

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.876.5

DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-123-136

Инструментальное моделирование гибридной системы маятника с отрывом^{*}

Ю.В. ШОРНИКОВ^а, К.А. ТИМОФЕЕВ^б, М.О. ФИЛИМОНОВ^с

РФ, 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет

^а shornikov@corp.nstu.ru ^б k.timofeev@corp.nstu.ru ^с m.filimonov@corp.nstu.ru

В работе рассматривается задача моделирования маятника с отрывающейся опорой, представляющая практический интерес при проектировании механических систем в робототехнике, аэрокосмической инженерии и биомеханике. Особенность этой задачи заключается в переходе системы в гибридный режим, требующий переключения между разными системами дифференциальных уравнений в момент отрыва.

Основная сложность заключается в определении начального угла и угла отрыва, обеспечивающих выполнение условия приземления: попадание конца маятника в заданную область с требуемым углом. Это приводит к необходимости решения не только задачи динамического моделирования гибридной системы, но и сопутствующей оптимизационной задачи. Сложность оптимизационной задачи определяется тем, что области значений начального угла маятника и угла отрыва, в которых удовлетворяется условие приземления по углу, достаточно узкие. Для эффективного численного моделирования подобной системы с учетом необходимости точного определения точки приземления требуется учет детекции события пересечения вертикальной координатой маятника уровня земли, так как при неточном определении точки приземления корректно определить области, в которых удовлетворяется условие приземления, становится затруднительно.

В статье предложен численный метод расчета траектории маятника с учетом отрыва, а также алгоритм оптимизации начальных параметров. Проведен анализ влияния различных факторов на точность приземления, включая начальную скорость, длину маятника и момент отрыва. Результаты могут быть использованы при проектировании механизмов с переменной структурой, а также в задачах управления движением антропоморфных роботов и спортивной биомеханики.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, физический маятник, гибридные системы, оптимизация, механика твердого тела, программная модель, численные методы, диагонально-невяные, моделирование, динамика

^{*} Статья получена 15 октября 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании динамики мехатронных систем часто встречаются ситуации, при которых необходимо решать задачи, возникающие при отделении элементов твердого тела. Такого рода проблемы возникают, например, при моделировании систем с люфтами или отделяющихся элементов космических аппаратов. Такого рода задачи относятся к классу задач негладкой механики и приводят к необходимости моделирования динамики гибридных систем. Для моделирования подобных задач могут применяться программные комплексы для моделирования динамических задач общего назначения (Simulink, Modelica, SimInTech) и специализированные комплексы для моделирования систем твердых тел (ADAMS, «Универсальный механизм», Euler). Одной из проблем при моделировании и оптимизации такого рода систем является корректное обнаружение события разделения, так как если момент разделения зависит от фазовой переменной, то при численном моделировании он заранее неизвестен. Численное моделирование подобных задач приводит к необходимости детекции событий, коррекции шага интегрирования и порядка метода интегрирования в момент перехода от одного состояния системы к другому, так как от этого будет сильно зависеть точность моделирования такой системы.

При моделировании задачи отрывающегося маятника возникает необходимость численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с учетом переменной структуры системы уравнений. Для решения данной задачи была использована отечественная среда динамического моделирования SimInTech [1], которая позволяет решать задачи моделирования динамики и оптимизации моделей. Программные модели в SimInTech специфицируются графическим языком структурных схем и символьным представлением в виде алгебро-дифференциальных уравнений средствами встроенного языка программирования PL. Библиотека численных методов в системе моделирования SimInTech состоит из традиционных и оригинальных численных схем интегрирования ОДУ [2, 3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема механической системы с отрывающимся физическим маятником [4, 5] приведена на рис. 1.

Механическая система состоит из физического маятника [6], в данной задаче имеющего стержень круглого сечения длиной L_0 , массой m и с моментом инерции $J = mL_0^2/12$ [7], подвешенного за один конец на вращающейся опоре высотой H с одной степенью свободы. При некотором неизвестном угле отклонения маятника α_k опора разрушается и маятник свободно падает в равномерном поле тяготения с ускорением свободного падения g .

Задача состоит в том, чтобы подобрать начальные углы маятника $\alpha(0)$ и критический угол разрушения α_k так, чтобы координата конца маятника x_{end} находилась в диапазоне $[L_0, 2L_0]$, а координата y_{end} совпадала бы с уровнем земли и была равна H и при этом выполнялись условия корректного приземления $|\alpha| < \alpha_{max}$, где α_{max} – это максимально допустимое отклонение

стержня от вертикали. При этом должно быть выполнено условие, что вертикальная координата начала стержня y_{start} должна оставаться больше, чем уровень земли до достижения условий приземления. Если же y_{start} пересечет уровень земли раньше, чем y_{end} , то приземление считается неудачным.

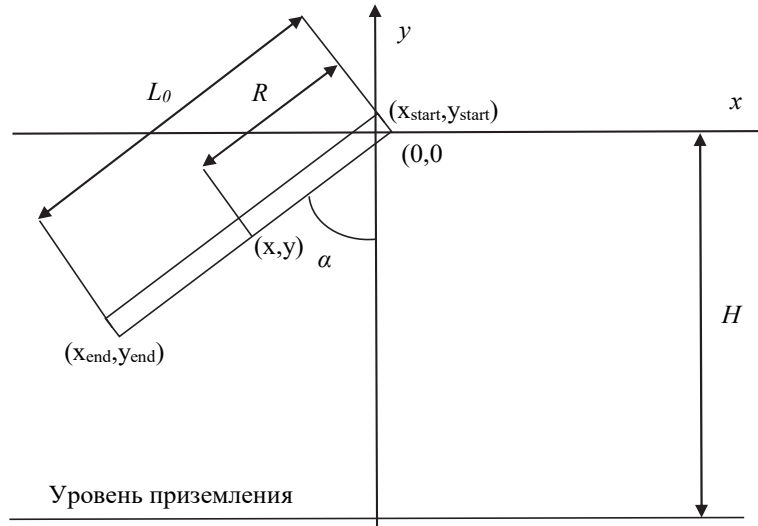


Рис. 1. Схема механической системы с отрывающимся физическим маятником

Fig. 1. Schematic diagram of a mechanical system with a breakaway physical pendulum

Координаты конца маятника вычисляются так:

$$x_{end} = x + R \sin(\alpha), \quad y_{end} = y - R \cos(\alpha). \quad (1)$$

Координаты начала маятника вычисляются по формуле

$$x_{start} = x - R \sin(\alpha), \quad y_{start} = y + R \cos(\alpha). \quad (2)$$

До тех пор, пока опора не разрушена ($x_{start} = 0$ и $y_{start} = 0$), если маятник является недеформируемым, то его угол наклона α и координата центра масс маятника (x, y) однозначно связаны следующими соотношениями:

$$x = R \sin(\alpha), \quad y = -R \cos(\alpha), \quad (3)$$

где R – расстояние от оси до центра масс маятника.

Из кинематических уравнений (3) можно вывести уравнения, связывающие ускорения центра масс с угловой скоростью и угловым ускорением маятника. Для этого достаточно продифференцировать уравнения (3):

$$\begin{aligned} x' &= (R \sin(\alpha))' = R(\alpha' \cos(\alpha)), \\ x'' &= R(\alpha' \cos(\alpha))' = R(\alpha'' \cos(\alpha) - \alpha' \alpha' \sin(\alpha)). \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом того, что $\alpha' = \omega$ – угловая скорость маятника, а $x' = v_x$ – горизонтальная компонента скорости центра масс, ускорение центра масс по оси x при маятниковом движении будет равно

$$v'_x = R(\omega' \cos(\alpha) - \omega^2 \sin(\alpha)). \quad (5)$$

Аналогичным образом получаем ускорение по оси y при маятниковом движении:

$$\begin{aligned} y' &= (-R \cos(\alpha))' = R(\alpha' \sin(\alpha)), \\ y'' &= R(\alpha' \sin(\alpha))' = R(\alpha'' \sin(\alpha) + \alpha' \alpha' \cos(\alpha)). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом того, что $y' = v_y$ – вертикальная компонента скорости центра масс, ускорение центра масс по оси y при маятниковом движении будет равно

$$v'_y = R(\omega' \sin(\alpha) + \omega^2 \cos(\alpha)). \quad (7)$$

Таким образом, такая механическая система может быть описана следующей гибридной [8] системой дифференциальных уравнений в форме Коши:

а) в режиме колебаний маятника

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' = \frac{-R \sin(\alpha) mg}{J}, \\ v'_x = R(\omega' \cos(\alpha) - \omega^2 \sin(\alpha)), \\ v'_y = R(\omega' \sin(\alpha) + \omega^2 \cos(\alpha)), \quad \alpha < \alpha_k, \\ \alpha' = \omega, \\ x' = v_x, \\ y' = v_y; \end{array} \right. \quad (8)$$

б) в режиме свободного падения (фаза отрыва от опоры)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' = 0, \\ v'_x = 0, \\ v'_y = -g, \\ \alpha' = \omega, \\ x' = v_x, \\ y' = v_y, \\ \alpha \geq \alpha_k \end{array} \right. \quad (9)$$

с начальными условиями, полученными из кинематических соотношений $\omega(0) = \omega_0$, $v_x(0) = R(\omega_0 \cos(\alpha))$, $v_y(0) = R(\omega_0 \sin(\alpha))$, $\alpha(0) = \alpha_0$,

$x(0) = R \sin(\alpha_0)$, $y(0) = -R \cos(\alpha_0)$. Для этой задачи начальная угловая скорость принимается $\omega_0 = 0$.

Для нахождения α_0 и α_k необходимо решить оптимизационную задачу, где целевая функция вычисляется на основе детекции событий пересечения уровня земли траекторией конца маятника [9]:

$$f(\alpha_0, \alpha_k) = \begin{cases} x_{end}(t_{end}), p_{end} \\ 0, -p_{end}, \end{cases} \quad (10)$$

где предикат p_{end} запоминания значения целевой функции равен

$$p_{end} = ((t = t_{end}) \wedge (t_{end} > t_{start}) \wedge (|\alpha(t_{end})| < \alpha_{\max})) \wedge (x_{end} \in [L_0, 2L_0]). \quad (11)$$

В (9) время детекции t_{end} первого события пересечения концом маятника уровня земли, при котором выполняется условие

$$|y_{end}(t_{end}) - (-H)| < \varepsilon. \quad (12)$$

Здесь t_{start} – время детекции первого события пересечения началом маятника уровня земли, при котором выполняется условие

$$|y_{start}(t_{start}) - (-H)| < \varepsilon, \quad (13)$$

где ε – заданная точность детекции события пересечения.

Определение времени события может быть выполнено при помощи одного из численных алгоритмов детекции событий в гибридных системах [10, 11] в процессе моделирования динамики системы. Оптимизация может выполняться методом сопряженных градиентов [12].

2. КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ

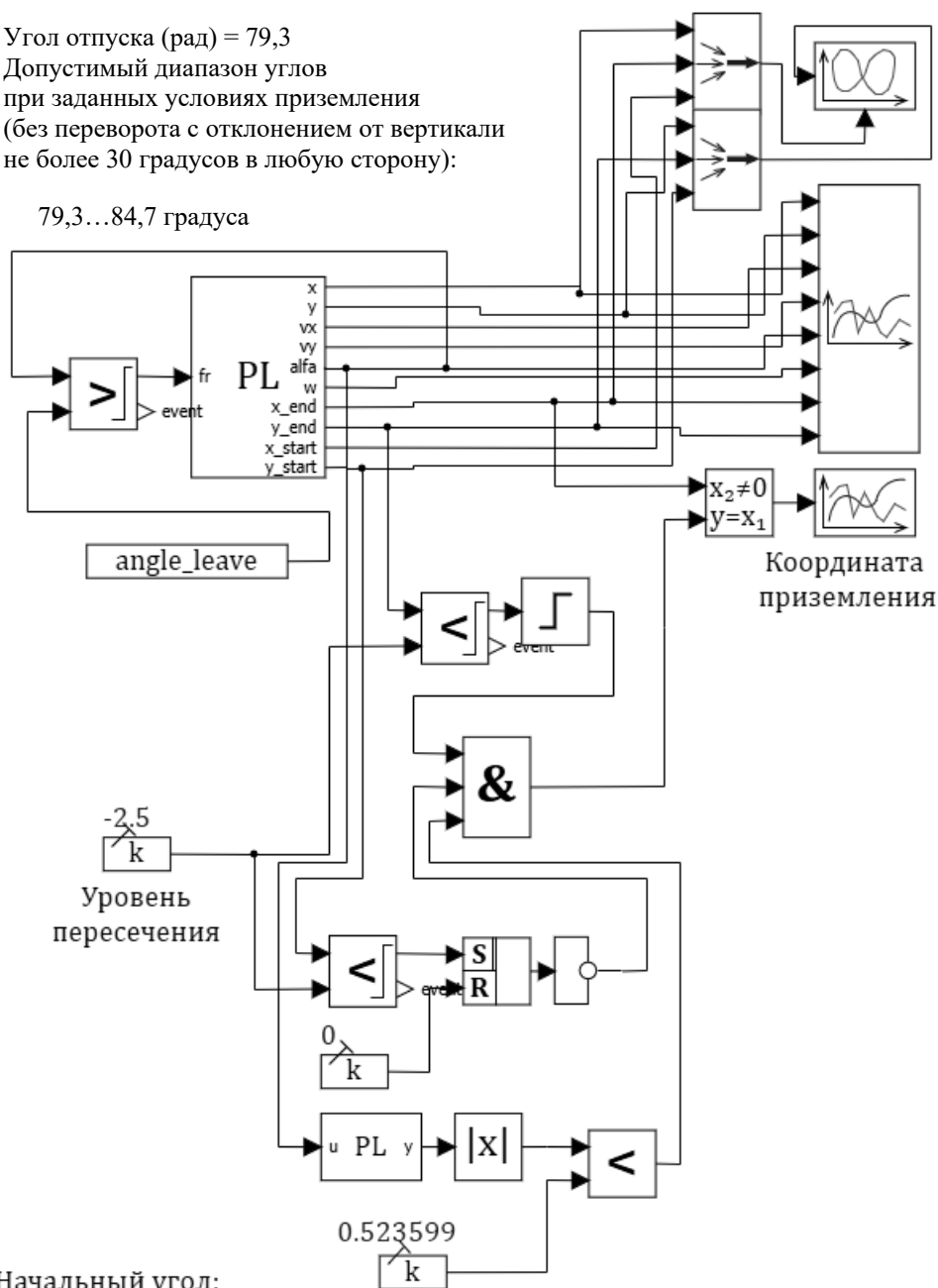
Структурная схема компьютерной модели динамики отрывающегося маятника в программном комплексе SimInTech приведена на рис. 2. Модель состоит из системы уравнений динамики маятника, а также модели вычисления функционала оптимизации и блока оптимизации, при помощи которых осуществляется поиск угла отрыва.

Модель определения события приземления выполнена в виде структурной схемы и включает 2 блока сравнения с детекцией событий для точного вычисления условия приземления, а также триггер для фиксации момента пересечения в текущем вычислительном эксперименте. Модель определяет координату приземления по горизонтальной оси, которая поступает на вход блока оптимизации. При этом координата приземления запоминается только при удовлетворении условий приземления. Блок оптимизации выполняет серию последовательных вычислений модели с разным углом отрыва, подбирая его так, чтобы координата точки приземления лежала в заданном диапазоне.

Угол отпуска (рад) = 79,3

Допустимый диапазон углов
при заданных условиях приземления
(без переворота с отклонением от вертикали
не более 30 градусов в любую сторону):

79,3...84,7 градуса



Начальный угол:

$\text{alfa0} = -100 \cdot \pi / 180$ (100 градусов)

при углах выше задача условия
приземления не удовлетворяется

Допустимое угловое отклонение
при приземлении < 30 градусов.

Если угол выше, то событие
приземления не засчитывается

Рис. 2. Компьютерная модель в SimInTech

Fig. 2. Computer model in SimInTech

Ниже приведен листинг текстового описания системы уравнений на встроенном языке программирования SimInTech:

```
input fr:boolean;

//Начальные условия
init w = 0,
alfa = alfa0,
    y = -R*cos(alfa0),
    vy = w*R*sin(alfa0),
    x = R*sin(alfa0),
    vx = w*R*cos(alfa0);

output x,y,vx,vy,alfa,w,x_end,y_end,x_start,y_start;

alfa' = w; y' = vy; x' = vx;

//Угловые коэффициенты
sinalfa = sin(alfa); cosalfa = cos(alfa);

//Дифференциальные уравнения
if fr then begin
//Свободное падение в равномерном гравитационном поле
    w' = 0; vy' = -g; vx' = 0;
end
else begin
//Вращательное движение на фиксированной оси
    w' = -R*sinalfa*m*g/J;
    vx' = R*( w'*cosalfa - w*w*sinalfa );
    vy' = R*( w'*sinalfa + w*w*cosalfa );
end;

//Вычисление траектории конца маятника
x_end = x + R*sinalfa; y_end = y - R*cosalfa;
//Вычисление траектории начала маятника
x_start = x - R*sinalfa; y_start = y + R*cosalfa;
```

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Моделирование выполнялось в ПК SimInTech с параметрами расчета, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Параметры расчёта модели

Model calculation parameters

Параметр	Значение
Минимальный шаг, с	0,0001
Максимальный шаг, с	0,01
Метод интегрирования	ARK21(Адаптивный 1)
Конечное время расчета, с	2,25
Относительная ошибка	0,0001
Абсолютная ошибка	0,000001
Длина маятника L_0 , м	2
Ускорение свободного падения g , м/с ²	9,81
Масса маятника, кг	80
Момент инерции маятника	26,6(6)
Расстояние от центра оси до центра масс маятника R , м	1
Высота подвеса маятника над землей H , м	2,5

В результате проведенных численных экспериментов были получены следующие параметры модели, при которых удовлетворяется условия по приземлению, приведённые в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

Параметры модели, удовлетворяющие условию приземления

Model parameters satisfying the landing condition

Начальный угол, $\alpha_{\max}$ (градусов)	Диапазон угла отрыва, α_k (градусов)
100	79,3...84,7
140	84,8...90

Траектории центра масс, конца и начала маятника для начального угла 100° и угла отрыва 80,1563° приведены на рис. 4. Графики зависимости параметров модели от времени приведены на рис. 5. Траектории центра масс, конца и начала маятника для начального угла 140° и угла отрыва 85,7812° приведены на рис. 6.

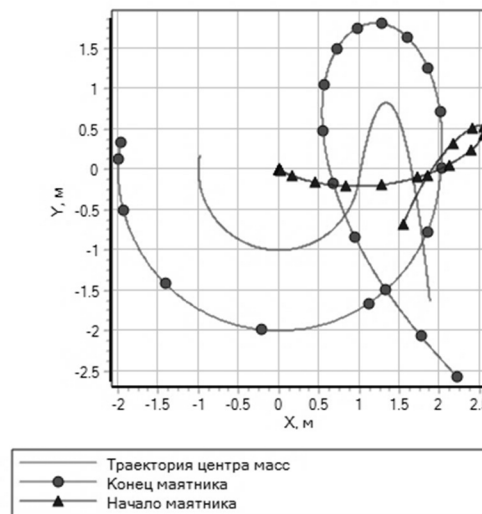


Рис. 3. Траектории центра масс, конца и начала маятника для начального угла 100° и угла отрыва $80,1563^\circ$

Fig. 3. Trajectories of the center of mass, the end and beginning of the pendulum for an initial angle of 100° and a breakaway angle of $80,1563^\circ$

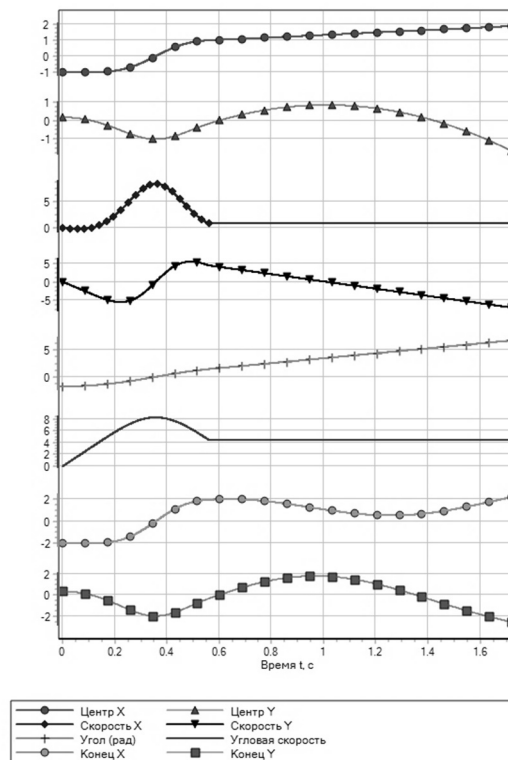


Рис. 4. Параметры модели для начального угла 100° и угла отрыва $80,1563^\circ$

Fig. 4. Model parameters for an initial angle of 100° and a breakaway angle of $80,1563^\circ$

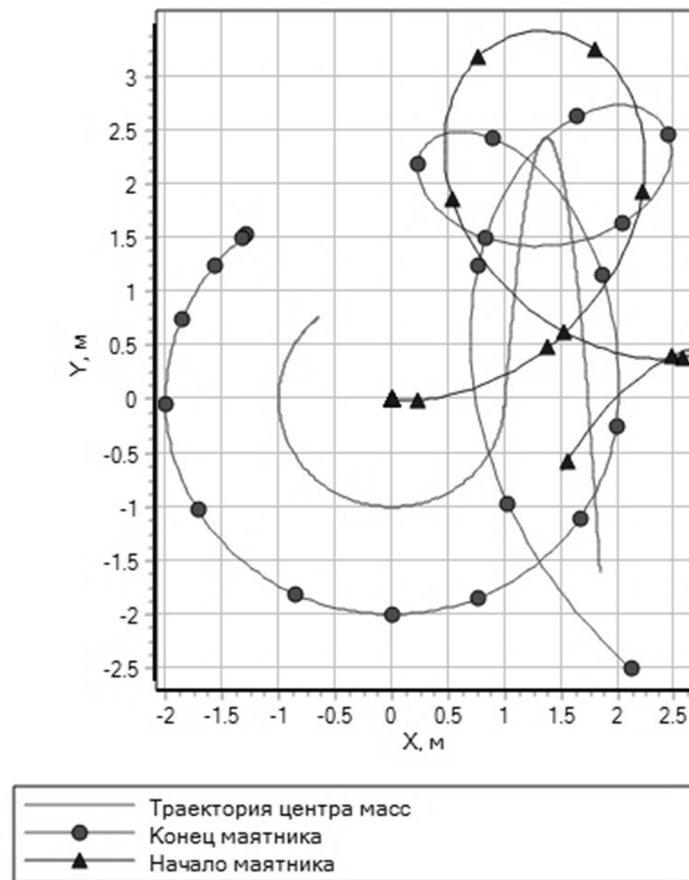


Рис. 5. Траектории центра масс, конца и начала маятника для начального угла 140° и угла отрыва $85,7812^\circ$

Fig. 5. Trajectories of the center of mass, the end and beginning of the pendulum for an initial angle of 140° and a breakaway angle of $85,7812^\circ$

Результаты моделирования, демонстрируют несколько ключевых аспектов решения задачи гибридной системы маятника с отрывом.

1. Узкие диапазоны допустимых параметров (см. табл. 2): для начального угла $\alpha_0 = 100^\circ$ угол отрыва α_p варьируется в диапазоне $79,3 \dots 84,7^\circ$ (всего $5,4^\circ$). Для $\alpha_0 = 140^\circ$ диапазон α_p сужается до $84,8 \dots 90^\circ$ (всего $5,2^\circ$). Узкие интервалы подтверждают высокую чувствительность системы к параметрам и сложность оптимизационной задачи. Незначительные отклонения угла отрыва делают приземление невозможным.

2. Траектории движения (рис. 4, 6): при $\alpha_0 = 100^\circ$ маятник совершает почти полное колебание перед отрывом, формируя сложную траекторию с выраженной петлей (рис. 4); при $\alpha_0 = 140^\circ$ отрыв происходит раньше, траектория ближе к параболической (рис. 6). Различия в траекториях объясняют, почему для разных начальных условий требуются существенно отличающиеся углы отрыва.

3. Влияние начальных условий: увеличение α_0 с 100° до 140° смещает допустимый α_p вверх на $5...6^\circ$. Более высокий начальный угол обеспечивает большую потенциальную энергию, что требует более позднего отрыва для точного приземления.

Использование адаптивного метода ARK21 с жесткими допусками и детекции событий гарантирует точное определение момента пересечения уровня земли (рис. 5). Реализация в SimInTech подтвердила эффективность гибридного моделирования: переключение между системами ОДУ (6) и (7) происходит без потери устойчивости. Результаты доказывают, что для успешного приземления необходимо контролировать не только координату конца маятника (x_{end}), но и угол приземления $|\alpha| < \alpha_{max}$ (рис. 5). Найденные диапазоны α_k могут служить эталоном для настройки аналогичных систем в робототехнике (например, прыгающих роботов [13]), биомеханике [14] и компьютерной анимации [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи оптимизации траектории полета отрывающегося маятника подразумевает необходимость детекции событий пересечения как при вычислении динамики маятника в момент его отрыва от подвеса, так и при вычислении функционала оптимизации, так как для его корректного вычисления необходимо максимально точно зафиксировать момент пересечения конца и начала маятника уровня земли. Использование детекции событий позволяет значительно более точно определить диапазон допустимого угла отрыва за счет исключения пропусков событий пересечения, так как их конечное время заранее неизвестно. Моделирование успешно решило поставленную задачу, выявив критическую зависимость приземления от угла отрыва и подтвердив эффективность гибридного подхода.

В дальнейшем предполагается увеличить количество оптимизируемых параметров модели и применить более совершенные методы оптимизации для получения оптимальных значений начальных углов и скоростей, а также угла отрыва. Также модель будет расширена для многосвязного маятника с изменяемой конфигурацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Среда динамического моделирования технических систем SimInTech: практикум по моделированию систем автоматического регулирования / Б.А. Карташов, Е.А. Шабаев, О.С. Козлов, А.М. Щекатуров. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 424 с. – ISBN 978-5-97060-482-3.
2. Сковорцов Л.М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 230 с. – ISBN 978-5-97060-636-0.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
4. Колесов Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. – 210 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 т. Т. 1. Механика. – СПб.: Лань, 2011. – 448 с.
6. Юдинцев В.В. Уравнения движения системы связанных твердых тел с переменной структурой // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сборник трудов X Всерос-

сийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара, 2002. – С. 128–134.

7. *Serway R.A.* Physics for Scientists and Engineers. – 2nd ed. – Saunders College Publishing, 1986. – 202 p. – ISBN 0-03-004534-7.

8. *Esposito J., Kumar V., Pappas G.J.* Accurate event detection for simulating hybrid systems // Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC). – Springer, 1998. – P. 204–217. – (LNCS; vol. 2034).

9. *Новиков Е.А., Шорников Ю.В.* Компьютерное моделирование жестких гибридных систем: монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 451 с. – ISBN 978-5-7782-2023-2. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/558790> (дата обращения: 27.11.2025).

10. Specific characteristics of numerical simulation of mechatronic systems with PWM-controlled drives / A. Achitayev, K. Timofeev, K. Suslov, Y. Kalachev, Y. Shornikov // Modelling. – 2024. – Vol. 5. – P. 1375–1394. – DOI: 10.3390/modelling5040071.

11. *Shpak V.V., Timofeev K.A., Shornikov Y.V.* Numerical analysis of mechatronic systems with pulse width modulation // 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), Altai, Russian Federation, 2024. – IEEE, 2024. – P. 1910–1913. – DOI: 10.1109/EDM61683.2024.10614951.

12. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H.* Practical optimization. – London: Academic Press, 1981. – 401 p.

13. Stickman: Towards a human scale acrobatic robot / M.T. Pope, S. Christensen, D. Christensen, A. Simeonov, G. Imahara, G. Niemeyer // 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Brisbane, QLD, Australia, 2018. – IEEE, 2018. – P. 2134–2140. – DOI: 10.1109/ICRA.2018.8462836.

14. *Yeadon M.R.* The biomechanics of twisting somersaults. Pt. I: Rigid body motions // Journal of Sports Sciences. – 1993. – Vol. 11 (3). – P. 187–198.

15. *Ha S., Ye Y., Liu C.K.* Falling and landing motion control for character animation // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2012. – Vol. 31 (6). – P. 155.

Шорников Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета, старший научный сотрудник Института автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук (ИАиЭ СО РАН). Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследование гибридных динамических систем. Имеет более 200 печатных работ. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Тимофеев Константин Александрович, аспирант кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, исследование динамических систем. Имеет более 10 печатных работ. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

Филимонов Максим Олегович, магистрант кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. E-mail: m.filimonov@corp.nstu.ru

Shornikov Yury V., D. Sc. (Eng.), professor at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University, senior researcher at the institute of automation and electrometry, Siberian branch of the Russian academy of sciences. The main direction of his scientific research is mathematical modeling and research of hybrid dynamic systems. He has over 200 publications. E-mail: shornikov@corp.nstu.ru

Timofeev Konstantin A., postgraduate at the department of automated control systems, Novosibirsk State Technical University. Hi main direction of scientific research is mathematical modeling, and studies of dynamic systems. He has more than 10 publications. E-mail: k.timofeev@corp.nstu.ru

Filimonov Maksim O., Master's student at the Department of Automated Control Systems in Novosibirsk State Technical University. E-mail: m.filimonov@corp.nstu.ru

Instrumental modeling of a hybrid pendulum system with a breakaway*YU.V. SHORNIKOV^a, K.A. TIMOFEEV^b, M.O. FILIMONOV^c

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a shornikov@corp.nstu.ru ^b k.timofeev@corp.nstu.ru ^c m.filimonov@corp.nstu.ru**Abstract**

The paper considers the problem of modeling a pendulum with a breakaway support, which is of practical interest in the design of mechanical systems in robotics, aerospace engineering and biomechanics. The peculiarity of this problem is the transition of the system to a hybrid mode, which requires switching between different systems of differential equations at the moment of breakaway.

The main difficulty lies in determining the initial angle and the breakaway angle, ensuring the fulfillment of the landing conditions: the pendulum end hitting a given area with the required angle. This leads to the need to solve not only the problem of dynamic modeling of a hybrid system, but also the accompanying optimization problem. The complexity of this optimization problem is determined by the fact that the ranges of the initial pendulum angle and the breakaway angle, in which the landing condition by an angle is satisfied, are quite narrow. For efficient numerical modeling of such a system, taking into account the need to accurately determine the landing point, it is necessary to take into account the detection of the event of the pendulum vertical coordinate crossing the ground level, since with an inaccurate determination of the landing point, it becomes difficult to correctly determine the areas in which the landing condition is satisfied.

The article proposes a numerical method for calculating the pendulum trajectory taking into account the breakaway, as well as an algorithm for optimizing the initial parameters. An analysis of the influence of various factors on the landing accuracy is carried out, including the initial speed, the pendulum length, and the breakaway moment. The results can be used in the design of mechanisms with variable structure, as well as in problems of motion control of anthropomorphic robots and sports biomechanics.

Keywords: differential equations, physical pendulum, hybrid systems, optimization, solid mechanics, software model, numerical methods, diagonally implicit, modeling, dynamics

REFERENCES

1. Kartashov B.A., Shabaev E.A., Kozlov O.S., Shchekaturov A.M. *Sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem SimInTech: praktikum po modelirovaniyu sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [The environment for dynamic modeling of technical systems SimInTech: a workshop on modeling automatic control systems]. Moscow, DMK Press, 2017. 424 p. ISBN 978-5-97060-482-3.
2. Skvortsov L.M. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii* [Numerical solution of ordinary differential and differential-algebraic equations]. Moscow, DMK-Press, 2018. 230 p. ISBN 978-5-97060-636-0.
3. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems*. Berlin, Springer, 1996 (Russ. ed.: Khairer E., Vanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii: zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi*. Moscow, Mir Publ., 1999. 685 p.).
4. Kolesov Yu.B. *Ob'ektno-orientirovannoe modelirovanie slozhnykh dinamicheskikh sistem* [Object-oriented modeling of complex dynamic systems]. St. Petersburg, St. Petersburg: State Polytechnical University Publ., 2004. 210 p.
5. Savel'ev I.V. *Kurs obshchei fiziki. V 5 t. T. 1. Mekhanika* [General Physics Course. In 5 vols. Vol. 1. Mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011. 448 p.

* Received 15 October 2025.

6. Yuditsev V.V. [Equations of motion of a system of coupled rigid bodies with variable structure]. Upravlenie dvizheniem i navigatsiya letatel'nykh apparatov [Aircraft traffic control and navigation]. Collection of works of the X All-Russian scientific and technical seminar on control of motion and navigation of aircraft. Samara, 2002, pp. 128–134. (In Russian).
7. Serway R.A. Physics for Scientists and Engineers. 2nd ed. Saunders College Publishing, 1986. 202 p. ISBN 0-03-004534-7.
8. Esposito J., Kumar V., Pappas G.J. Accurate event detection for simulating hybrid systems. Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC). LNCS, vol. 2034. Springer, 1998, pp. 204–217.
9. Novikov E.A., Shornikov Yu.V. Komp'yuternoe modelirovanie zhestkikh gibridnykh sistem [Computer simulation of stiff hybrid systems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2013. 451 p. ISBN 978-5-7782-2023-2. Available at: <https://znanium.com/catalog/product/558790> (accessed 27.11.2025).
10. Achitav A., Timofeev K., Suslov K., Kalachev Y., Shornikov Y. Specific characteristics of numerical simulation of mechatronic systems with PWM-controlled drives. Modelling, 2024, vol. 5, pp. 1375–1394. DOI: 10.3390/modelling5040071.
11. Shpak V.V., Timofeev K.A., Shornikov Y.V. Numerical analysis of mechatronic systems with pulse width modulation. 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), Altai, Russian Federation, 2024, pp. 1910–1913. DOI: 10.1109/EDM61683.2024.10614951.
12. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical optimization. London, Academic Press, 1981. 401 p.
13. Pope M.T., Christensen S., Christensen D., Simeonov A., Imahara G., Niemeyer G. Stickman: Towards a human scale acrobatic robot. 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Brisbane, QLD, Australia, 2018, pp. 2134–2140. DOI: 10.1109/ICRA.2018.8462836.
14. Yeadon M.R. The biomechanics of twisting somersaults. Pt. I: Rigid body motions. Journal of Sports Sciences, 1993, vol. 11 (3), pp. 187–198.
15. Ha S., Ye Y., Liu C.K. Falling and landing motion control for character animation. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, vol. 31 (6), p. 155.

Для цитирования:

Шорников Ю.В., Тимофеев К.А., Филимонов М.О. Инструментальное моделирование гибридной системы маятника с отрывом // Системы анализа и обработки данных. – 2025. – № 4 (100). – С. 123–136. – DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-123-136.

For citation:

Shornikov Yu.V., Timofeev K.A., Filimonov M.O. Instrumental'noe modelirovanie gibridnoi sistemy mayatnika s otryvom [Instrumental modeling of a hybrid pendulum system with a breakaway]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and data processing systems*, 2025, no. 4 (100), pp. 123–136. DOI: 10.17212/2782-2001-2025-4-123-136.