

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 681.5

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-25-38

К определению статической ошибки гибридных нелинейных систем управления*

М.Д. АЛМАШААЛ^{1,а}, А.Р. ГАЙДУК^{2,б}

¹ РФ, 420015, г. Казань, ул. Карла Маркса, 68, Казанский национальный исследова-
тельский технологический университет

² РФ, 347922, г. Таганрог, Некрасовский переулок, 44, Южный федеральный универ-
ситет

^а Almashaal.jalal@gmail.com

^б gaiduk_2003@mail.ru

Гибридные системы часто используются в различных технических приложениях, таких как робототехника, авиация, космос, энергетика и др. Возникновение гибридных систем управления обусловлено тем, что вычислительные средства не могут достаточно быстро реализовывать законы управления, в том числе и нелинейные. В настоящей статье представлен метод синтеза гибридных систем управления нелинейными объектами, заданными квазилинейной моделью. Отличительной особенностью этого метода является обеспечение значительно большего периода дискретизации управления по сравнению с известными методами. Метод ориентирован на использование дискретной квазилинейной модели заданного объекта с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния. На основе этой модели создается дискретное управление, которое обеспечивает динамическую устойчивость гибридной нелинейной системы. Проблема, рассматриваемая в статье, заключается в выборе связи по задающему воздействию, при которой система имеет нулевую статическую ошибку по этому воздействию. В статье сравниваются два способа определения глубины этой связи по точной и по приближенной моделям гибридной системы. Эффективность этих способов оценивается сравнением процессов управления. Полученные результаты демонстрируют высокую степень близости обеих моделей, что подтверждает эффективность дискретной квазилинейной модели как инструмента проектирования дискретных и гибридных нелинейных систем управления. Результаты настоящего исследования направлены на разработку новых подходов, способствующих улучшению качества гибридных нелинейных систем, в частности, за счет обеспечения нулевой статической ошибки по задающему воздействию. Это повышает адаптивность системы к изменениям внешних условий и увеличивает ее эффективность в решении сложных технических задач.

Ключевые слова: нелинейный объект, квазилинейная модель, дискретная квазилинейная модель, дискретное устройство управления, гибридная нелинейная система, устойчивость, статическая ошибка, положение равновесия

* Статья получена 19 мая 2025 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 24-19-00063.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разработка гибридных нелинейных систем является одной из актуальных задач в области автоматического управления и робототехники [1]. Гибридные системы представляют собой продвинутый тип систем, объединяющих непрерывный объект и дискретное (цифровое) устройство управления [2, 3]. Этот тип систем особенно востребован в приложениях, требующих гибкой интеграции между непрерывными процессами и современным цифровым управлением, что делает их наиболее эффективными для работы с физическими системами в условиях внезапных изменений внешних воздействий [4, 5]. Для решения задачи синтеза гибридных нелинейных систем управления было разработано несколько методов, основанных на различных математических преобразованиях исходной модели объектов [6–8].

В работе рассматривается метод синтеза гибридных нелинейных систем управления, в котором применяются квазилинейные модели (КЛМ) [8, 9]. Эти модели позволяют описать нелинейные объекты с той же точностью, что и исходные уравнения, но существенно упрощают решение многих задач исследования и применения систем управления. При использовании этих моделей процесс анализа и синтеза нелинейных систем сводится к алгебраическим операциям с полиномами и к решению системы алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, по уравнениям объекта в форме Коши, нелинейности которого являются дифференцируемыми по всем своим аргументам, можно получить квазилинейную модель [9, 10] следующего вида:

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u + h(x)f, \quad y = c'(x)x, \quad (1)$$

где x – n -вектор состояния нелинейного объекта, представленного КЛМ (1); $u = u(g, x)$, $y = y(x)$ и $f = f(t)$ – скалярное управление, управляемая выходная величина и возмущение соответственно; $A(x)$ и $b(x)$, $h(x)$, $c(x)$ – функциональная ($n \times n$)-матрица и n -векторы, все элементы которых известны – это скалярные нелинейные функции или числа, при этом вектор $x = x(t)$ доступен измерению. Штрихом обозначена операция транспонирования.

Метод, позволяющий построить квазилинейную модель (1), опубликован в [9, 11], там же показано, что КЛМ (1) описывает нелинейные объекты с указанными свойствами и с той же точностью, что и заданные дифференциальные и алгебраические нелинейные уравнения.

Пусть $g(t) = g_0 l(t)$ – задающее воздействие, $y_g(t)$ – выходная величина системы при $f(t) \equiv 0$. Тогда $\varepsilon_{стg} = \lim_{t \rightarrow \infty} [g(t) - y_g(t)]$ – статическая ошибка

синтезируемой системы по $g(t)$. Будем также предполагать, что объект, представленный КЛМ (1), удовлетворяет критерию управляемости по состоянию непрерывных нелинейных объектов:

$$\det U_{нo}(x) = \det[b(x) \ A(x)b(x) \ \dots \ A^{n-1}(x)b(x)] \neq 0, \quad \forall x \in \Omega_{Uo}, \quad (2)$$

где Ω_{U_0} – окрестность точки $x = \mathbf{0}$, в которой выполняется условие критерия управляемости (2). Здесь $\mathbf{0}$ – нулевой n -вектор.

Целью статьи является исследование способов обеспечения нулевой статической ошибки $\varepsilon_{ст g}$ гибридной системы управления нелинейным объектом, представленным КЛМ (1). Эта система включает нелинейный объект и дискретное устройство управления (ДУУ), т. е. она является гибридной [1, 3, 9]. При этом ДУУ должно обеспечивать устойчивость этой системы, формируя дискретные значения управления $u_k = u(kT)$ с периодом дискретизации T значительно бóльшим по сравнению с периодом, который является допустимым при дискретизации по формулам Эйлера или Рунге – Кутты.

Для решения задачи прежде всего выбирается период дискретизации T такой, что выполняется условие

$$\det[E - 0,5TA(x)] \neq 0, \quad \forall x \in \Omega_{U_0}, \quad (3)$$

где E – единичная матрица.

Далее, применяя метод, предложенный в [11], на основе КЛМ (1) можно получить приближенную дискретную квазилинейную модель (ДКЛМ) нелинейного объекта управления:

$$x_{k+1} = A_d(x_k)x_k + b_d(x_k)u_k + h_d(x_k)f_k, \quad y_k = c'(x_k)x_k, \quad (4)$$

где

$$A_d(x_k) = [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}[E + 0,5TA(x_k)], \quad (5)$$

$$b_d(x_k) = [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Tb(x_k), \quad h_d(x_k) = [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Th(x_k), \quad (6)$$

$x_k = x(kT)$, $u_k = u(kT)$, $f_k = f(kT)$, $y_k = y(kT)$ – дискретные значения вектора состояния $x(t)$, управления $u(t)$, возмущения $f(t)$ и выхода $y(t)$.

Рассматриваемая задача имеет решение, если ДКЛМ (4) – (6) удовлетворяет критерию управляемости по состоянию дискретных нелинейных объектов:

$$\det U_d(x) = \det [b_d(x) \ A_d(x)b_d(x) \ \dots \ A_d^{n-1}(x)b_d(x)] \neq 0, \quad \forall x \in \Omega_{U_d}, \quad (7)$$

где Ω_{U_d} – окрестность точки $x = \mathbf{0}$ такая, что в ней выполняются условия (2), (3) и (7).

При выполнении условий (2), (3) и (7) закон управления, определяющий порядок формирования дискретного управления, принимается в виде

$$u_k(x_k, g_k) = l_g(x_k)g_k - l'(x_k)x_k, \quad (8)$$

где $l_g(x_k)$ – функциональный коэффициент, определяемый из требования обеспечения условия $\varepsilon_{ст g} = 0$, а $l'(x_k) = [l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]$ – вектор, используемый для обеспечения устойчивости положения равновесия и требуемой динамики синтезируемой системы.

Чтобы найти функциональные коэффициенты $l_i(x_k)$ из (8), выполняют следующие действия [11]:

1) по (5) и (6) находят функциональные полиномы:

$$A_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k)] = z^n + \alpha_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \alpha_1(x_k)z + \alpha_0(x_k); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_{d,i}(z, x_k) &= e'_i \text{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k) = \\ &= v_{i,n-1}(x_k)z^{n-1} + v_{i,n-2}(x_k)z^{n-2} + \dots + v_{i,0}(x_k), \end{aligned} \quad (10)$$

где e_i – i -й столбец единичной $(n \times n)$ -матрицы E ; $\alpha_j(x_k)$, $v_{i,j}(x_k)$ – функциональные или числовые коэффициенты, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n-1$;

2) формируют полином n -й степени с символьными или числовыми коэффициентами

$$D^*(z) = \prod_{i=1}^n (z - \sigma_i^*) = z^n + \delta_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \delta_1^* z + \delta_0^*, \quad (11)$$

где σ_i^* – вещественные числа, удовлетворяющие условиям:

$$|\sigma_i^*| \leq 1 - \varsigma_1, \quad \varsigma_2 < |\sigma_i^* - \sigma_k^*|, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

$0 < \varsigma_1 < 1$, $0 < \varsigma_2$ – положительные числа;

3) по (9) и (11) определяют коэффициенты разности

$$D^*(z) - A_d(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k)z + \rho_0(x_k), \quad (13)$$

где $\rho_j(x_k) = \delta_j^* - \alpha_j(x_k)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$;

4) по выражениям (10) и (13) составляют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с функциональными коэффициентами и решают систему этих уравнений относительно коэффициентов $l_i(x_k)$:

$$\begin{bmatrix} v_{10}(x_k) & v_{20}(x_k) & \dots & v_{n0}(x_k) \\ v_{11}(x_k) & v_{21}(x_k) & \dots & v_{n1}(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1}(x_k) & v_{2,n-1}(x_k) & \dots & v_{n,n-1}(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(x_k) \\ l_2(x_k) \\ \vdots \\ l_n(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0(x_k) \\ \rho_1(x_k) \\ \vdots \\ \rho_{n-1}(x_k) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений (14) имеет единственное решение в силу условия (7).

Если решение СЛАУ (14) – вектор $l(x_k) = [l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]'$ – подставить в (8), а полученное выражение – в уравнения ДКЛМ (4), то получатся уравнения виртуальной дискретной системы следующего вида:

$$x_{k+1} = D_d(x_k)x_k + b_d(x_k)l_g(x_k)g_k + h_d(x_k)f_k, \quad \forall x_k \in \Omega_{Ud}, \quad (15)$$

$$y_k = c'(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$D_d(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k)l'(x_k). \quad (17)$$

Отличительная особенность вектора $l(x_k)$ и определяемого им управления (8) состоит в том, что собственные значения матрицы $D_d(x_k)$ (17) совпадают с корнями полинома $D^*(z)$ (11), т. е. не зависят от x_k и являются вещественными, различными и по модулю меньшими единицы при $\forall x_k \in \Omega_{Ud}$. Это утверждение следует из выражений (5) – (17).

Подставляя управление (8) в уравнения КЛМ (1) заданного нелинейного объекта, получим КЛМ замкнутой системы (1), (8):

$$\dot{x} = A(x)x - b(x)l'(x_k)x_k + b(x)l_g(x_k)g_k + h(x)f, \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (18)$$

$$y = c'(x)x, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall x, x_k \in \Omega_{Ud}. \quad (19)$$

Здесь объект управления и его КЛМ (1) являются непрерывными и нелинейными, а управление (8) – дискретным с периодом T и кусочно-постоянным, т. е. система, описываемая уравнением с разрывной правой частью (18) и непрерывным управлением (19), – это гибридная нелинейная система.

Полагая в уравнениях (18) и (19) $t = kT$, получим уравнения той же гибридной системы, но записанные относительно дискретных значений x_k ее вектора состояния $x(t)$:

$$\dot{x}_k = D_\Gamma(x_k)x_k + b(x_k)l_g(x_k)g_k + h(x_k)f_k, \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (20)$$

$$y_k = c'(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$D_\Gamma(x_k) = A(x_k) - b(x_k)l'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (22)$$

Здесь под x_k и $\dot{x}_k$ понимаются пределы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при $t \rightarrow kT$ слева, т. е. $x_k = \lim_{t \rightarrow kT_-} x(t)$, $\dot{x}_k = \lim_{t \rightarrow kT_-} \dot{x}(t)$, $k = 1, 2, \dots$. Допустимость этого следует

из работ М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого, В.Г. Болтянского [12, 13] и др.

Период T выбирается таким, что выполняются условия (3) и (7), а собственные числа матрицы $D_\Gamma(x_k)$ (22) различные и имеют отрицательные вещественные части, т. е. такие, что система (18), (19) является нелинейной гурвицевой. При этом с учетом неравенства (2) и равенств $x_k = x$, $g = f = 0$ она удовлетворяет всем условиям теоремы об устойчивости положения равновесия нелинейных гурвицевых систем, доказанной в [14]. Поэтому положение равновесия $x_k = x = 0$ уравнений (18) и (20) является асимптотически устойчивым при $\forall x \in \Omega_{Ud}$.

Из изложенного выше следует, что рассматриваемая гибридная система (1), (8) фактически описывается двумя системами уравнений: приближенной дискретной (15), (16) и точной дискретно-непрерывной (18), (19). Отсюда следует, что существует два варианта условий, при которых достигается равенство нулю статической ошибки рассматриваемой гибридной системы по задающему воздействию. Как отмечалось выше, определение и сравнение этих вариантов является основной целью настоящей статьи.

2. УСЛОВИЯ ДОСТИЖИМОСТИ НУЛЕВОЙ ОШИБКИ

Вначале для вывода этих условий используются точные непрерывно-дискретные уравнения (18), (19) гибридной системы (1), (8) при $g(t) = g_0 1(t)$ и $f(t) = f_0 1(t)$. Так как эта система устойчива, то при достаточно малых значениях g_0 и f_0 (если область Ω_{Ud} ограничена) и $t \rightarrow \infty$ в ней возникает установившийся режим, а уравнения (18), (19) принимают следующий вид:

$$\mathbf{0} = D_\Gamma(x^\circ)x^\circ + b(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0 + h(x^\circ)f_0, \quad y^\circ = c'(x^\circ)x^\circ, \quad (23)$$

где $\mathbf{0}$, x° , y° – установившиеся значения векторов $\dot{x}$, x , x_k и переменной y . Из первого уравнения (23) при $f(t) \equiv 0$ находим x_g° и подставляем во второе:

$$x_g^\circ = -D_\Gamma^{-1}(x_g^\circ)b(x_g^\circ)l_g(x_g^\circ)g_0, \quad y_g^\circ = -c'(x_g^\circ)D_\Gamma^{-1}(x_g^\circ)b(x_g^\circ)l_g(x_g^\circ)g_0. \quad (24)$$

Очевидно, условие $\varepsilon_{ст,g} = 0$ будет достигнуто*, если во втором равенстве (24) $y_g^\circ = g_0$, т. е. если будет выполняться условие

$$-c'(x_g^\circ)D_\Gamma^{-1}(x_g^\circ)b(x_g^\circ)l_g(x_g^\circ) = 1. \quad (25)$$

Так как значение x_g° заранее неизвестно, то равенство (25) заменяем равенством

$$-c'(x)D_\Gamma^{-1}(x)b(x)l_g(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega_{Ud}. \quad (26)$$

Поскольку система является устойчивой при $\forall x \in \Omega_{Ud}$, то из (26) всегда следует (25). Как известно, матрица $D_\Gamma^{-1}(x) = \text{adj}D_\Gamma(x) / \det D_\Gamma(x)$. Поэтому выражение (26) эквивалентно равенству

$$-c'(x)\text{adj}D_\Gamma(x)b(x)l_g(x) = \det D_\Gamma(x). \quad (27)$$

С другой стороны, из выражения (22) с учетом формулы $\text{adj}[A(x) \pm \sum_{i=1}^{\mu} b(x)c'_i(x)]b(x) = \text{adj}[A(x)]b(x)$ [15, с. 233] при $\mu = 1$ следует равенство $\text{adj}D_\Gamma(x)b(x) = \text{adj}[A(x)]b(x)$, что позволяет записать равенство (27) следующим образом:

$$-c'(x)\text{adj}A(x)b(x)l_g(x) = \det D_\Gamma(x), \quad \forall x \in \Omega_{sys1}, \quad (28)$$

где Ω_{sys1} – часть окрестности Ω_{Ud} или вся окрестность, где выполняется условие (28).

* Отметим, что из уравнения (23) аналогичным образом при $g(t) \equiv 0$ и неизмеряемом возмущении $f(t) = f_0 1(t)$ можно получить аналитическое выражение для ошибки системы $\delta_{ст,f}$ по возмущению $f(t)$ следующего вида: $\delta_{ст,f} = -c'(x_f^\circ)D_\Gamma^{-1}(x_f^\circ)h(x_f^\circ)f_0$. Это выражение не позволяет непосредственно найти значение $\delta_{ст,f}$ при заданном f_0 , но оно позволяет построить график зависимости ошибки как функции f_0 . Наличие графика $\delta_{ст,f} = \Delta(f_0)$ позволяет легко найти значение ошибки системы при заданном f_0^* .

Но из (28) найти необходимое значение $l_g(x)$ можно при условии, что

$$\gamma_{об,1}(x) = -c'(x)adjA(x)b(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega_{sys1}. \quad (29)$$

Неравенство (29) является *критерием управляемости выхода* непрерывного нелинейного объекта, представленного КЛМ (1). При выполнении условия (29) из равенства (28) следует выражение

$$l_{g,1}(x) = \frac{\det D_\Gamma(x)}{\gamma_{об,1}(x)}, \quad \forall x \in \Omega_{sys1}. \quad (30)$$

Практически условие (29) является частным случаем критерия управляемости выхода линейных и нелинейных объектов, полученного в работе [11], когда в уравнении выхода КЛМ объекта $y = c'(x)x + d(x)u$ функциональный коэффициент $d(x) \equiv 0$.

Вывод соотношений, аналогичных (29) и (30), из уравнений (15), (16)

Так как эта система дискретная, то ее задающим воздействием следует считать $g_k = g_0 l(k)$, а ошибкой, вызванной этим воздействием, величину $\varepsilon_{ст,\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} [g_0 l(k) - y_k]$. По определению вектора $l(x_k)$ собственные значения матрицы $D_d(x_k)$ системы (15) по модулю меньше единицы при всех $\forall x \in \Omega_{Ud}$. Следовательно, ее положение равновесия $x_k = 0$ также является асимптотически устойчивым, т. е. при $g_k = g_0 l(k)$, $f_k \equiv 0$ и $k \rightarrow \infty$ значения $x_{g,k+1} = x_{g,k} \rightarrow x_{g,\infty}$, а уравнение (15) принимает вид

$$[E - D_d(x_{g,\infty})]x_{g,\infty} = b_d(x_{g,\infty})l_g(x_{g,\infty})g_0, \quad \forall x_{g,\infty} \in \Omega_{Ud}. \quad (31)$$

В силу указанных свойств собственных значений матрицы $D_d(x_k)$ матрица $[E - D_d(x_{g,\infty})]$ имеет обратную при всех $x_k \in \Omega_{Ud}$, поэтому из (31) можно найти значение $x_{g,\infty}$ и подставить в уравнение (16) при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x_{g,\infty} &= [E - D_d(x_{g,\infty})]^{-1} b_d(x_{g,\infty})l_g(x_{g,\infty})g_0, \\ y_{g,\infty} &= c'(x_{g,\infty})[E - D_d(x_{g,\infty})]^{-1} b_d(x_{g,\infty})l_g(x_{g,\infty})g_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Дискретные значения ошибки системы (15) по задающему воздействию $g(t)$ будут равны нулю при $f_k \equiv 0$ и $k \rightarrow \infty$, если только $y_{g,\infty} = g_0$. Из второго выражения (32) следует, что это равенство выполняется, если

$$c'(x_{g,\infty})[E - D_d(x_{g,\infty})]^{-1} b_d(x_{g,\infty})l_g(x_{g,\infty}) = 1. \quad (33)$$

Поскольку значения $x_{g,\infty}$ заранее неизвестны, то равенство (33) заменяется выражением

$$c'(x_k)[E - D_d(x_k)]^{-1} b_d(x_k)l_g(x_k) = 1, \quad \forall x_k \in \Omega_{sys2}, \quad (34)$$

где Ω_{sys2} – часть окрестности Ω_{Ud} или вся окрестность, где выполняется условие (34).

Обратная матрица $[E - D_d(x_k)]^{-1} = \text{adj}[E - D_d(x_k)] / \det[E - D_d(x_k)]$. С другой стороны, в соответствии с выражением (17) и формулой $\text{adj}\left[A(x) \pm \sum_{i=1}^{\mu} b(x)c'_i(x)\right]b(x) = \text{adj}[A(x)]b(x)$ [15, с. 233] при $\mu = 1$ следует равенство

$$\begin{aligned} \text{adj}[E - D_d(x_k)]b_d(x_k) &= \text{adj}[E - A_d(x_k) + \\ &+ b_d(x_k)l'(x_k)]b_d(x_k) = \text{adj}A_{dE}(x_k)b_d(x_k), \end{aligned} \quad (35)$$

где $A_{dE}(x_k) = E - A_d(x_k)$. Как отмечалось выше, собственные числа матрицы $D_d(x_k)$ совпадают с корнями полинома $D^*(z)$ (11), т.е. полином $D(z, x_k) = \det[zE - D_d(x_k)] = D^*(z)$. Отсюда следует, что определитель $\det[E - D_d(x_k)] = D(z, x_k)|_{z=1}$. Это равенство с учетом определения полинома (11) переходит в равенство

$$\det[E - D_d(x_k)] = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^*. \quad (36)$$

Выражения (34)–(36) позволяют заключить, что условие (33) эквивалентно выражению

$$c'(x_k)\text{adj}A_{dE}(x_k)b_d(x_k)l_g(x_k) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^*. \quad (37)$$

Из (37) следует, что необходимый для обеспечения равенства нулю статической ошибки дискретной системы (15), (16) по задающему воздействию $g_k = g(kT)$ функциональный коэффициент $l_g(x_k)$ существует, если выполняется условие

$$\gamma_{об,2}(x_k) = c'(x_k)\text{adj}A_{dE}(x_k)b_d(x_k) \neq 0, \quad \forall x_k \in \Omega_{sys2}. \quad (38)$$

Полученное неравенство (38) формально также является условием разрешимости задачи обеспечения нулевой статической ошибки гибридной системы (18), (19) по указанному задающему воздействию.

При выполнении условия (38) для определения коэффициента $l_g(x_k)$ получаем из (37) следующую формулу:

$$l_{g,2}(x_k) = \frac{1}{\gamma_{об,2}(x_k)} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^* \right]. \quad (39)$$

Таким образом, для определения глубины связи по задающему воздействию $g(t)$ в ДУУ, т.е. для определения значения коэффициента $l_g(x_k)$, из приведенных выше выражений следуют две различные формулы. При этом формула (30) следует из точных уравнений (18), (19) гибридной системы управления нелинейным объектом, представленным КЛМ (1), а формула (39) – из уравнений виртуальной дискретной системы (15), (16), являющейся приближенной дискретной квазилинейной моделью той же гибридной нелинейной системы управления (1), (8).

Формально оба этих неравенства – (29) и (38) – являются условиями разрешимости задачи обеспечения нулевого значения статической ошибки гибридных нелинейных систем управления при их синтезе представленным выше методом. Подчеркнем, что в целом условиями разрешимости задачи синтеза систем данного типа являются неравенства (2), (3), (7), (12) и (29) или (38).

В данном случае формулы (30) и (39), полученные различными способами, позволяют определить один и тот же коэффициент закона управления, используемого в гибридной системе (1), (8). Естественно, возникает вопрос: являются ли эти формулы эквивалентными? Теоретически получить ответ на этот вопрос довольно сложно, поэтому здесь рассматривается численный пример для его оценки.

3. ПРИМЕР

Синтезируем гибридную систему управления электрическим генератором [16], уравнения которого в отклонениях без внешнего возмущения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -[2,8 + 0,8\tilde{x}_3]\sin \tilde{x}_1 - 10\tilde{x}_3 - 0,01(2\tilde{x}_3 + \tilde{x}_3^2); \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= 3\tilde{x}_2 \sin \tilde{x}_1 - 10(\tilde{x}_3 - u), \quad y = \tilde{x}_1,\end{aligned}\quad (40)$$

где $\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ – компоненты вектора $x' = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{x}_3]$. Замкнутая гибридная система управления должна быть асимптотически устойчивой хотя бы в некоторой окрестности положения равновесия, а ее ошибка по задающему воздействию $g(t) = 2,5 \cdot 1(t)$ должна равняться нулю.

Сравним свойства гибридных систем управления, в которых связь по задающему воздействию $g(t)$ определяется по формулам (29), (30) или (38), (39).

Решение. Прежде всего, используя аналитический метод, представленный в [9, 11], и уравнения (40), определим КЛМ (1), где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -10 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Здесь $a_{21} = -2,8w$, $w = (\sin \tilde{x}_1) / \tilde{x}_1$, $a_{23} = -0,8\sin \tilde{x}_1 - 10 - 0,01(2 + \tilde{x}_3)$, $a_{32} = 3\sin \tilde{x}_1$.

По формуле (2) устанавливаем, что КЛМ (1), (41) объекта (40) удовлетворяет критерию управляемости по состоянию при всех значениях $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_3 > -922$. Используем определитель матрицы $L(x) = E - 0,5TA(x)$, где $A(x)$ из (41). Если $-922 < \tilde{x}_3 < 50$, то условие (3) выполняется при $T \leq 0,7726$. Следовательно, можно считать, что ограниченные значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и $-922 < \tilde{x}_3 < 50$ определяют окрестность Ω_{Uo} . Для обеспечения некоторого запаса полагаем $T = 0,6$ с, а так как $n = 3$, то формируем полином $D^*(z) = z^3 + \delta_2^* z^2 + \delta_1^* z + \delta_0^*$ исходя из требуемой степени устойчивости гибридной системы.

Расчет дискретного управления начинаем при $k = 0$, и с учетом заданного вектора начальных условий x_0 по формулам (5), (6) находим матрицы $\tilde{L}(x_k) = [E - 0,3A(x_k)]^{-1}$, $A_d(x_k) = \tilde{L}(x_k)[E + 0,3A(x_k)]$ и вектор $b_d(x_k) = 0,6\tilde{L}(x_k)b(x_k)$. По матрице $A_d(x_k)$ и вектору $b_d(x_k)$, используя выражения (9) и (10), вычисляем полиномы:

$$A_d(z, x_k) = z^3 + \alpha_2(x_k)z^2 + \alpha_1(x_k)z + \alpha_0(x_k); \quad (42)$$

$$V_{d,i}(z, x_k) = v_{i,2}(x_k)z^2 + v_{i,1}(x_k)z + v_{i,0}(x_k), \quad i = 1, 2, 3. \quad (43)$$

На основе полиномов $D^*(z)$ и $A_d(z, x_k)$ (42) находим коэффициенты $\rho_0(x_k) = \delta_0^* - \alpha_0(x_k)$, $\rho_1(x_k) = \delta_1^* - \alpha_1(x_k)$, $\rho_2(x_k) = \delta_2^* - \alpha_2(x_k)$, а по коэффициентам $v_{i,j}(x_k)$ полинома (43) и $\rho_j(x_k)$ записываем систему (14) из трех линейных алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами. Решение системы (14): $l(x_k) = [l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ l_3(x_k)]^T$.

Для решения основной задачи статьи – сравнения эффективности выражений (29), (30) и (38), (39) – сначала используем первые выражения, т.е. по (29) находим значение $\gamma_{об,1}(x_k)$, а по (30) – значение $l_{g,1}(x_k)$. По коэффициенту $l_{g,1}(x_k)$ и найденному выше вектору $l(x_k)$ записываем управление (8) $u = u_k(x_k, g_k) = l_{g,1}(x_k)g_k - l'(x_k)x_k$ и осуществляем интегрирование системы (40) в течение 0,6 с при заданном x_0 , т.е. вычисляем значение $x_1 = x(0,6)$.

Далее полагаем $k=1$, полученный вектор $x_1 = x(0,6)$ принимаем в качестве начального значения x_0 , т.е. полагаем $x_0 = x(0,6)$, и повторяем все операции, описанные выше при $k = 0$. При имитационном моделировании гибридных систем на компьютере выполняем все описанные действия с периодом T и увеличиваем $k = k + 1$ до наступления установившегося режима. При этом процесс интегрирования уравнений объекта (в данном примере уравнений (40)) фактически является имитацией работы объекта. Таким образом, при функционировании реальной гибридной системы компьютер осуществляет только описанные выше алгебраические операции, а определение вектора x_{k+1} осуществляется измерениями с тем же периодом T . Именно поэтому для реализации гибридных систем нет необходимости применять быстродействующие многоядерные контроллеры. Для изучения свойств гибридной системы управления объектом (40) при использовании выражений (38) и (39) вектор $l(x_k)$ определяем аналогично предыдущему случаю, но величину $\gamma_{об,2}(x_k)$ находим по формуле (38), а коэффициент $l_{g,2}(x_k)$ – по формуле (39). Затем по (8) записываем управление $u = u_k(x_k, g_k) = l_{g,2}(x_k)g_k - l'(x_k)x_k$, и в дальнейшем процесс протекает аналогично предыдущему.

Исследование гибридной системы управления (40), (8) проводилось описанным способом в MATLAB. При этом уравнения (40) интегрировались как

непрерывные с помощью ODE-45. Результаты имитационного моделирования при использовании выражений (29) и (30) приведены на рис. 1 и 2. При использовании выражений (38) и (39) получились совершенно аналогичные графики.

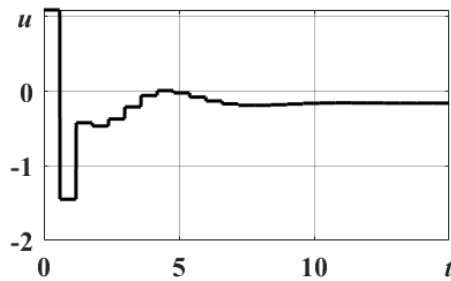


Рис. 1. График управления

Fig. 1. Chart of control

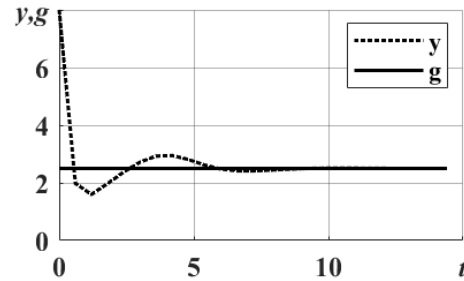


Рис. 2. Графики задающего воздействия и выходной переменной

Fig. 2. Charts of reference action and output variable

Таким образом, несмотря на то что выражения (29) и (30) получены на основе точных дискретно-непрерывных уравнений гибридной системы, а выражения (38) и (39) найдены из приближенной дискретной квазилинейной модели непрерывного объекта и соответствующей дискретной системы, переходные процессы гибридной системы в обоих случаях очень близки, а установившиеся процессы полностью идентичны. Это позволяет заключить, что выражения (38) и (39) эквивалентны выражениям (29) и (30) и $\Omega_{sys2} = \Omega_{sys1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показано, что дискретная квазилинейная модель непрерывных объектов с дифференцируемыми нелинейностями является достаточно хорошей приближенной моделью и может использоваться для создания нелинейных систем управления различных типов. Подтверждением этого вывода является практически полная идентичность переходных и установившихся режимов полученной гибридной системы при различных способах определения коэффициента передачи дискретного (цифрового) устройства управления по задающему воздействию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pengcheng Z., Shankar M., Ram V. Optimal control for nonlinear hybrid systems via convex relaxations // arXivpreprint. – arXiv:1702.04310, 2018.
2. Hai L. Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification // Foundations and Trends® in Systems and Control. – 2014. – Vol. 1 (1). – P. 1–172. – DOI: 10.1561/2600000001.
3. Hybrid adaptive control of nonlinear systems with non-Lipschitz nonlinearities / F. Jun, M. Zixiao, F. Yue, C. Tianyou // Systems & Control Letters. – 2021. – Vol. 156. – P. 105012. – DOI: 10.1016/j.sysconle.2021.105012.
4. Kuo C.-Y., Wang S.P.T. Nonlinear robust hybrid control of robotic manipulators // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1990. – Vol. 112 (1). – P. 48–54. – DOI: 10.1115/1.2894138.

5. Ziming W. Hybrid Event-triggered control of nonlinear system with full state constraints and disturbance // arXivpreprint. – arXiv: 2405.13564, 2024.
6. Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R. Hybrid dynamical systems: modeling, stability, and robustness. – Princeton University Press, 2012. – 232 p.
7. Hybrid controller synthesis for nonlinear systems subject to reach-avoid constraints / Z. Yang, L. Zhang, X. Zeng, X. Tang, C. Peng, Z. Zeng // Computer Aided Verification. CAV 2023. – Springer, 2023. – P. 304–325. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 13964). – DOI: 10.1007/978-3-031-37706-8_16.
8. Алмашаал М.Д., Гайдук А.Р. К выбору периода дискретизации нелинейных гибридных систем управления // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 1 (93). – С. 7–20. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-1-7-20.
9. Гайдук А.Р. Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021 – Т. 22, № 6. – С. 283–290. – DOI: 10.17587/mau.22.283-290.
10. Kaikina E.I., Naumkin P.I., Shishmarev I.A. Cauchy problem for non-linear systems of equations in the critical case // Sbornik: Mathematics. – 2004. – Vol. 195 (11). – P. 1575–1605.
11. Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабала А.Е.А. Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // Математические методы в технологиях и технике. – 2022. – № 1. – С. 41–45. – DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_1_41.
12. Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. Основы теории разрывных систем. I // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 7. – С. 33–47.
13. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
14. On the global stability of nonlinear hurwitz control systems / A.R. Gaiduk, N.N. Prokopenko, A.V. Bugakova, M.J. Almashaal // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. – 2024. – Vol. 21 (1). – P. 502–511. – DOI: 10.1109/TASE.2022.3225763.
15. Гайдук А.Р. Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: Учебная литература, 2004. – 252 с.
16. Гулюкина С.И., Уткин В.А. Синтез инвариантных систем при несогласованных возмущениях на основе теории скользящих режимов // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2021: труды 14-й Международной конференции. – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 607–614. – DOI: 10.25728/3233.2021.92.90.001.

Алмашаал Мохаммад Джалаль, старший преподаватель Казанского национального исследовательского технологического университета, старший преподаватель Казанского государственного энергетического университета. Основное направление научных исследований – робототехника и системы управления. E-mail: Almashaal.jalal@gmail.com

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры систем автоматического управления Южного федерального университета, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – методы анализа и синтеза линейных и нелинейных непрерывных и дискретных систем управления и робототехнических комплексов. Имеет более 500 публикаций, в том числе 25 монографий, свыше 30 учебных пособий. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Almashaal Mohammad J., senior lecturer at Kazan National Research Technological University. Senior lecturer at Kazan State Power Engineering University. His main research interests are robotics and control systems. E-mail: Almashaal.jalal@gmail.com

Gaiduk Anatoly R., PhD (Eng.), professor, professor of the Automatic Control Systems Department, Southern Federal University, full member of the A.M. Prokhorov Academy of Engineering Sciences. His research interests include: methods of the analysis and design of linear and nonlinear, continuous and discrete control systems and robotic complexes. He has published more than 500 publications, 25 monography and 30 teaching manuals. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-25-38

On the determination of the static error of hybrid nonlinear control systems*M.J. ALMASHAAL^{1,a}, A.R. GAIDUK^{2,b}¹ Kazan National Research Technological University, 68 Karl Marx Street, Kazan, 420015, Russian Federation² Southern Federal University, 44 Nekrasovsky Pereulok, Taganrog, 347922, Russian Federation^a almashaal.jalal@gmail.com ^b gaiduk_2003@mail.ru**Abstract**

Hybrid systems are often used in various technical applications, such as robotics, aviation, space, energy, etc. The emergence of hybrid control systems is due to the fact that computing tools cannot implement control laws, including nonlinear ones, quickly enough. This article presents a method for synthesizing hybrid control systems for nonlinear plants specified by a quasilinear model (QLM). A distinctive feature of this method is to provide a significantly larger control discretization period compared to known methods. The method is focused on the use of a discrete quasilinear model (DQLM) of a given plant with differentiable nonlinearities and a measurable state vector. Based on this model, discrete control is created that ensures the dynamic stability of the hybrid nonlinear system. The problem considered in the article is to select a connection for a reference input, in which the system has a zero static error. The article compares two methods for determining the depth of this connection for an exact and an approximate model of a hybrid system. The efficiency of these methods is assessed by comparing the control processes in one and the other case. The obtained results demonstrate a high degree of closeness of both models, which confirms the efficiency of the discrete quasilinear model as a tool for designing discrete and hybrid nonlinear control systems. The results of this research are aimed at developing new approaches that contribute to improving the quality of hybrid nonlinear systems, in particular, by ensuring zero static error in the reference input. This increases the system's adaptability to changes in external conditions and enhances its effectiveness in solving complex technical problems.

Keywords: Nonlinear plant, quasilinear model, discrete quasilinear model, discrete control device, hybrid nonlinear system, stability, steady-state error, equilibrium position

REFERENCES

1. Pengcheng Z, Shankar M., Ram V. *Optimal control for nonlinear hybrid systems via convex relaxations*. arXiv:1702.04310, 2018.
2. Hai L. Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification. *Foundations and Trends® in Systems and Control*, 2014, vol. 1 (1), pp. 1–172. DOI: 10.1561/2600000001.
3. Jun F., Zixiao M., Yue F., Tianyou C. Hybrid adaptive control of nonlinear systems with non-Lipschitz nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 2021, vol. 156, p. 105012. DOI: 10.1016/j.sysconle.2021.105012.
4. Kuo C.-Y., Wang S.P.T. Nonlinear robust hybrid control of robotic manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1990, vol. 112 (1), pp. 48–54. DOI: 10.1115/1.2894138.
5. Ziming W. *Hybrid event-triggered control of nonlinear system with full state constraints and disturbance*. arXiv:2405.13564, 2024.
6. Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R. *Hybrid dynamical systems: modeling, stability, and robustness*. Princeton University Press, 2012. 232 p.
7. Yang Z., Zhang L., Zeng X., Tang X., Peng C., Zeng Z. Hybrid controller synthesis for nonlinear systems subject to reach-avoid constraints. *Computer Aided Verification. CAV 2023. Lecture*

* Received 19 May 2025.

The research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-19-00063.

Notes in Computer Science, vol. 13964. Springer, 2023, pp. 304–325. DOI: 10.1007/978-3-031-37706-8_16.

8. Almashaal M.D., Gaiduk A.R. K vyboru perioda diskretizatsii nelineinykh gibridnykh sistem upravleniya [On the choice of the sample period of nonlinear hybrid control systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 1 (93), pp. 7–20. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-1-7-20.

9. Gaiduk A.R. Chislennyi metod sinteza kvazilineinykh modelei nelineinykh ob"ektov [Numerical design method of quasilinear models for nonlinear objects]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie = Mechatronics, automation, control*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 283–290. DOI: 10.17587/mau.22.283-290.

10. Kaikina E.I., Naumkin P.I., Shishmarev I.A. Cauchy problem for non-linear systems of equations in the critical case. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195 (11), pp. 1575–1605.

11. Gaiduk A.R., Plaksienko V.S., Kabalan A.E.A. Algebraicheskie polinomial'no-matrichnyi metod sinteza nelineinykh astaticheskikh sistem [Algebraic polynomial-matrix design method of nonlinear astatic systems]. *Matematicheskie metody v tekhnologiyakh i tekhnike = Mathematical methods in Technology and Engineering*, 2022, no. 1, pp. 41–45. DOI: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_1_41.

12. Aizerman M.A., Pyatnitsky E.S. Osnovy teorii razryvnykh sistem. I [Fundamentals of the theory of discontinuous systems. I]. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1974, no. 7, pp. 33–47. (In Russian).

13. Boltyanskii V.G. *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. 2nd ed., rev. and enl. Moscow, Nauka Publ., 1969, 408 p.

14. Gaiduk A.R., Prokopenko N.N., Bugakova A.V., Almashaal M.J. On the global stability of nonlinear hurwitz control systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, vol. 21 (1), pp. 502–511. DOI: 10.1109/TASE.2022.3225763.

15. Gaiduk A.R. *Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy* [Continuous and discrete dynamic systems]. Moscow, Uchebnaya literatura Publ., 2004. 252 p.

16. Gulyukina S.I., Utkin V.A. [Synthesis of invariant systems under uncoordinated disturbances based on the theory of sliding modes]. *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh sistem MLSD'2021* [Management of Large-Scale Systems Development (MLSD-2021)]. Proceedings of the 14th International Conference. Moscow, 2021, pp. 607–614. DOI:10.25728/3233.2021.92.90.001. (In Russian).

Для цитирования:

Алмашаал М.Д., Гайдук А.Р. К определению статической ошибки гибридных нелинейных систем управления // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 4 (100). – С. 25–38. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-25-38.

For citation:

Almashaal M.J., Gaiduk A.R. K opredeleniyu staticheskoi oshibki gibridnykh nelineinykh sistem upravleniya [On the determination of the static error of hybrid nonlinear control systems]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and data processing systems*, 2025, no. 4 (100), pp. 25–38. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-25-38.