусин цвета 1, $n-r$ – число бусин цвета 0, $n = 12 = 3 + 9$ – длина ожерелья. Осуществляя конкатенацию строк, получаем ожерелье

$$x = 001\,001\,000\,001 = 0^210^210^51 = 0^510^210^21. \quad (1)$$

В мультииндексной записи ожерелий типа (1) будем опускать квадратные скобки и с помощью циклических сдвигов приводить x к каноническому виду со старшим множителем 0^s , где s – максимальная степень.

1.3. ТИПЫ И ОДИНАКОВОСТЬ РИТМИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Введем необходимые понятия. Множество T всех четверостиший будем называть *несущим множеством*. В качестве T выберем строфы стихотворений А. Блока из циклов «Стихи о Прекрасной Даме» и «Ямбы», а также отдельные его стихотворения из других циклов. Ритмической схемой $R = \langle T; v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ назовем множество T с заданными на нем отношениями $v_0, v_1, \dots, v_k$ [7, с. 199]. Отношение v – это пара множеств $\langle \Phi, T \rangle$, $\Phi \subseteq T \times T$, такая, что если $(x, y) \in \Phi$, то $xv y$. Другими словами, отношение v выделяет в несущем множестве T такое подмножество Φ , что любые ожерелья $x, y \in \Phi$ находятся в отношении v .

Пусть $T_r \subseteq T \times T$ – множество таких пар ожерелий (x, y) , что между их компонентами имеет место отношение «ожерелья x и y имеют одно и то же число пиррихий, равное r », которое можно кратко записать в виде $v_r = \langle T_r, T \rangle$.

Предположим, что отношения $v_0, v_1, \dots, v_k$ обладают свойствами (a) $v_i \cap v_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и (b) отношение $v = v_0 \cup v_1 \cup \dots \cup v_k$ является *полным* [7, с. 18]. Тогда $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_k = T$ и $T_r \cap T_s = \emptyset$ для $r \neq s$. Таким образом, множества T_r – это части разбиения $\{T_r\}_{r=0}^k$ или, в другой форме записи, $T_r = T / v_r$ – это фактор-множества множества T по отношениям v_r [7, с. 51, 59].

С любым разбиением $\{T_r\}_{r=0}^k$ всегда связано отношение A к T : имеет место отношение xAy , если $x, y \in T_r$ для некоторого r . Это отношение является отношением эквивалентности, соответствующим данному разбиению, т. е. все элементы $x \in T_r$ эквивалентны, и поэтому в качестве представителя всякой части T_r может быть выбран эталонный элемент. Другими словами, эталон $x_i \in T_r$ – это такой элемент, для которого при любом $y \in T_r$ по определению, выполнено соотношение x_iAy .

Выполним первый шаг классификации ритмических структур. Пусть $|T| = 250$ – заданное количество строф А. Блока, выбранных для исследования. В нашем случае отношение v оказывается полным при $k = 6$, а мощности частей T_r разбиения $\{T_r\}_{r=0}^6$ оказываются следующими (табл. 3).

Таблица 3

Table 3

Мощность частей T_r фактор-множества множества T по отношению v

Cardinal numbers for parts T_r , quotient set of T with relation to v

Мощность частей $T_r = T / v_r$	Тип строфы (число пиррихий), r							$ T $
	0	1	2	3	4	5	6	
$ T_r $	1	10	45	83	79	27	5	250

Полноударный ямб $r = 0$ встречается один раз («И краток путь среди долгой ночи...»). Значения $r \geq 7$ в отобранных для анализа строфах отсутствуют. Остаются случаи $r = 1, \dots, 6$. По определению в каждом классе T_r содержатся строфы с одним и тем же числом пиррихий. Поэтому каждая часть может быть исследована отдельно. Эталонном каждого типа строф T_r будем считать строфу $x \in T_r$ с наименьшим номером в T из числа принадлежащих T_r .

Перейдем ко второму шагу классификации ритмических структур. Рассмотрим ритмическую схему $R = \langle T_r; \mu \rangle$, где μ – полное «отношение одинаковости» $\mu = \mu_0 \cup \dots \cup \mu_{m_r}$. Под *одинаковостью* понимаем совпадение строф в том смысле, что при $x\mu_i y$ пропуски ударений в обеих строфах имеют место на одних и тех же иктах. Тогда элементами фактор-множеств $Q_r = T_r / \mu$ будут классы C_i , состоящие из строф с идентичной ритмической структурой, т. е. с одной и той же фигурой А. Блока или σ -фигурой. Принадлежность строф

x и y классу C_i означает, что для них выполнено соотношение одинаковости $\chi_{i,y}$, и никакое другое [7, с. 205]. Фактор-множества Q_r представлены в табл. 4.

Таблица 4

Table 4

Элементы фактор-множества Q_r для полного отношения одинаковости

Elements of the quotient set Q_r for the complete sameness relation

r	Классы	$m_r = Q_r $
0	C_{179}	1
1	$C_{20}, C_{36}, C_{65}, C_{116}, C_{184}$	5
2	$C_4, C_{21}, C_{31}, C_{35}, C_{38}, C_{52}, C_{54}, C_{58}, C_{62}, C_{76}, C_{86}, C_{87}, C_{112}, C_{133}, C_{134}, C_{161}, C_{198}, C_{203}, C_{220}, C_{233}, C_{238}$	21
3	$C_1, C_3, C_6, C_8, C_9, C_{26}, C_{28}, C_{32}, C_{33}, C_{40}, C_{48}, C_{53}, C_{55}, C_{61}, C_{64}, C_{79}, C_{80}, C_{83}, C_{84}, C_{88}, C_{90}, C_{96}, C_{102}, C_{107}, C_{111}, C_{117}, C_{119}, C_{141}, C_{146}, C_{165}, C_{166}, C_{169}, C_{178}, C_{180}, C_{192}, C_{194}, C_{196}, C_{204}, C_{206}, C_{212}, C_{213}, C_{221}, C_{222}, C_{228}, C_{236}, C_{237}, C_{239}$	48
4	$C_2, C_5, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{16}, C_{22}, C_{25}, C_{27}, C_{29}, C_{30}, C_{39}, C_{47}, C_{50}, C_{56}, C_{57}, C_{60}, C_{66}, C_{67}, C_{68}, C_{70}, C_{73}, C_{94}, C_{95}, C_{99}, C_{101}, C_{103}, C_{110}, C_{114}, C_{115}, C_{128}, C_{152}, C_{158}, C_{167}, C_{168}, C_{189}, C_{195}, C_{197}, C_{201}, C_{205}, C_{209}, C_{210}, C_{224}, C_{232}, C_{248}$	48
5	$C_7, C_{15}, C_{18}, C_{23}, C_{71}, C_{104}, C_{106}, C_{121}, C_{172}, C_{181}, C_{200}, C_{202}, C_{208}$	13
6	$C_{44}, C_{59}, C_{105}, C_{176}, C_{191}$	5
Всего		141

1.4. РИТМИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ А. БЕЛОГО

Для изучения ритма А. Белый впервые попытался представить «...реальное многообразие ритмических вариантов русского ямба» [5, с. 35], сопоставляя каждому из них некоторую геометрическую фигуру. Тем не менее, как отмечает Баевский [4, с. 144], «...наблюдения и размышления А. Белого при всей их новаторской сущности производят впечатление хаотичности. Видимо, понимая это, А. Белый не пошел дальше, а перешел от графического подхода к численным исследованиям». Это мнение лингвиста. Тем не менее в рассуждения А. Белого можно внести некоторый порядок.

Предлагаемый в работе подход развивает идею А. Белого о фигурах на основе алгебраических результатов, которых в его время еще не было. В результате целенаправленного перебора перечисляются все существующие варианты ритма 4-ст. ямба, с привлечением принципов известных классификаций в естественных науках и задачи об ожерельях.

Перечисленные фигуры А. Белый считает основными, другие – производными от них, как, например, «Малый угол плюс крыша [236]». Некоторые фигуры он упоминает, но не приводит. Это «Корзина малая», «Малый треугольник», «Большая корзина», «Косой угол». В общей сложности А. Белый говорит о 43 ритмических фигурах.

Таблица 5

Table 5

Ритмические фигуры А. Белого [3]

A. Bely's rhythmic figures [3]

Название	Фигура	Название	Фигура
1. Малый угол	[232], [323]	7. Крест	[636]
2. Острый угол	[424], [242]	8. Ромб	[363]
3. Квадрат	[66]	9. Фигура Z	[3423]
4. Прямоугольник	[46], [64], [26], [62]	10. Трапеция	[65], [656]
5. Прямая крыша	[36]	11. Параллелограмм	[462], [264]
6. Опрокинутая крыша	[63]	12. Лестница	[6666]

Перечислить все фигуры несложно, хотя вряд ли нужно. Важно, чтобы они имели концептуальный смысл, могли характеризовать какие-то стиховедческие свойства и могли трактоваться специалистами как единицы, играющие важную роль в формировании стихотворного ритма. Не вникая в эту специфическую область, приведем графические представления некоторых из перечисленных фигур (табл. 6), дополнив их фигурами, встретившимися нам в стихах А. Блока при анализе фактор-множества $Q = T / v$. Эти фигуры помечены знаком «*».

Таблица 6

Table 6

Фигуры А. Белого, [хузи] – ритмические фигуры строк

Figures by A. Bely, [хузи] – rhythmic figures of stanzas

Малый угол [2321]	Острый угол [4241]	Квадрат [6611]	Прямоугольник [4611]
Прямая крыша [3611]	Опр. крыша [6311]	Угол+крыша [2361]	Крест [6361]
Ромб [3631]	Фигура Z [3423]	Трапеция [6511]	Параллелограмм [4621]
Лестница [6666]	Крыша 1* [3161]	Крыша 2* [3116]	Вертикаль* [4444]

Среди 141 эталонного номера классов в табл. 4 отсутствуют 109 номеров строф, вошедших в те или иные классы. Зная их, можем оценить, какие ритмические фигуры А. Белого интуитивно предпочитал А. Блок, и одновременно увидеть частоту появления тех или иных ритмических структур. Среди них, безусловно, встретятся фигуры, хорошо известные специалистам, но, возможно, внимание привлекут и некоторые фигуры, пока остающиеся в тени и еще не получившие лингвистической оценки.

Пример 2. Рассмотрим пример, подчеркивающий значимость ритмоформы IV.

Таблица 7

Table 7

Значимость ритмоформы IV (обозначена как 4)

Importance of rhythmform IV (denoted as 4)

$C_k \in Q_3$	Строфы	Ритмоформы	$ C_k $
C_1	1, 74, 78, 149, 150, 156, 240	[4414]	7
C_{26}	26, 41, 49, 51, 77, 124, 131, 160, 162, 190	[1444]	10
C_{33}	33, 91, 129, 144	[4441]	4
C_{40}	40, 108, 164	[4144]	3
Всего строф			24
$C_k \in Q_4$	Строфы	Ритмоформы	$ C_k $
C_2	2, 19, 241	[4434]	3
C_5	5, 126, 244	[1464]	3
C_{12}	12, 43, 142, 151	[4614]	4
C_{14}	14, 46, 98	[1644]	3
C_{57}	57, 69, 75, 82, 97, 147, 163, 187, 199, 219, 249	[4444]	11
C_{99}	99, 100, 120	[3444]	3
Всего строф			27

В табл. 7 представлены классы, характеризующие частое появление формы IV. Особо выделяются эталонные строфы x_{26} = «И этот лес, сомкнутый тесно...» (класс C_{26}) и x_{57} = «Тогда, в спасительном забвеньи...» (класс C_{57}).

2. КОНГРУЭНТНОСТЬ И СИММЕТРИЯ ОЖЕРЕЛИЙ

В силу полноты отношения ν классы Q_r содержат одинаковые ожерелья m_r видов. Разделение их на отдельные группы достигается с помощью отношения конгруэнтности. Это разделение определяет третий шаг классификации строф.

2.1. ОТНОШЕНИЕ КОНГРУЭНТНОСТИ

Определим на множествах типов ожерелий Q_r отношение конгруэнтности $\cong$. Как и в предыдущих случаях, оно является отношением эквивалентности и определяется следующим образом: «Две плоские фигуры x и y связаны отношением конгруэнтности, если они могут быть совмещены при некотором

изометрическом преобразовании (параллельных сдвигах, вращениях и их суперпозициях». Поскольку действие на множестве Q_r циклической группы $\mathbb{Z}_{12}$ эквивалентно поворотам σ -фигур на углы, кратные $2\pi/n = \pi/6$, то это приводит к распределению по классам эквивалентности элементов Q_r , называемых *орбитами*. Орбиты O_i – это элементы (классы конгруэнтности) фактор-множества $\text{Orb}_r = Q_r / \cong$.

Перечисление орбит, по которым распределяются 250 строф А. Блока, является нашей непосредственной целью, однако вместе с этим отчасти решается и более общая задача перечисления *всех* орбит $(r, 12-r)$ -ожерелий. Дело в том, что если задача подсчета числа орбит $N_{\text{Orb}}(r)$ для $(r, n-r)$ -ожерелий в комбинаторной теории перечисления решается с помощью леммы Бернсайда, то универсального алгоритма перечисления самих орбит, т. е. явного указания их представителей, не существует.

С помощью рассматриваемых строф А. Блока задача перечисления орбит полностью решается при $r = 3, 4$ (случаи $r = 0, 1, 2$ тривиальны). Поскольку $|T_5| = 27$, $|T_6| = 5$, то в этих случаях имеющихся строф для перечисления всех орбит недостаточно.

Теорема 1. *Количество орбит ожерелий для $r = 0, 1, \dots, 6$ равно представленному в табл. 8.*

Таблица 8

Table 8

Количество орбит $(r, n-r)$ -ожерелий
The number of orbits for $(r, n-r)$ -necklaces

Тип строфы, r	0	1	2	3	4	5	6
Количество орбит, $N_{\text{Orb}}(r)$	1	1	6	19	43	66	80

Доказательство. При $r = 0$ имеем полноударную строфу, т. е. $(0, 12)$ -ожерелье. Ему отвечает разбиение вида $12 = 12 + 0$ или, в обозначениях теории разбиений, $(12, 0) \vdash 12$. Покажем, что $N_{\text{Orb}}(0) = 1$.

Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \vdash n$ – разбиение числа n , $N(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – количество орбит, соответствующих $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ -ожерельям. Согласно лемме Бернсайда, для циклической группы $\mathbb{Z}_n$ имеем [11, с. 19]:

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \frac{1}{|\mathbb{Z}_n|} \sum_{d \mid n, \text{GCD}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = d} \varphi(d) P_{n/d}(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (2)$$

где GCD – НОД частей $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\varphi(x)$ – функция Эйлера, $P_{n/d}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – полиномиальный коэффициент. Поскольку $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 0$, то $\text{GCD}(12, 0) = 12$, $d \in D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ и $\forall d \in D$ верно

$$P_{12/d}(12, 0) = \frac{\left(\frac{12}{d}\right)!}{\left(\frac{0}{d}\right)! \left(\frac{12}{d}\right)!} = 1.$$

Отсюда, используя (2) и известное равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, получаем

$$N_{Orb}(0) = N(12, 0) = \frac{1}{12} \sum_{d|12} \varphi(d) = 1.$$

Остальные случаи $r \geq 1$ в табл. 8 доказываются аналогично. $\square$

2.2. НЕПОЛНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И КОРТЕЖИ

Вернемся к ритмике 4-ст. ямба. Метризуем несущее множество T . Между всякими вершинами a и b правильного n -угольника X_n как неориентированного связного (n, n) -графа с вершинами степени $\deg X_n = 2$ существует простая цепь $S(a, b)$. Длина этой цепи – неотрицательное целое число. Однако в n -цикле, каковым является X_n , таких цепей, связывающих a и b , две. Наименьшая из длин этих цепей называется расстоянием $d(a, b)$ между a и b . Полагая $d(a, a) = 0$, заключаем, что $d(a, b)$ является метрикой [12, с. 42].

Все замкнутые цепи, т. е. циклы, соответствующие ожерельям, будем задавать упорядоченным списком длин $K = \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle$ (кортежем) их звеньев. Таким образом, r -угольники, заданные кортежем K , позволяют однозначно восстановить ожерелья в виде мультимножеств. Например, для ожерелья (1) можем записать

$$x = 0^5 10^2 10^2 1 = [4414] = \langle 633 \rangle.$$

Сам по себе список длин не является *полным инвариантом* ожерелья. Одному списку длин может соответствовать несколько неконгруэнтных ожерелий, изоморфных как графы. Примером *неполного инварианта* является, например, известный *индекс Винера* [13]. Это топологический инвариант неориентированного графа Γ , определяемый как сумма длин кратчайших путей $d(v_i, v_j)$ между вершинами $v_i, v_j \in V$ графа Γ :

$$W(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} i h_i(\Gamma),$$

где $h_i(\Gamma)$ – число ребер графа Γ длиной $i = d(u, v)$. Учитывая, что всякое ожерелье x – это граф Γ , представляющий собой простой цикл, заключаем, что $W(x)$ совпадает с периметром фигуры. Поэтому $W(x) = 12$. Для произвольных графов индекс Винера можно вычислить, используя алгоритм Флойда – Уоршела [14]. Пример полного инварианта в близкой по постановке задаче восстановления выпуклого многогранника в R^3 по длинам его ребер приводится в [15].

А. Блок в своей работе ставил задачей перечислить возможные ритмические фигуры ямба, возникающие в четверостишии, заранее не зная, сколько их вообще существует, а понятие симметрии не упоминал вообще. Теперь, даже не обращаясь к самим стихам, благодаря лемме Бернсайда мы заранее знаем, сколько существует различных ритмических структур ямба, но пока не знаем их перечень.

2.3. СИММЕТРИЧНЫЕ ОЖЕРЕЛЬЯ

Среди всех $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ -ожерелий особый интерес представляют симметричные ожерелья. Метризуем множество T . Пусть D_n – группа диэдра, действующая на T ; $d(x, y)$ – расстояние Хэмминга между $x, y \in T$. Для любых q -ичных алфавитов ожерелье $x \in T$ называется *симметричным*, если существует такой отличный от единицы e элемент $g \in D_n$, что $d(gx, x) = 0$. Другими словами, ожерелье x симметрично, если после его отражения относительно некоторой оси и конечного числа циклических сдвигов оно совпадает с исходным.

Пусть T – множество ожерелий над алфавитом A . Два ожерелья $x, y \in T$ называются *сопряженными*, если при биективном отображении $\varphi: 0 \rightarrow 1$ и конечном числе циклических сдвигов χ (вращений в плоскости R^2) они переводятся друг в друга. В стереохимии о молекулах, образующих подобную пару в R^2 , говорят, что они обладают *хиральной* симметрией, а сами молекулы называют *энантиомерами*. Например, ожерелье $x = 0^2 1 0 1^2 0 1$ является симметричным, поскольку

$$x = 0^2 1 0 1^2 0 1 \xrightarrow{\varphi} 1^2 0 1 0^2 1 0 \xrightarrow{\chi} 0^2 1 0 1^2 0 1,$$

а ожерелья $x = 0^2 1^2 0 1 0 1$ и $y = 1 0^2 1 0 1 0 1$ являются сопряженными, поскольку

$$x = 0^2 1^2 0 1 0 1 \xrightarrow{\varphi} 1^2 0^2 1 0 1 0 \xrightarrow{\chi} 1 0^2 1 0 1 0 1 = y.$$

Симметричные ожерелья играют большую роль в стиховедении, поскольку вся поэзия пронизана симметрией (симметрия твердых форм, симметрия ритма и т. д.). Задача подсчета и перечисления симметричных ожерелий не имеет универсального решения и в каждом случае требует отдельного подхода [9].

2.4. ОРБИТЫ

Последовательно рассмотрим фактор-множества $Orb_r = Q_r / \cong$, элементами которых являются орбиты. Орбиты предоставляют всю информацию о существующих ритмоформах 4-ст. ямба, они дают их перечень. На каждой орбите располагается по 12 ритмоформ.

Фактор-множество $Orb_2 = Q_2 / \cong$. Поскольку при $r = 2$ все $(2, n - 2)$ -ожерелья симметричны, то для любой длины n количество симметричных ожерелий будет равно $N_{sym} = [n / 2]$. В нашем случае их 6 (табл. 9). Поскольку строфы определяются тремя стопами, то для задания орбиты достаточно указать исходную и две последующие ритмоформы, возникающие после двух сдвигов исходной. Далее эта тройка структур трижды повторяется, будучи всякий раз циклически сдвинутой на одну позицию. В результате получаем 12 ритмических форм, представляющих данную орбиту.

Таблица 9

Table 9

Фактор множества $Orb_r = Q_r / \cong$, $r = 2, 3$, (Q_{2i-1}, Q_{2i}) – сопряженные ожерелья

Quotient sets $Orb_r = Q_r / \cong$, $r = 2, 3$, (Q_{2i-1}, Q_{2i}) are conjugate necklaces

Орбиты O_i фактор-множества $Orb_2 = Q_2 / \cong$					
O_{2i-1}	Классы	Кортеж	O_{2i}	Классы	Кортеж
1	$C_4, C_{21}, C_{31}, C_{52}, C_{76}, C_{220}, C_{238}$	$\langle 33 \rangle$	4	$C_{54}, C_{86}, C_{31}, C_{233}$	$\langle 55 \rangle$
2	C_{35}, C_{62}	$\langle 66 \rangle$	5	$C_{58}, C_{87}, C_{133}, C_{134}$	$\langle 22 \rangle$
3	C_{38}	$\langle 11 \rangle$	6	$C_{112}, C_{161}, C_{198}, C_{203}$	$\langle 44 \rangle$
Орбиты O_i фактор-множества $Orb_2 = Q_2 / \cong$					
1	C_6, C_{166}	$\langle 321 \rangle$	2	C_{107}, C_{146}	$\langle 312 \rangle$
3	$C_{28}, C_{169}, C_{180}, C_{222}$	$\langle 431 \rangle$	4	C_{221}	$\langle 413 \rangle$
5	$C_3, C_{55}, C_{141}, C_{206}, C_{213}$	$\langle 532 \rangle$	6	$C_{83}, C_{84}, C_{117}, C_{196}$	$\langle 523 \rangle$
7	$C_8, C_{79}, C_{90}, C_{207}, C_{239}$	$\langle 543 \rangle$	8	C_{53}, C_{192}, C_{194}	$\langle 534 \rangle$
9	C_{237}	$\langle 541 \rangle$	10	C_{178}	–
11	C_{32}, C_{61}, C_{228}	–	12	C_9	–
13	C_{88}, C_{212}	–	14	C_{64}, C_{80}, C_{96}	–
Симметричные ожерелья					
1	–	–	4	$C_{102}, C_{111}, C_{236}$	–
2	C_{48}, C_{119}, C_{165}	–	5	–	–
3	$C_1, C_{26}, C_{33}, C_{40}, C_{204}$	–		–	–

Подсчет ожерелий в классах показывает, что орбите O_1 принадлежат 19 строф (суммарная мощность принадлежащих ей классов), орбите O_2 – 8 строф, орбите O_3 – 2 строфы, орбите O_4 – 4 строфы, орбите O_5 – 7 строф, орбите O_6 – 5 строф. В итоге получаем $|T_2| = 45$ строф.

Таблица 10

Table 10

Фактор-множества $Orb_r = Q_r / \cong$, $r = 4, 5, 6$, (Q_{2i-1}, Q_{2i}) – сопряженные ожерелья

Quotient sets $Orb_r = Q_r / \cong$, $r = 4, 5, 6$, (Q_{2i-1}, Q_{2i}) are conjugate necklaces

Орбиты O_i фактор-множества $Orb_4 = Q_4 / \cong$					
O_{2i-1}	Классы	Кортеж	O_{2i}	Классы	Кортеж
1	–	$\langle 4112 \rangle$	2	–	$\langle 4211 \rangle$
3	C_{110}	$\langle 5122 \rangle$	4	–	$\langle 5221 \rangle$
5	–	$\langle 5311 \rangle$	6	–	$\langle 5113 \rangle$
7	C_5, C_{30}, C_{68}	$\langle 6123 \rangle$	8	–	$\langle 6321 \rangle$

Окончание табл. 10

End of the Tab. 10

Орбиты O_i фактор-множества $Orb_4 = Q_4 / \cong$					
O_{2i-1}	Классы	Кортеж	O_{2i}	Классы	Кортеж
9	C_{60}	$\langle 6231 \rangle$	10	C_{167}	$\langle 6132 \rangle$
11	$C_{12}, C_{70}, C_{73}, C_{168}$	$\langle 6312 \rangle$	12	—	$\langle 6213 \rangle$
13	—	$\langle 6411 \rangle$	14	—	$\langle 6114 \rangle$
15	C_{10}, C_{47}, C_{67}	$\langle 5241 \rangle$	16	—	$\langle 5142 \rangle$
17	$C_{11}, C_{13}, C_{101}, C_{115}$	$\langle 5331 \rangle$	18	C_{16}, C_{114}	$\langle 5133 \rangle$
19	C_{27}	$\langle 5322 \rangle$	20	C_{232}	$\langle 5223 \rangle$
21	C_{95}	$\langle 5124 \rangle$	22	—	$\langle 5421 \rangle$
23	C_{229}	$\langle 5412 \rangle$	24	—	$\langle 5214 \rangle$
25	$C_2, C_{39}, C_{99}, C_{195}$	$\langle 4332 \rangle$	26	C_{14}, C_{103}, C_{152}	$\langle 4233 \rangle$
27	C_{25}	$\langle 4413 \rangle$	28	C_{50}	$\langle 4314 \rangle$
Симметричные ожерелья					
1	—	$\langle 3111 \rangle$	9	—	$\langle 5115 \rangle$
2	—	$\langle 4124 \rangle$	10	$C_{158}, C_{189}, C_{210}$	$\langle 5232 \rangle$
3	C_1, C_{26}	$\langle 5212 \rangle$	11	—	$\langle 3414 \rangle$
4	—	$\langle 5151 \rangle$	12	C_{56}, C_{197}	$\langle 4323 \rangle$
5	—	$\langle 6141 \rangle$	13	C_{94}	$\langle 4242 \rangle$
6	C_1, C_{26}, C_{33}	$\langle 6222 \rangle$	14	C_{128}	$\langle 4224 \rangle$
7	C_1	$\langle 5313 \rangle$	15	C_{57}	$\langle 3333 \rangle$
8	C_1, C_{26}	$\langle 5151 \rangle$			
Орбиты O_i фактор-множества $Orb_5 = Q_5 / \cong$					
1	C_7, C_{23}, C_{71}	$\langle 33312 \rangle$	2	C_{15}	$\langle 33321 \rangle$
3	C_{18}	$\langle 61212 \rangle$	4	—	$\langle 61221 \rangle$
5	$C_{104}, C_{106}, C_{202}$	$\langle 33132 \rangle$	6	C_{121}	$\langle 33123 \rangle$
7	C_{172}, C_{200}	$\langle 53121 \rangle$	8	—	$\langle 53121 \rangle$
9	C_{181}	$\langle 42132 \rangle$	10	—	$\langle 42123 \rangle$
Симметричные ожерелья					
1	C_{208}	$\langle 22422 \rangle$			
Орбиты O_i фактор-множества $Orb_6 = Q_6 / \cong$					
1	$C_{44} = \{44\}$	$\langle 124212 \rangle$	2	$C_{105} = \{105\}$	$\langle 322212 \rangle$
3	$C_{59} = \{59\}$	$\langle 312312 \rangle$	4	$C_{176} = \{176\}$	$\langle 331212 \rangle$
Симметричные ожерелья					
1	$C_{191} = \{191\}$	$\langle 121215 \rangle$		—	

Фактор-множество $Orb_3 = Q_3 / \cong$. Согласно лемме Бернсайда существует $|Orb_3| = 19$ орбит (3, 9)-ожерелий (см. табл. 8). Среди них 5 являются симметричными, а остальные 14 образуют 7 пар попарно сопряженных ожерелий (табл. 9). Они разбиты на пары (Orb_{2i-1}, Orb_{2i}) , $i = 1, \dots, 7$. Это удастся сделать в силу того, что на каждой из орбит оказались строфы А. Блока.

В то же время среди 250 строф А. Блока не встретилось симметричных ожерелий с кортежами $K = 211, 444$, что отражено прочерками в табл. 9.

Фактор-множество $Orb_4 = Q_4 / \cong$. В табл. 10 представлены 43 орбиты O_i , часть из которых отмечена прочерками. Среди этих орбит 14 пар несимметричных и 15 симметричных ожерелий. Несимметричные ожерелья удастся перечислить благодаря наличию соответствующих строф А. Блока.

Фактор-множество $Orb_5 = Q_5 / \cong$. Согласно лемме Бернсайда всего имеется $|Orb_5| = 66$ орбит, включая симметричные. С помощью имеющихся в нашем распоряжении $|T_5| = 27$ строф удастся перечислить 10 несимметричных ожерелий (5 пар) и одно симметричное, их общее количество станет известно ниже (см. табл. 10). Единственное симметричное ожерелье «Над человеческим созданием...» из цикла «Ямбы» содержится в классе C_{208} .

Фактор-множество $Orb_6 = Q_6 / \cong$. Аналогично предыдущим случаям всего существует $|Orb_6| = 80$ орбит, включая симметричные, при этом в нашем распоряжении имеется $|T_6| = 5$ строф. Фактор-множество $Orb_6 = Q_6 / \nu$ совпадает с T_6 , т. е. строфы множества T_6 не объединяются в классы фактор-множества Q_6 и, будучи одноэлементными, сами представляют 5 орбит. Окончательный результат представлен в табл. 10.

2.5. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ОЖЕРЕЛИЙ

Для отыскания симметричных ожерелий желательно знать, сколько существует разбиений $p_k(n)$ числа $n = 12$ на k слагаемых. Как и $p(n)$, величина $p_k(n)$ не имеет аналитического выражения, но ее можно вычислить рекуррентно. При начальном условии $\forall n \geq 1: p_1(n) = 1$ для $\forall n \geq k \geq 2$ имеет место соотношение

$$p_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k, k+1; \\ 2, & n = k+2; \\ p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1) & n \geq k+3. \end{cases} \quad (3)$$

Остальные элементы верхней треугольной матрицы $P_{kn} = p_k(n)$ равны нулю. В частности, нам понадобятся следующие значения:

$$p_2(12) = 6, p_3(12) = 12, p_4(12) = 15, p_5(12) = 13, p_6(12) = 11.$$

Теорема 2. *Перечень кортежей K_r , $r = 2, \dots, 6$ длин сторон σ -фигур симметричных ожерелий исчерпывается табл. 11.*

Доказательство. Случай $r = 1$ тривиален, и мы его не рассматриваем. Для $r = 2$ утверждение очевидно.

Случай $r = 3$. Поскольку $p_3(12) = 12$, то выписываем 12 троек хуу, удовлетворяющих диофантову уравнению $x + 2y = 12$: 651, 642, 633, 543, 552, 541, 532, 444, 431, 422, 321, 211. Из них 5 (выделены курсивом) оказываются симметричными (см. табл. 11), а 7 – несимметричными.

Случай $r = 4$. Допустимые варианты разбиений $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \vdash 12$ определяются как решения диофантовых уравнений $2x + 2y = 12$ (прямоугольники, квадрат, ромб) и $x + y + 2z = 12$ (равнобедренная трапеция) соответственно. Среди $p_4(12) = 15$ разбиений два являются несимметричными, но зато два других, $\langle 2244 \rangle$ и $\langle 1155 \rangle$, допускают еще два возможных варианта, $\langle 2424 \rangle$ и $\langle 1515 \rangle$, что и дает 15 кортежей в утверждении теоремы.

Таблица 11

Table 11

Симметричные кортежи $(r, 12-r)$ -ожерелий, r – число пиррихий

Symmetrical tuples $(r, 12-r)$ -necklaces, r is the number of Pyrrhic

Кортежи (нумерация по столбцам, угловые скобки для краткости опущены)										
2	3	4			5		6			
11	211	3333	1353	3151	23232	14241	222222	123213	114114	113115
22	422	2343	1155	2141	32223	41214	221223	132312	411114	112116
33	633	2244	2262	1131	22422	12621	123321	231321	141411	111115
44	444	1434	4161	2424	13431	21612	132231	122214	<i>121215</i>	131313
55	552	3252	1252	1515	31413	11411	213312	124212	211125	311133
66										

Случай $r = 5$. Тогда σ -фигурами симметричных ожерелий являются фигуры, определяемые кортежем сторон $xuzx$. Поскольку $p_5(12) = 13$, то из 13 допустимых решений диофантова уравнения $2x + 2y + z = 12$ выбираем 10 симметричных. Из табл. 8 также следует, что существует 56 несимметричных орбит, т. е. 28 энантиомерных пар.

Случай $r = 6$. Очевидно, σ -фигурами симметричных ожерелий могут быть только фигуры с кортежами $\langle xuvuxi \rangle$ и $\langle xuzzux \rangle$, компоненты которых должны удовлетворять диофантовым уравнениям $2x + 2y + u + v = 12$ и $x + y + z = 6$. Допустимыми вариантами решений являются 20 комбинаций, представленных в табл. 11. Курсивом в ней выделена единственная из 250 встретившаяся нам симметричная строфа в сборнике «Ямбы» $x_{191} = [1555]$ «О, я хочу безумно жить...». $\square$

Строфа $C_{59} = 123123 = [6464] \in Orb_6$ «Там – вечеряющая даль...» обладает так называемой *центральной симметрией*, которая в поэзии встречается крайне редко. Интересным свойством симметричных $(6, 6)$ -ожерелий является также то, что они являются либо *самосопряженными*, либо *сопряженными*. В последнем случае они представляют собой сопряженную пару – одно ожерелье симметрично по пиррихиям, другое – по ударным стопам. Остальные пары являются самосопряженными. Согласно табл. 11 имеем следующие пары:

Сопряженные: (3, 10) (4, 9) (5, 7) (6, 8) (12, 17) (13, 16) (14, 20)
 Самосопряженные: (1, 1) (2, 2) (11, 11) (15, 15) (18, 18) (19, 19)

Все сопряженные пары обладают зеркальной симметрией $[1, 0]$. Самосопряженные пары обладают ахиральной симметрией $[k, k]$ порядка k [9], а именно:

симметрия $[1, 1]$: (2, 2), (15, 15), (18, 18);

симметрия $[2, 2]$: (11, 11);

симметрия $[3, 3]$: (19, 19);

симметрия $[4, 4]$: (1, 1).

Таким образом, симметрией самого высокого порядка обладает пара (1, 1), т. е. строфа $x = [6363]$. Среди строф А. Блока она нам не встретилась.

Замечательный результат А. Белого состоит в том, что почти все указанные им фигуры являются симметричными σ -фигурами. Несимметричны фигуры «Малый угол», «Острый угол», «Прямоугольники» и «Трапеция». Относительно других фигур имеют место следующие соответствия (табл. 12).

Таблица 12

Table 12

Соответствия фигур А. Белого и σ -фигур

Correspondences of A. Biely's figures and σ -figures

	Фигура А. Белого		σ -фигура		Ожерелье
1	Квадрат	[6611]	Трапеция	$\langle 5212 \rangle$	$0^6 101^2 01$
2	Прямая крыша	[3611]	Треугольник	$\langle 422 \rangle$	$0^7 10101$
3	Малый угол + крыша	[2361]	Воздушный змей	$\langle 4224 \rangle$	$0^3 10^3 10101$
4	Крест	[6361]	Дом	$\langle 42222 \rangle$	$0^3 101010101$
5	Ромб	[3631]	Трапеция	$\langle 6222 \rangle$	$0^5 1010101$
6	Фигура Z	[3423]	Трапеция	$\langle 4242 \rangle$	$0^3 10^2 10^3 1^2$
7	Параллелограмм	[4621]	Трапеция	$\langle 4121 \rangle$	$0^7 1^2 01^2$
8	Лестница	[6666]	Восьмиугольник	$\langle 21212121 \rangle$	$01^2 01^2 01^2 01^2$

Очевидно, что, используя табл. 11, можно решить и обратную задачу – по симметричным σ -фигурам $\langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle$ восстановить ритмическую фигуру четверостишия $[x y z u]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате разработанного системного подхода к исследованию ритмических вариантов 4-ст. ямба, начатого А. Белым, удалось еще раз подтвердить некоторые известные ритмические закономерности (частотность ритмических форм, проявление принципа симметрии и т. д.). На примере стихотворений А. Блока продемонстрирован алгоритм подсчета и перечисления ритмических фигур, интерпретируемых как ожерелья. Для перечисления симметричных ожерелий использованы методы теории разбиений и диофантовых уравнений.

Предлагаемый подход к перечислению ритмических форм может быть распространен и на иные ритмические схемы, включая ожерелья с тремя и более цветами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rama N., Meenakshi L. A computation algorithm for metrical classification of verse // International Journal of Computer Science Issues. – 2010. – Vol. 7 (2). – P. 46–53.
2. Ломоносов М.В. Письмо о правилах российского стихотворства // Ломоносов М.В. Избранные произведения. Т. 2. История. Филология. Поэзия. – М.: Наука, 1986.
3. Белый А. Опыт характеристики русского четырехстопного ямба // Белый А. Символизм: книга статей. – М.: Мусaget, 1910. – С. 286–330.
4. Баевский В.С. Лингвистические, математические, семиотические и компьютерные модели в истории и теории литературы. – М.: Языки славянской культуры, 2001. – 336 с.
5. Жирмунский В.М. Теория стиха. – Л.: Советский писатель, 1975. – 664 с.
6. Красноперова М.А. Реконструктивное моделирование стихосложения на материале ритмики русского стиха: автореф. дис. ... д-ра филол. наук. – СПб., 1992. – 32 с.
7. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971. – 256 с.
8. Блок А.А. Стихотворения; Поэмы. – М.: Э, 2016. – 640 с.
9. Григорьев Ю.Д. Перечисление симметричных ожерелий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – Т. 61. – С. 97–107. – DOI: 10.17223/19988605/61/10.
10. Григорьев Ю.Д., Щеколдин В.Ю. Алгоритмы перечисления симметричных хордовых диаграмм // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 2 (94). – С. 21–36. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36.
11. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
12. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
13. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points // Journal of the American Chemical Society. – 1947. – Vol. 69, N 1. – P. 17–20.
14. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path // Communications of the ACM. – 1962. – Vol. 5 (6). – P. 345. – DOI: 10.1145/367766.368168.
15. Пулатов А.К., Саматова Н.Ф. О сложности задания выпуклого многогранника в R^3 // Дискретная математика. – 1991. – Т. 9, вып. 2. – С. 148–156.

Григорьев Юрий Дмитриевич, доктор технических наук, профессор кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ Санкт-Петербургского государственного технического университета (ЛЭТИ), специалист в области теории планирования эксперимента, теории риска и количественной филологии. Имеет более 160 публикаций, в том числе 4 монографии. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

Щеколдин Владислав Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры маркетинга и сервиса Новосибирского государственного технического университета (НГТУ-НЭТИ), специалист в области экономико-математического моделирования, планирования оптимальных экспериментов и моделирования логистических систем. Имеет более 100 публикаций, в том числе одну монографию. E-mail: raix@mail.ru

Grigoriev Yu. D., D.Sc. (Eng). Professor of the department of Computer Science of St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), an expert in the field of experimental design theory, risk theory, and quantitative philology. He has more than 160 publications including four monographs. E-mail: yuri_grigoriev@mail.ru

Shchekoldin V. Yu., Ph.D. (Eng). associate professor at the Marketing and Service Department in Novosibirsk State Technical University (NSTU-NETI), an expert in the field of economic and mathematical modeling, experimental design, and logistic systems modeling. He has more than 100 publications including one monograph. E-mail: raix@mail.ru

Enumeration of rhythmic figures of the iambic tetrameter*Yu.D. GRIGORIEV^{1,a}, V.Yu. SHCHEKOLDIN^{2,b}¹ St. Petersburg State Electrotechnical University (LETI), 5 Prof. Popova Street, St. Petersburg, 197376, Russian Federation² Novosibirsk State Technical University (NSTU-NETI), 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation^a yuri_grigoriev@mail.ru ^b raix@mail.ru**Abstract**

The problem of rhythmic characterization of the iambic tetrameter proposed by A. Bely is considered. An algorithm for listing all variants of iambic in quatrain is developed. It is based on the principle of classifying objects introduced in the problems of mathematical linguistics and mathematical biology. Three variants of complete equivalence relations (equality, sameness, congruence) are used as the main classification tool. Equality relation is used to divide the analyzed corpus of stanzas into classes with an equal number of pyrrhics. The sameness relation divides these classes into subclasses of stanzas with the same system of deviations from full stress. The congruence relation compares these subclasses with sets of rhythmic variants called orbits. Due to this, it is possible to enumerate all those possible variants of stanzas that may not be found in a specific set of poems that has been analyzed.

To cover the whole variety of rhythmic variants in the poem, A. Bely suggested a special graphic system, which was basically completely correct, but it was in the end criticized by his contemporaries, who, in turn, did not propose anything meaningful in this direction. In this paper, the tool of the necklace problem is used to develop A. Bely's ideas. As a result, not only all the rhythmic figures of 4-st. iambic relate to omissions of stresses listed, but the possibility opens up of eliminating the shortcoming of the graphic method, which consisted in the impossibility of considering the aggravations of unstressed syllables (additional stresses). To do this, it is enough to move from two-color necklaces to three-color ones.

In addition, based on the proposed approach, the so-called symmetrical stanzas were identified among the entire corpus of stanzas. It was shown that approximately two thirds of the rhythmic figures proposed by A. Bely correspond to symmetrical stanzas. The methods of the theory of partitions and the theory of linear Diophantine equations were used to enumerate the symmetrical stanzas. The corpus of poems by A. Blok, including the cycles "Poems about the Beautiful Lady" and "Iambics" and individual poems from other cycles was used to analyze all the variants of iambic.

Keywords: rhythmic structure, pyrrhic, iambic tetrameter, ratio, stanza, necklace, Burnside's lemma, symmetry

REFERENCES

1. Rama N., Meenakshi L. A computation algorithm for metrical classification of verse. *International Journal of Computer Science Issues*, 2010, vol. 7 (2), pp. 46–53.
2. Lomonosov M.V. Pis'mo o pravilakh rossiiskogo stikhotvorstva [A Letter about the rules of Russian poetry]. Lomonosov M.V. *Izbrannye proizvedeniya*. T. 2. *Istoriya. Filologiya. Poeziya* [Selected works. Vol. 2. History. Philology. Poetry]. Moscow, Nauka Publ., 1986.
3. Belyi A. Opyt kharakteristiki russkogo chetyrehstopnogo yamba [The Experience of the characterization of the russian iambic tetrameter]. Belyi A. *Simvolizm* [Symbolism]. Moscow. Musaget Publ., 1910, pp. 286–330.

* Received 17 March 2025.

4. Baevskii V.S. *Lingvisticheskie, matematicheskie, semioticheskie i komp'yuternye modeli v istorii i teorii literatury* [Linguistic, mathematical, semiotic and computer sciences models in literary history and theory]. Moscow, Yazyki slavyanskoi kul'tury Publ., 2003. 336 p.
5. Zhirmunskii V.M. *Teoriya stikha* [Theory of Verse]. Moscow, Sovetskii pisatel' Publ., 1975. 664 p.
6. Krasnoperova M.A. *Rekonstruktivnoe modelirovanie stikhoslozheniya na materiale ritmiki russkogo stikha*. Avtoref. diss. dokt. filol. nauk [Reconstructive modeling of versification based on the rhythmic Russian verse. Authors abstract of Dr. in Philology diss.]. St. Petersburg, 1992. 32 p.
7. Shreider Yu.A. *Ravenstvo, skhodstvo, poryadok* [Equality, similarity, order]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 256 p.
8. Block A.A. *Stikhotvoreniya; Poemy* [Verses. Poems]. Moscow, E Publ., 2016. 640 p. (In Russian).
9. Grigoriev Yu.D. Perechislenie simmetrichnykh ozherelii [Enumeration of symmetrical necklaces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2022, vol. 61, pp. 97–107. DOI: 10.17223/19988605/61/10.
10. Grigoriev Yu.D., Shchekoldin V.Yu. Algoritmy perechisleniya simmetrichnykh khordovykh diagramm [Algorithms for enumerating symmetric chord diagrams]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 2 (94), pp. 21–36. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-2-21-36.
11. Sachkov V.N. *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoi matematiki* [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 384 p.
12. Ore Ø. *Theory of Graphs*. Providence, American Mathematical Society, 1962 (Russ. ed.: Ore O. *Teoriya grafov*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 352 p.).
13. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*, 1947, vol. 69, no. 1, pp. 17–20.
14. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 1962, vol. 5 (6), p. 345. DOI: 10.1145/367766.368168.
15. Pulatov A.K., Samatova N.F. O slozhnosti zadaniya vypuklogo mnogogrannika v R^3 [Complexity of the specification of a convex polyhedron in R^3]. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*, 1991, vol. 9, iss. 2, pp. 148–156. (In Russian).

Для цитирования:

Григорьев Ю.Д., Щеколдин В.Ю. Перечисление ритмических фигур четырехстопного ямба // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 3 (99). – С. 25–44. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-25-44.

For citation:

Grigoriev Yu.D., Shchekoldin V.Yu. Perechislenie ritmicheskikh figur chetyrekhtopnogo yamba [Enumeration of rhythmic figures of the iambic tetrameter]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2025, no. 3 (99), pp. 25–44. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-25-44.