

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 621.07.29

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-99-112

Синтез гибридных динамических систем с дискретно-непрерывными инерционными параметрами*

В.И. СОБОЛЕВ^{1,а}, Т.Н. ЧЕРНИГОВСКАЯ^{2,б}, С.Р. ПОПОВ^{1,с}

¹ 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Иркутский национальный исследовательский технический университет

² 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15, Иркутский государственный университет путей сообщения

^а vladsobol@yandex.ru ^б tannikch@gmail.com ^с svat090@mail.ru

Предлагаемая работа посвящена вопросам формирования динамических систем, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными инерционными и жесткостными параметрами, и их анализу на основе авторского метода гармонического элемента. Размерность таких дискретно-континуальных систем значительно меньше размерности систем, сформированных путем дискретизации деформируемых элементов с распределенными инерционными параметрами, что приводит к формированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений чрезвычайно высокого порядка с вытекающими отсюда трудностями. В работе излагается метод и варианты формирования таких дискретно-континуальных динамических систем с разнородными граничными условиями и нерегулярными границами расчетных областей посредством реализации узловой сшивки дискретных и бесконечномерных элементов. Синтез динамических систем осуществляется на основе динамического равновесия элементов декомпозированной системы в узлах системы с предварительным определением динамических жесткостей дискретных и бесконечномерных сшиваемых элементов по направлениям колебаний. Жесткостные параметры элементов группируются в виде матриц динамических реакций при помощи авторского метода гармонических элементов, позволяющего учитывать влияние статических продольных сил в изгибаемых элементах. Рассматриваются изгибаемые стержневые элементы с различными условиями краевых закреплений, реализуемых при помощи комбинации узловых связей. Реализована возможность узловой сшивки разнородных элементов с учетом разнородности граничных условий и нерегулярности границ расчетных областей. Рассматриваются стационарные динамические процессы при узловых гармонических воздействиях, заданных совокупностью гармонических сил и моментов, действующих с постоянной частотой. Учитывается воздействие статических продольных сил в бесконечномерных изгибаемых элементах, оказывающих влияние на величины амплитуд динамических реакций по направлениям связей гармонических элементов. Динамика

* Статья получена 13 марта 2025 г.

сшиваемых бесконечномерных изгибаемых элементов описывается при помощи дифференциальных уравнений в частных производных – уравнений Эйлера – Бернулли.

Ключевые слова: гибридные системы, синтез разнородных систем, декомпозиция модели, уравнения Эйлера – Бернулли, системы уравнений динамики, матрицы динамических жесткостей, матрицы динамических реакций, дискретно-континуальные динамические системы

ВВЕДЕНИЕ

В силу многогранности понятий термина «система» целесообразно внести некоторые пояснения в его смысловое наполнение, принятое в рамках настоящей работы.

В широком смысле под системой понимается совокупность взаимосвязанных элементов, образующих целостное единство. Систему, включающую элементы различной природы, принято называть сложной [1, 2]. Наличие дискретных и континуальных деформируемых компонентов позволяет классифицировать рассматриваемые динамические системы как сложные, что соответствует требованиям единства и связанности, предъявляемым к системам в классическом понимании [1, 2]. В настоящей работе уделяется особое внимание этим принципам.

Теория динамических систем, разработанная Анри Пуанкаре [4], изучает поведение систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В таком контексте динамическая система – это математическая модель, отражающая изменения и состояние физической системы во времени [4, 5]. Таким образом, понятие «динамическая система» тесно связано с понятием «математическая модель».

В предыдущих работах авторов [6–8] обоснована целесообразность применения комбинированных динамических моделей (КДМ), учитывающих динамическое взаимодействие элементов с непрерывным и сосредоточенным распределением инерционных и жесткостных параметров.

Как отмечалось ранее, дискретизация системы позволяет учитывать сосредоточенные гармонические нагрузки в узлах. Эти гармонические силы, внешние для каждого элемента после декомпозиции, могут быть как внешними воздействиями на систему, так и внутренними силами, обусловленными связями с другими элементами (рис. 1).

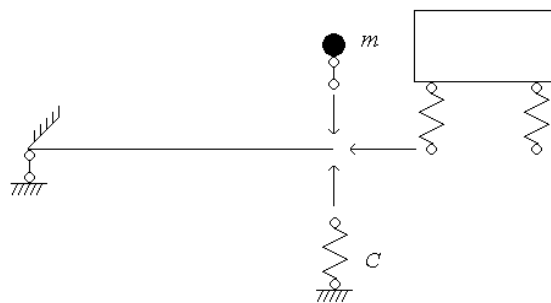


Рис. 1. Включение дискретных и континуальных элементов в расчетную схему

Fig. 1. Decomposition of the system into discrete and continuous elements

1. МАТРИЦЫ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Формирование системы уравнений динамического равновесия, аналогично исследованиям [5–7], базируется на вычислении динамических реакций в связях, наложенных по направлениям степеней свободы узлов элементов различных видов, а именно:

- узлов сосредоточения масс;
- линейно упругих опор;
- упругоопертых дискретных масс;
- центров масс твердых тел.

В упругой линейной опоре жесткостью c (рис. 2, *a*) амплитуда r_c единичной динамической реакции постоянна и не изменяется в зависимости от частоты воздействия:

$$r_c = c. \quad (1)$$

Важно отметить, что гармоническая реакция r_m в связи безопорной сосредоточенной массы m возникает только при ненулевой частоте воздействия, поскольку эта реакция формируется инерционными свойствами элемента. При этом

$$v_{2i} = \sin \Psi_i \sin Q_i, \quad (2)$$

где Ψ_i – угол наклона i -й оси опоры в пространстве; Q_i – угол разворота.

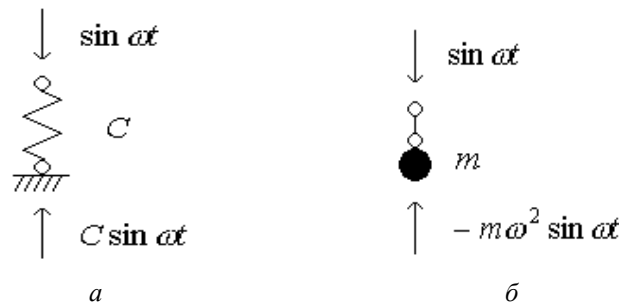


Рис. 2. Величины динамических реакций в связях:

a – линейно упругой опоры; *б* – сосредоточенной массы, при гармоническом воздействии

Fig. 2. The values of dynamic reactions in the connections:

a – a linearly elastic support; *b* – concentrated mass, under harmonic action

Для точечной массы m , закрепленной на упругой опоре с жесткостью c (рис. 3), амплитуды единичных динамических реакций могут быть представлены матрицей R_{mc} в соответствии с их нумерацией

$$R_{mc} = \begin{bmatrix} c - m\omega^2 & -c \\ -c & c \end{bmatrix}. \quad (3)$$

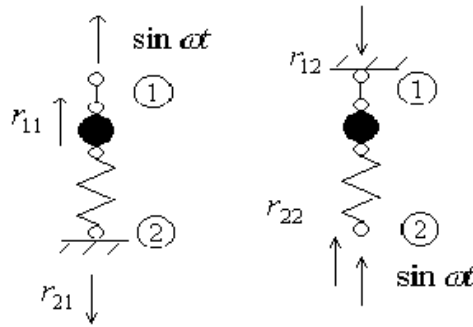


Рис. 3. Нумерация связей упругоопертой точечной массы

Fig. 3. Dynamic reactions in the connections of an elastic point mass

Рассмотрим динамику твердого тела, опертого на линейно-упругие одноосные опоры с номерами i (рис. 4). При задании точек крепления и направлений опор, заданных парой углов Q_i и Ψ_i (рис. 5), в системе координат, совпадающей с главными центральными осями инерции твердого тела (рис. 6) имеем

$$V_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, v_{4i}, v_{5i}, v_{6i}), \quad (4)$$

где вектор единичных реакций по направлениям связей

$$v_{1i} = \sin \Psi_i \cos Q_i, \quad (5)$$

$$v_{2i} = \sin \Psi_i \sin Q_i, \quad (6)$$

$$v_{3i} = \cos \Psi_i, \quad (7)$$

$$v_{4i} = y_i v_{3i} - z_i v_{2i}, \quad (8)$$

$$v_{5i} = z_i v_{1i} - x_i v_{3i}, \quad (9)$$

$$v_{6i} = x_i v_{2i} - y_i v_{1i}. \quad (10)$$

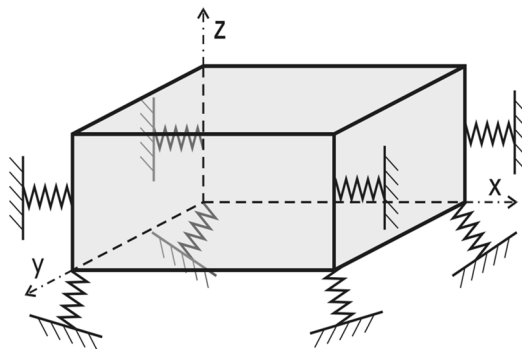


Рис. 4. Упругое опирание твердого тела

Fig. 4. A rigid body on elastic supports

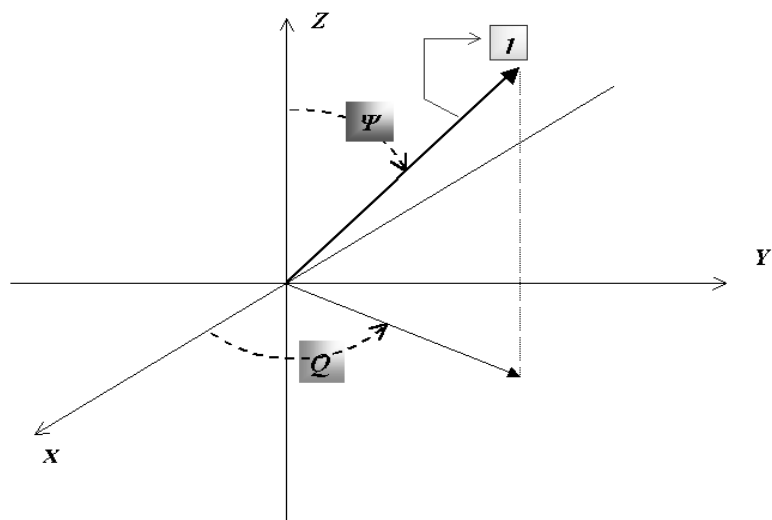


Рис. 5. Ориентационные параметры жестко закрепленного тела:
 Q – угол поворота, Ψ – угол наклона, i – номер направления оси упругой опоры

Fig. 5. Orientation parameters of a rigidly fixed body:
 Q is the angle of rotation, Ψ is the angle of inclination, i is the direction number of the elastic support axis

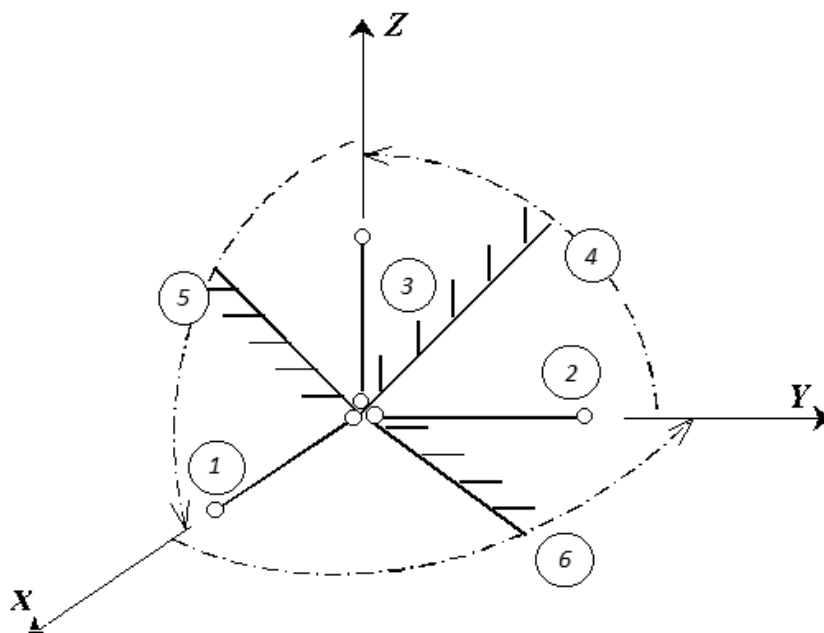


Рис. 6. Связи центра масс твердого тела по направлениям степеней свободы и их номера

Fig. 6. Relations of the center of mass of a solid body in the directions of degrees of freedom and their numbers

В связях твердого тела матрицу единичных статических реакций [11, 12] можно сформировать в виде

$$R_C = \sum_{i=1}^n r_i V_i^T V_i. \quad (11)$$

Амплитуды единичных динамических реакций [5] формируют матрицу

$$R_T = \sum_{i=1}^n r_i V_i^T V_i - \omega^2 M. \quad (12)$$

В этом выражении n – число связей; r_i – жесткость i -й опоры; $v_{3i} = \cos \Psi_i$, m – масса тела; J_x, J_y, J_z – главные центральные моменты инерции тела [6].

Амплитуды колебаний твердого тела без граничных условий определяются из системы уравнений (13) в виде вектора U . Для решения этой системы необходимо задаться вектором амплитуд силового гармонического воздействия F по направлениям наложенных связей

$$R_T U = F. \quad (13)$$

Матрица динамических жесткостей R (амплитуд единичных динамических реакций) при опирании на систему, состоящую из линейно-упругих опор, представляется в виде

$$R = \begin{bmatrix} R_T & R_{TK}^T \\ R_{TK} & R_C \end{bmatrix}, \quad (14)$$

здесь $R_C = \text{diag}(r_1 \dots r_n)$,

$$R_{TK} = R_C V. \quad (15)$$

Для демонстрации изложенного обратим внимание на фрагмент, состоящий из изгибаемых балок и сосредоточенных масс, опертый на упругую пружину в точке B (рис. 7). Предположим наличие линейных связей в плоскости XOY в узлах A, B, C, D , обеспечивающих статическую устойчивость, которые не будем отображать на рисунке во избежание его перегрузки.

Отказ от процедуры дискретизации деформируемого элемента позволяет уменьшить трудозатраты на выполнение задачи и получить аналитическое решение в виде функции $V(x)$ зависимости поперечных перемещений оси балки от координат x продольной оси.

При рассмотрении деформируемых изгибаемых элементов возможны различные варианты граничных условий (рис. 8), требующие наложения соответствующих связей [6]. Под воздействием моногармонических единичных перемещений по направлениям узловых связей в стационарном динамическом процессе балка начинает совершать гармонические колебания с частотой воздействия.

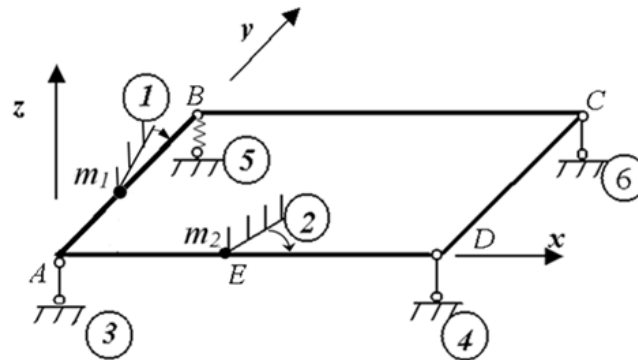


Рис. 7. Связи в узлах элементов конструкции:

1 – угловая связь в плоскости yoz ; 2 – угловая связь в плоскости xoz ; 5 – упругая линейная связь yoz ; 3, 4, 6 – опорные линейные связи по направлению оси z

Fig. 7. Nodal connections of structural elements:

1 is angular in the yoz plane; 2 is angular in the xoz plane; 5 is elastic linear connection yoz ; 3, 4, 6 are supporting linear connections in the direction of the z axis

При отсутствии межузловой поперечной нагрузки на балку в пролете между узлами уравнение динамического состояния элементарного участка балки описывается уравнением Эйлера – Бернулли [7, 12].

$$\rho V_{tt} + EJ V_{xxxx} - NV_{xx} = 0. \quad (16)$$

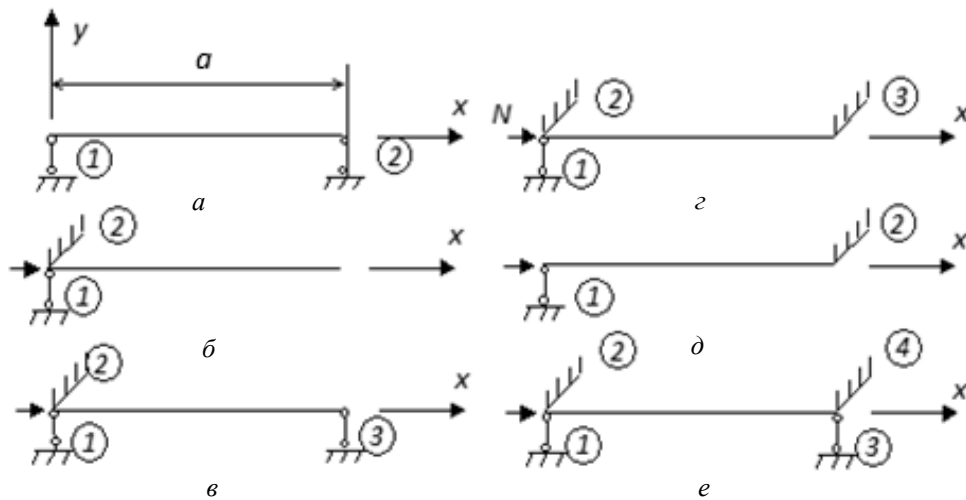


Рис. 8. Возможные варианты наложения связей в расчетных схемах балок (1, 2, 3, 4 – номера связей)

Fig. 8. Possible options for superposition of connections in the design schemes of beams (1, 2, 3, 4 are connection numbers)

При построении матриц динамической жесткости и анализе форм вынужденных колебаний для элементов с распределенными массами будем рассматривать гармонические изгибные колебания балки. Рассмотрим балку длиной l с изгибной жесткостью EJ при различных граничных условиях, находящуюся под воздействием гармонических сил. В частности, исследуем балку с равномерно распределенной массой ρ (рис. 8, в), подверженной действию постоянной продольной силы N [6, 12].

Граничные условия для балок в целом формализуемы в виде

$$V = (V(0), V_x|_{x=0}, V(l), V_{xx}|_{x=l})^T. \quad (17)$$

Матрица динамических жесткостей в данном случае имеет третий порядок, поскольку в расчетной схеме балки, изображенной на рис. 8, содержится две линейные связи и одна угловая. В данном случае матрица формируется в виде $R = \{R_1, R_2, R_3\}$ [6, 12].

Правила знаков перемещений и реакций приведены на рис 9.

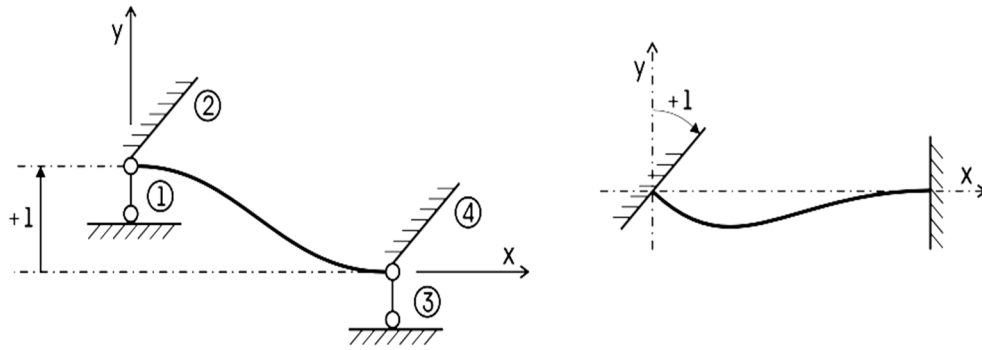


Рис. 9. Положительные повороты и перемещения для граничных узлов деформируемых элементов

Fig. 9. The rule of signs of movements and reactions in nodal connections

Используем метод разделения переменных [9], для этого представим $V(x)$ в виде $V(x) = Y(x) \sin(\omega t)$.

Получив характеристическое уравнение для (16) в виде

$$Y^{(IV)}(x) - \frac{NY^{(2)}(x)}{EJ} - Y(x) \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0 \quad (18)$$

и определив корни характеристического уравнения (18), имеющего вид

$$w^4 - \frac{N}{EJ} w^2 - \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0, \quad (19)$$

получим $w_1 = q$, $w_2 = -q$, $w_3 = is$, $w_4 = -is$, где

$$q = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}}, \quad (20)$$

$$s = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}}. \quad (21)$$

Линейная комбинация (22) представляет собой общее решение $Y(x)$ уравнения (18):

$$Y(x) = H(x)\vec{C}, \quad (22)$$

где $\vec{C}$ является вектором коэффициентов линейной комбинации линейно-независимых функций, формирующих базисную вектор-функцию $H(x)$.

Граничные условия для решения уравнения (18) могут быть установлены также в виде вектора амплитуд перемещений по направлениям соответствующих связей.

Базисная вектор-функция (23), состоящая из четырех линейно-независимых частных решений, представленная ранее в работах [9, 10], имеет вид

$$H(x) = (e^{qx}, e^{-qx}, \sin(sx), \cos(sx)). \quad (23)$$

Для анализируемой балки $Y_{xx}|_{x=a} \equiv 0$:

- определение коэффициентов линейных комбинаций фундаментального решения осуществляется посредством матрицы C ;
- процедура включает последовательное задание единичных амплитуд гармонических перемещений по направлениям связей для нахождения вектора $Y(x)$;
- формирование матрицы L производится на основе упорядоченных (по номерам связей) векторов амплитуд единичных перемещений $Y(x)$.

Результирующие матрицы L и C имеют представленную ниже структуру:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Элементы матрицы C находятся из решения системы уравнений

$$AC = L, \quad (25)$$

где A – матрица, полученная из базисной вектор функции $H(x)$ путем ее определения в граничных узлах:

$$A = \begin{pmatrix} H(0) \\ H_x(x)|_{x=0} \\ H(l) \\ H_{xx}(x)|_{x=a} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Итак, имеем возможность получить матрицу R гармонических реакций в виде

$$R = -EJC^T H, \quad (27)$$

где

$$H = \left(H_{xxx}^T(x)|_{x=0}, H_{xx}^T(x)|_{x=0}, H_{xxx}^T(x)|_{x=a} \right). \quad (28)$$

Вектор-столбец Y определяется из решения системы уравнений

$$RY = F. \quad (29)$$

Преобразовав равенство (29), получим

$$-EJ(A^{-1}L)^T H = F \quad (30)$$

при заданной узловой форме F силового гармонического воздействия с заданной частотой воздействия. Функция амплитуд перемещений оси балки (функция амплитуд формы стационарных установившихся вынужденных колебаний) $Y(x)$ имеет вид

$$Y(x) = Y^T C^T H^T(x). \quad (31)$$

Таким образом, изложенный подход, основанный на использовании метода гармонического элемента, позволяет синтезировать динамическую систему, совмещающую элементы с сосредоточенными и распределенными инерционными параметрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Как следует из изложенного, применение метода гармонического элемента позволяет конструировать динамические системы, включающие элементы с дискретными и континуальными инерционными характеристиками.

2. Использование понятия связей, традиционных в моделировании и расчетах деформируемых систем, в применении к дискретным элементам позво-

ляет осуществлять синтез гибридной динамической системы с реализацией узловой сшивки дискретных и деформируемых элементов.

3. Математическая модель такой системы, сформированной в виде системы уравнений в частных производных и системы обыкновенных дифференциальных уравнений (гибридной системы дифференциальных уравнений [17]), реализует требования единства и связанности, предъявляемые к системе в классическом понимании.

4. Формирование такой системы возможно при помощи использования процедур динамического сканирования узловых связей динамической модели путем задания поочередных гармонических узловых перемещений по направлениям связей.

5. Предложенный подход позволяет получать решения гибридных динамических систем обыкновенных дифференциальных уравнений динамики и уравнений в частных производных Эйлера – Бернулли, избегая процедуры дискретизации инерционных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 232 с.
2. Клар Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач. – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.
3. Улитин Г.М., Царенко С.Н. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и распределенной массой // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, № 6. – С. 817–823. – EDN VLMATB.
4. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste. En 3 vols. – Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892–1899.
5. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
6. Соболев В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов. – Иркутск: Иркут. нац. исслед. техн. ун-т, 2002. – 201 с.
7. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Метод гармонического элемента в моделировании стационарных динамических процессов // Вестник ВСГТУ. – 2010. – № 1. – С. 43–51. – EDN MLJWYL.
8. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний тонкой пластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2007. – № 4 (16). – С. 28–32. – EDN JURRIN.
9. Борохова Н.В., Максимов Г.М. Колебания дискретно-континуальной механической системы при случайном возмущении // Естественные и технические науки. – 2016. – № 10 (100). – С. 125–136. – EDN WYJRHP.
10. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
11. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. – 5-е изд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 368 с.
12. Соболев В.И. Дискретно-континуальные математические модели в алгоритмическом и программном разрешении проблем подавления вибраций конструкций и оборудования: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Иркутск, 2003. – 36 с.
13. Гаскин В.В., Снитко А.Н., Соболев В.И. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. Ч. 1. Многоэтажные здания. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1992. – 216 с.
14. Szeidl G., Kiss L. Systems with infinite degrees of freedom // Mechanical Vibrations: An Introduction. – Cham: Springer, 2020. – P. 201–241. – (Foundations of Engineering Mechanics).

15. *Petrosian L.G.* Dynamic calculation of frames with distributed mass on the action of harmonic load // *Dynamics of Structures*. – Cham: Springer, 2024. – P. 267–281.
16. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 319 с.
17. *Гальперин И.* Введение в теорию обобщенных функций. – М.: ИЛ, 1954. – 64 с.

Соболев Владимир Иванович, профессор кафедры механики и сопротивления материалов Иркутского национального исследовательского технического университета. Основное направление научных исследований – динамика деформируемых систем. Имеет более 100 печатных работ. E-mail: vladsobol@yandex.ru

Черниговская Татьяна Николаевна, старший преподаватель кафедры математики Иркутского государственного университета путей сообщения. Основное направление научных исследований – динамические системы, совмещающие элементы с сосредоточенными и распределенными инерционными параметрами. Имеет более 20 печатных работ. E-mail: tannikch@gmail.com

Попов Святослав Русланович, магистрант кафедры механики и сопротивления материалов Иркутского национального исследовательского технического университета. Основное направление научных исследований – динамика деформируемых систем. E-mail: svat090@mail.ru

Sobolev Vladimir I., professor at the, Department of Mechanics and Strength of Materials, Irkutsk National Research Technical University. The main field of his scientific research is the Dynamics of Deformable Systems. He has more than 100 publications. E-mail: vladsobol@yandex.ru

Chernigovskaya Tatyana N., senior lecturer at the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University. The main field of her scientific research is dynamic systems that combine elements with concentrated and distributed inertial parameters. She has more than 20 publications. E-mail: tannikch@gmail.com

Popov Svyatoslav R., postgraduate student at the Department of Mechanics and Strength of Materials, Irkutsk National Research Technical University. The main field of his scientific research is the Dynamics of Deformable Systems. E-mail: svat090@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-99-112

Synthesis of hybrid dynamical systems with discrete-continuous inertial parameters*

V.I. SOBOLEV^{1,a}, T.N. CHERNIGOVSKAYA^{2,b}, S.R. POPOV^{1,c}

¹ Irkutsk National Research Technical University, 83 Lermontov Street, Irkutsk, 664074, Russian Federation

² Irkutsk State Transport University, 15 Chernyshevsky Street, Irkutsk. 664074, Russian Federation

^a vladsobol@yandex.ru ^b tannikch@gmail.com ^c svat090@mail.ru

Abstract

This work develops and analyzes dynamic systems integrating distributed and concentrated inertial/stiffness parameters using the author's Harmonic Element Method (HEM). Unlike conventional discretization techniques that yield high-order ODE systems with computational

* Received 13 March 2025.

burdens, HEM achieves significant model-order reduction. The methodology constructs discrete-continuous systems for domains with irregular boundaries and mixed boundary conditions via nodal coupling of discrete and continuum elements. System assembly enforces dynamic equilibrium at nodes utilizing pre-computed dynamic stiffness matrices for each element type. Stiffness parameters are structured into dynamic reaction matrices inherently incorporating static axial force effects in flexural members. The study examines bendable rods with diverse edge constraints enabled by nodal linkages, facilitating heterogeneous element coupling. Stationary responses to nodal harmonic loads (constant frequency) are investigated, including the impact of static axial forces in continuum elements on connection-point reaction amplitudes. Coupled bending element dynamics follows the Euler-Bernoulli PDEs.

Keywords: Discrete-continuous dynamical systems, synthesis of heterogeneous systems, decomposition of the model, Euler-Bernoulli equations, systems of dynamic equations, dynamic stiffness matrices, dynamic reaction matrices, hybrid systems

REFERENCES

1. Gubanov V.A., Zakharov V.V., Kovalenko A.N. *Vvedenie v sistemnyi analiz* [Introduction to system analysis]. Leningrad, LGU Publ., 1988. 232 p.
2. Klir G.J. *Sistemologiya. Avtomatizatsiya resheniya sistemnykh zadach* [Architecture of systems problem solving]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1990. 544 p. (In Russian).
3. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Izgibnye kolebaniya sterzhnya s peremennoi zhestkost'yu i raspredelennoi massoi [Flexural vibrations of a rod of variable stiffness and distributed mass]. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 817–823. (In Russian).
4. Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*. En 3 vols. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892–1899.
5. Butenin N.V., Neimark Yu.I., Fufaev N.A. *Vvedenie v teoriyu nelineinykh kolebaniy* [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 384 p.
6. Sobolev V.I. *Diskretno-kontinual'nye dinamicheskie sistemy i vibroizolyatsiya promyshlennykh grokhotov* [Discrete-continuous dynamic systems and vibration isolation of industrial screens]. Irkutsk, INRTU Publ., 2002. 201 p.
7. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Metod garmonicheskogo elementa v modelirovanii statsionarnykh dinamicheskikh protsessov [Method of harmonic element in stationary dynamic process modeling]. *Vestnik VSGTU = ESSUTM Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 43–51.
8. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Postroenie pryamougol'nogo garmonicheskogo elementa dlya modelirovaniya kolebaniy tonkoi plastiny [Construction of a rectangular harmonic element for modeling vibrations of a thin plate]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie = Modern technologies. System analysis. Modeling*, 2007, no. 4 (16), pp. 28–32.
9. Borokhova N.V., Maksimov G.M. Kolebaniya diskretno-kontinual'noi mekhanicheskoi sistemy pri sluchainom vozmushchenii [Fluctuations of a discrete-continuum mechanical system under random perturbation]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and Technical Sciences*, 2016, no. 10 (100), pp. 125–136.
10. Kolousek V. *Dinamika stroitel'nykh konstruksii* [Dynamics of building structures]. Moscow, Stroizdat Publ., 1965. 632 p. (In Russian).
11. Krylov A.N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoi fiziki, imeyushchikh prilozhenie v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics that have applications in technical matters]. 5th ed. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 368 p.
12. Sobolev V.I. *Diskretno-kontinual'nye matematicheskie modeli v algoritmicheskom i programnom razreshenii problem podavleniya vibratsii konstruksii i oborudovaniya*. Avtoref. diss. dokt. tekhn. nauk [Discrete-continuous mathematical models in algorithmic and software solution of vibration suppression problems of structures and equipment. Author's abstract of Dr. eng. sci. diss.]. Irkutsk, 2003. 36 p.

13. Gaskin V.V., Snitko A.N., Sobolev V.I. *Dinamika i seismostoikost' zdanii i sooruzhenii*. Ch. 1. *Mnogoetazhnye zdaniya* [Dynamics and seismic resistance of buildings and structures. Part 1. Multi-storey buildings]. Irkutsk, Irkutsk University Publ., 1992. 216 p.
14. Szeidl G., Kiss L. Systems with infinite degrees of freedom. *Mechanical Vibrations: An Introduction*. Cham, Springer, 2020, pp. 201–241.
15. Petrosian L.G. Dynamic calculation of frames with distributed mass on the action of harmonic load. *Dynamics of Structures*. Cham, Springer, 2024, pp. 267–281.
16. Clough R.W., Penzien J. *Dinamika sooruzhenii* [Dynamics of structures]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1979. 319 p. (In Russian).
17. Halperin I. *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsii* [An introduction to the theory of generalized functions]. Moscow, IL Publ., 1954. 64 p. (In Russian).

Для цитирования:

Соболев В.И., Черниговская Т.Н., Попов С.Р. Синтез гибридных динамических систем с дискретно-непрерывными инерционными параметрами // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 3 (99). – С. 99–112. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-99-112.

For citation:

Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N., Popov S.R. Sintez gibridnykh dinamicheskikh sistem s diskretno-nepreryvnymi inertsionnymi parametrami [Synthesis of hybrid dynamic systems with discrete-continuous inertial parameters]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2025, no. 3 (99), pp. 99–112. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-3-99-112.