

Алгоритм оценки деформации плит по плану опор на основе анализа диаграммы Вороного*

В.И. ЗИНОВ

450076, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Уфимский университет науки и технологий

zinovvladislavufa@gmail.com

Оценка плана здания на возникающие деформации является важнейшим этапом проектирования. Применяемый метод конечных элементов позволяет найти достаточно точные значения моментов напряжений и перемещений и на основе их анализа рассчитать требуемое арматурное усиление, однако затрачивается много времени на выполнение. Для реализации системы поддержки принятия решений при поиске рациональных планов опорных конструкций предлагается алгоритм сравнительной оценки деформаций плит перекрытий. В его основе – анализ эвристических параметров опорных областей и вывод оценки, коррелирующей с реальными деформационными воздействиями. Это позволит быстро сравнивать между собой различные планы опорных конструкций, запуская расчет деформаций методом конечных элементов лишь для наилучших планов опор. В настоящей работе предложен алгоритм получения и вывод сравнительной оценки деформаций по опорным областям плиты перекрытия.

Для определения опорных областей по плану опор предлагается использовать рассчитываемую на основе метрики расстояния Чебышёва диаграмму Вороного на прямоугольных основаниях, соответствующих опорам. Для корректной обработки сопряженных оснований к существующему алгоритму построения диаграммы Вороного предложена модификация на основе итеративного поиска узловых точек в моменты фиксации граней диаграммы Вороного. С помощью предложенного алгоритма эвристические параметры опорных областей были оценены по степени корреляции с метрикой деформаций на наборе планов опор мощностью 6500. Значимость коэффициентов корреляции была оценена на множестве групп планов опор, выделены незначимые параметры. По оставшимся параметрам были построены функции оценки на основе триплетов параметров, оценена корреляция каждой функции для каждого триплета. В итоговом эксперименте по результатам анализа получена оценка со средним значением 14 % и худшим 21 % ошибочным сравнением планов опор между собой.

Ключевые слова: оптимизация в строительной сфере, плиты перекрытий, план опорных конструкций, сравнительная оценка деформаций, диаграмма Вороного, эвристические параметры, рациональное размещение опор, корреляционный анализ

* Статья получена 29 октября 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор плана опорных конструкций здания проводится на основе анализа деформаций: размещение опор под плитой влияет на возникающие деформационные воздействия. Однако оценка деформаций в связи с критической важностью обеспечения безопасности здания проводится тщательно с помощью метода конечных элементов в программно-расчетных комплексах и занимает длительное время. В работах по поиску рациональных планов опор чаще всего применяются методы, приближенные к точным расчетам, на основе физики конструкций. Наиболее известные из них – метод заменяющих рам [1, 2] для расчета изгибающих моментов в плите, методы применения модуля Юнга [3], моделирования балки Эйлера [4] для расчета жесткости конструкций колонн и плит, метод градиентной оптимизации объема бетона плиты над колоннами [5]. Однако перечисленные методы позволяют проанализировать лишь планы колонн при регулярной схеме их размещения. Также существуют методы расчета деформаций на основе нейронных сетей [6, 7].

В отличие от них методы эвристического распределения веса разбивают перекрытие на области по опорам [8] и могут обрабатывать как колонны, так и стены с нефиксированным шагом размещения. Один из них, метод сравнительной оценки деформаций плит перекрытий, состоит в анализе подобранных параметров пролетно-опорного плана плиты и выборе наилучших для описания функции, коррелирующей с реальными деформациями. Это позволяет сравнивать между собой различные планы опор для одного перекрытия по деформациям без необходимости в точных расчетах. Это особенно полезно на ранних этапах проектирования, когда требуется проанализировать множество вариантов расположения опор за короткий срок.

Сравнительная оценка деформаций основана на пролетных или опорных областях (рис. 1). В предыдущей работе [9] разработан алгоритм разбиения и оценки деформаций по пролетам, который впоследствии был применен в генетическом алгоритме рационального планирования опор [10]. Сформулированная оценка показала хорошие результаты ранговой корреляции с деформациями плиты. Однако предложенный алгоритм зависит от эвристических правил разбиения плиты. В продолжение исследования в данной статье будет рассмотрен метод сравнительной оценки деформаций по опорным областям.

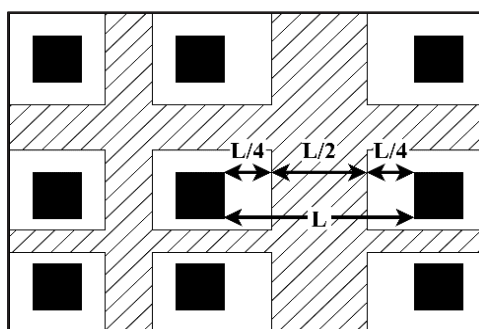


Рис. 1. Пролетные (заштрихованные) и опорные (незаштрихованные) области плиты

Fig. 1. Span (dashed) and support (not dashed) areas of the slab

Один из способов анализа опорных областей для оценки деформаций в плитах – диаграммы Вороного. Они нашли широкое применение в проектировании конструкций [11, 12], описании физических процессов в плитах, (например, распространения трещин [13]), так как деформационные воздействия в плите зависят от расстояния между опорами, что хорошо моделируется диаграммой Вороного. Однако для их применения на плане опор необходимо ввести в алгоритм обработку прямоугольных оснований и отверстий, в том числе с одинаковой абсциссой – сопряженных. Кроме того, необходимо провести исследование корреляции параметров опорных областей и оценок диаграммы Вороного с фактически возникающими деформациями.

В настоящей статье предлагаются алгоритм построения диаграммы Вороного на сопряженных прямоугольных основаниях и эвристические оценки параметров опорных областей, коррелирующих с деформацией плиты. В разделе 1 дана постановка задачи определения опорной схемы в контексте задачи построения диаграммы Вороного. В разделе 2 описан алгоритм построения диаграммы Вороного с сопряженными прямоугольными основаниями. В разделе 3 анализируются параметры опорных областей и функции оценки деформаций. В разделе 4 проводится сравнение качества оценок по опорным областям.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО ОПОРНЫМ ОБЛАСТЯМ

Диаграмма Вороного – это разбиение плоскости на области по основаниям, каждая точка которых расположена ближе к основанию области, чем к основаниям других областей. Чаще всего основания представлены точками [14], но для проблемы рационального планирования опор и сравнительной оценки деформаций основания представлены прямоугольниками опор плиты.

Дана плита $Slab = \langle L, W, Holes \rangle$, где L и W – длина и ширина плиты; $Holes = \{Hole_1, \dots, Hole_K\}$ – множество отверстий на плоскости плиты, каждое отверстие представлено прямоугольником $Hole_k = \langle (x_k, y_k), (l_k, w_k) \rangle$, где (x_k, y_k) – координаты отверстия, (l_k, w_k) – линейные размеры отверстия. Дана схема опор $T = \{T_1, \dots, T_N\}$, каждая опора представлена прямоугольником $T_i = \langle (x_i, y_i), (l_i, w_i) \rangle$, где (x_i, y_i) – координаты опоры, (l_i, w_i) – линейные размеры опоры.

По опорной схеме плиты получена точная расчетная оценка (РО) деформаций. Требуется найти такую оценку опорной схемы по построенной диаграмме Вороного, чтобы она наилучшим образом коррелировала с РО.

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛИТЫ ПО ДИАГРАММЕ ВОРОНОГО

Пусть $d(p, T_i)$ – расстояние между точкой и опорой. Дана диаграмма Вороного по плану опор $VD(T) = \{VC_1, \dots, VC_N\}$, где VC_i – ячейка Вороного, соответствующая опоре T_i : $VC_i = \{p \in Slab: d(p, T_i) \leq d(p, T_j), \forall T_j \in T, i \neq j\}$.

Дана рассчитанная оценка деформаций по опорной схеме $f^R \in \mathbb{R}$. Требуется найти оценку построенной диаграммы Вороного для опорной схемы $V(VD)$ с максимальной корреляцией с точной расчетной оценкой:

$$\text{corr}(V(VD), f^R) \rightarrow \max.$$

Таким образом, была достигнута систематизация проблемной ситуации сравнительной оценки деформаций плит перекрытий, что позволяет выстроить метод решения на ее основе. Далее в разделе 2 представлен алгоритм построения диаграммы Вороного на прямоугольных сопряженных основаниях.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ОСНОВАНИЯХ

Задача построения диаграммы Вороного на прямоугольных основаниях возникает в разных практических областях. Одним из примеров применения полигональных оснований в диаграмме Вороного являются задачи построения пути между препятствиями [15, 16]. В них полигональные основания разбиваются некоторым шагом на основания-точки, а диаграмма строится единожды. В связи с этим построение диаграммы может быть длительным, что недопустимо в задаче оценки деформаций при планировании опор.

В статье [17] авторы Е. Paradourlou и D.-T. Lee предлагают алгоритм построения диаграммы Вороного на прямоугольных основаниях (EP&DTL) для поиска критических областей коротких замыканий микросхем. Особенность алгоритма состоит в применении метрики расстояния Чебышёва в качестве основной метрики вычисления диаграммы Вороного, что позволяет существенно упростить и ускорить расчет, пренебрегая некоторой потерей в точности построения. В связи с этим алгоритм EP&DTL взят в качестве основы для сравнительной оценки деформаций плиты по плану опор.

2.1. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОСНОВАНИЯХ: EP&DTL

В основе алгоритма EP&DTL лежат четыре понятия. Во-первых, в качестве метрики расстояния принимается метрика Чебышёва:

$$\forall p_1, p_2 \in \text{Slab} : d(p_1, p_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|),$$

где $(x_1, y_1) = p_1$ и $(x_2, y_2) = p_2$ – координаты соответствующих точек.

Во-вторых, понятие бисектора – множества точек на равном расстоянии от двух элементов на плоскости. Бисекторы могут описывать грани диаграммы Вороного между двумя опорами или быть второстепенными структурами при построении диаграммы возле некоторой опоры:

$$bv = BV(E^1, E^2) = \{p \in \text{Slab} : d(p, E^1) = d(p, E^2)\}, \quad (1)$$

где E^1 и E^2 являются гранями разных опор или двумя гранями одной опоры.

В-третьих, заметающая прямая \mathcal{L} и береговая линия \mathcal{T} , определенная в виде АВЛ-дерева и состоящая из бисекторов bv :

$$\mathcal{T} = \langle \text{bisector}, \text{left}, \text{right} \rangle,$$

где $\text{bisector}(\mathcal{T}) = bv$ – бисектор соответствующего узла, $\text{left}(\mathcal{T})$ и $\text{right}(\mathcal{T})$ – левый и правый узел соответственно в дереве для узла \mathcal{T} . Функция ключа $\text{key}(\mathcal{T})$ получается путем вычисления точки, равноудаленной от опоры бисектора и заметающей прямой. Тогда ключом будет ордината такой точки.

В-четвертых, приоритетная очередь обработки событий построения диаграммы Вороного \mathcal{Q} . Каждое событие $q \in \mathcal{Q}$ обладает некоторым типом $\text{type}(q)$. Алгоритм [17] включает в себя три типа событий:

$$\text{type}(q) = \{\text{West Edge}, \text{East Edge}, \text{Spike}\}. \quad (2)$$

- West Edge – событие западной грани опоры; фиксируется часть береговой линии, которая лежит между парой бисекторов от юго-западной и северо-западной вершин опоры; создаются по паре новых бисекторов по горизонтальным граням опоры и в точках пересечения с береговой линией.

- East Edge – событие восточной грани опоры; бисекторы, лежащие на горизонтальных гранях опоры, заменяются на бисекторы, направленные от соответствующих вершин в юго-восточном и северо-восточном направлении от опоры.

- Spike – событие пересечения двух бисекторов; пересекающиеся бисекторы удаляются и, если они лежат между двумя опорами, фиксируются; создается новый бисектор в совместном направлении.

Перечисленные понятия позволяют построить диаграмму Вороного для простейшего случая прямоугольных опор. Однако в задаче рационального планирования опор и сравнительной оценки деформаций плит перекрытий необходимо учесть влияние отверстий на плоскости плиты, а также корректно обрабатывать сопряженные друг с другом опоры-основания.

2.2. ОПИСАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ОБРАБОТКИ ОТВЕРСТИЙ В ДИАГРАММЕ ВОРОНОГО С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

Чаще всего отверстия в плитах являются частью вспомогательных систем здания или выполняют конструктивную роль. В соответствии с проведенным предварительным анализом способов обработки отверстий на плоскости диаграммы Вороного [18] наиболее перспективным является подход обработки отверстий во время построения диаграммы. Поэтому для учета отверстий при построении диаграммы Вороного предлагается ряд изменений.

При наличии отверстий метрика расстояний модифицируется следующим образом. Если отрезок (p_1, p_2) пересекает отверстие $Hole_k \in Slab$, тогда

$$d(p_1, p_2) \cap Hole_k = d(p_1, v_{k1}) + d(v_{k1}, v_{k2}) + d(p_2, v_{k2}),$$

где v_{k1} и v_{k2} – вершины $Hole_k$ такие, что

- $(p_1, v_{k1}) \cap Hole_k = v_{k1}$; $(p_2, v_{k2}) \cap Hole_k = v_{k2}$;
- $v_{k1} = v_{k2}$ или (v_{k1}, v_{k2}) является гранью $Hole_k$;

- $d(p_1, v_{k1}) + d(v_{k1}, v_{k2}) + d(p_2, v_{k2})$ является наименьшим из возможных.

Рекурсивно проверяются отрезки (p_1, v_{k1}) и (p_2, v_{k2}) на наличие пересечений с другими отверстиями до тех пор, пока все условия не будут удовлетворены.

Необходимо дополнить понятие бисекторов (1) свойством виртуальности. Бисектор является виртуальным, если он порожден отверстием, а не опорой; обозначается как βv . Тогда по формуле (1), по крайней мере, одна из граней E^1 и E^2 , порождающих виртуальный бисектор βv , должна принадлежать отверстию. При этом возможны четыре типа виртуальных бисекторов:

- вдоль горизонтальной грани отверстия βv_{Edge} ;
- в вершине отверстия βv_{Corner} ;
- направленный параллельно горизонтальным граням отверстия βv_{Out} ;
- направленный к вершине отверстия βv_{In} .

Для последнего типа виртуальных бисекторов условие равноудаленности в формуле (1) заменяется на условие обратной удаленности:

$$\beta v_{\text{In}} = BV(E^1, E^2) = \{p \in \text{Slab} : d(p, E^1) - d(p, E^2)\}.$$

При обработке отверстия виртуальные бисекторы позволяют учесть возникающие изменения связности плоскости диаграммы. Но для корректного взаимодействия с другими бисекторами береговой линии при построении диаграммы предлагается ввести уровневую структуру береговой линии. Каждый уровень или расположен между виртуальными бисекторами некоторого отверстия, или неограничен, т. е. соответствует единственному верхнему уровню. Каждый не верхний уровень назовем тенью. На рис. 2 изображено отверстие и две тени, порождаемые нижней гранью отверстия («Тень 1») и левой гранью отверстия («Тень 2»). Аналогично порождается тень по верхней грани отверстия. При этом тень от левой (западной) грани отверстия заключена между тенями нижней и верхней граней отверстия.

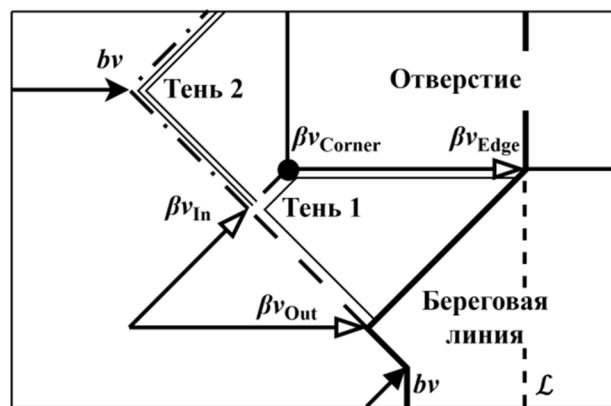


Рис. 2. Уровни теней береговой линии, порожденные отверстием

Fig. 2. Shadow levels of the wavefront induced by hole

Тень левой грани опирается на два виртуальных бисектора $\beta_{V_{In}}$, направленных к левым вершинам, в которых лежат $\beta_{V_{Corner}}$. Тени нижней и верхней граней опираются на виртуальные бисекторы $\beta_{V_{Edge}}$ и $\beta_{V_{Out}}$, при этом $\beta_{V_{In}}$ и $\beta_{V_{Corner}}$ расположены внутри. Такая структура теней позволяет не нарушать логику работы оригинального алгоритма при обработке отверстий и однозначно определять пересечение с возникающими уровнями береговой линии.

В соответствии с представленной структурой теней береговой линии от отверстий требуется дополнить множество событий (2) новыми типами.

- **Begin Hole** – событие западной грани отверстия; создаются виртуальные бисекторы по граням отверстия, в западных вершинах отверстия, направленные параллельно граням и направленные к западным вершинам отверстия; создается тень по западной грани, в которую добавляется часть береговой линии между парой виртуальных бисекторов от западных вершин отверстия; создаются две тени по южной и северной граням отверстия.

- **End Hole** – событие восточной грани отверстия; виртуальные бисекторы вдоль граней и параллельные им заменяются на виртуальные бисекторы в восточных вершинах и направленные к ним соответственно.

- **Virtual Spike** – событие пересечения бисекторов, среди которых хотя бы один виртуальный; оба бисектора удаляются и воссоздаются, причем один из бисекторов помещается или выводится из тени другого; может возникнуть два особых случая: **West Corner** и **East Corner**.

- **West Corner** – событие пересечения виртуального бисектора, направленного к западной вершине, и виртуального бисектора, лежащего в этой вершине; оба бисектора удаляются, после чего создаются два новых бисектора, направленных в разные стороны вдоль граней от этой вершины.

- **East Corner** – событие пересечения виртуального бисектора, лежащего в западной вершине отверстия, и не виртуального бисектора, направленного по смежной с вершиной грани; если это северная или южная грань, то создается новый бисектор, направленный вдоль восточной грани отверстия; если это восточная грань, то необходимо зафиксировать ту часть береговой линии, которая лежит между вершиной и бисектором, направленным на юго-запад или северо-запад от нее, и создать новый бисектор в точке пересечения.

Следует также отметить, что если в процессе фиксации встречается виртуальный бисектор, лежащий в западной грани отверстия, то область фиксации необходимо расширить во внутреннюю левую сторону от этой вершины.

Перечисленные события позволяют обрабатывать отверстия в процессе построения диаграммы Вороного в рамках алгоритма EP&DTL.

2.3. АНАЛИЗ СОПРЯЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОСНОВАНИЙ И ОТВЕРСТИЙ В ДИАГРАММЕ ВОРОНОГО ДЛЯ ПЛАНА ОПОР

Основания с одинаковой абсциссой, но с разными ординатами с общей гранью диаграммы Вороного назовем сопряженными. В алгоритме EP&DTL механизм обработки сопряженных прямоугольных оснований некорректен: если два основания сопряжены и их бисекторы, направленные к береговой линии, пересекаются до достижения береговой линии, то грань Вороного между

ними будет определена исключительно первой из опор и будет направлена под углом 45 градусов от первой опоры. Более корректным будет построение грани между ними в горизонтальном направлении. Кроме того, существует ситуация одновременных событий West Edge и East Corner с фиксацией береговой линии. Поэтому для того, чтобы все эти ситуации обрабатывались последовательно, было выделено событие фиксации береговой линии Voronate.

Для корректной обработки событий Voronate с одинаковым основным приоритетом предлагается определить многоуровневую систему приоритетности событий в очереди Q . Основным приоритетом является абсцисса события для событий оснований и отверстий или момент достижения пересечения для событий пересечений. Основным приоритет определяет позицию в очереди для группы одновременных событий. Вторым приоритетом является тип события $type(q)$. Очередность обработки при одинаковом основном приоритете следующая: Spike – East Edge – End Hole – West Edge – West Corner – East Corner – Virtual Spike – Voronate – Start Hole. Вторым приоритет задает позицию для группы однотипных событий в группе одновременных событий.

Третьим приоритетом для большинства типов событий является ордината события: нижней вершины для событий опор и отверстий и ордината пересечения для событий пересечений. Исключением является событие Voronate, для которого третий приоритет рассчитывается как разница между ординатой и абсциссой события: левой нижней вершины для событий от West Edge, достигнутой правой вершины отверстия для событий от East Corner. События Voronate упорядочиваются по бисекторам в юго-западном направлении, что позволяет игнорировать событие Voronate, порожденное событием East Corner, если вершина отверстия находится в области фиксации одновременного события West Edge, даже если она находится ниже опоры (рис. 3).

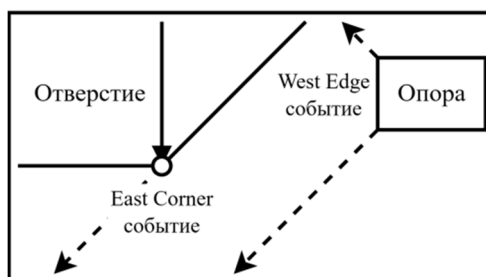


Рис. 3. Ситуация одновременных событий West Edge и East Corner

Fig. 3. The case of simultaneous events West Edge and East Corner

Одним из подходов учета сопряженных оснований и одновременных событий Voronate является расчет узловых точек. Узловая точка в контексте одновременных событий фиксации граней диаграммы Вороного – это точка пересечения бисекторов одновременных событий Voronate. Для двух одновременных последовательных событий $Voronate_1$ и $Voronate_2$ поиск узловых точек осуществляет функция **Knotting** (A_1, A_2, B_2) , где A_1 – верхняя точка пересечения с береговой линией от события $Voronate_1$, A_2 и B_2 – точки пересечения с береговой линией от события $Voronate_2$ со следующим алгоритмом:

Алгоритм обработки одновременных событий Voronate – Knotting

Начало

1. Определить очередь точек порождения узлов событий $KPoints = \emptyset$;
2. **если** $x_{B2} + y_{B2} \leq x_{A1} + y_{A1}$, **то**:
3. точка B_2 порождает узловую точку: $KPoints.Add(B_2)$;
4. Определить бисектор $Neigh$ в дереве \mathcal{T} , находящийся выше точки B_2 ;
5. Задать B_2 как текущую позицию $Neigh$;
6. **пока** ($y_{B2} < y_{A2}$ или ($y_{B2} = y_{A2}$ и $x_{B2} < x_{A2}$)) и $Neigh \neq \emptyset$, **то**:
7. **если** $Neigh$ – виртуальный бисектор, **то**:
8. **если** $Neigh$ образован не западной гранью отверстия, **то**:
9. Задать $Neigh$ по начальному виртуальному бисектору тени;
10. **иначе если** $Neigh$ лежит в западной вершине отверстия, **то**:
11. Задать A_2' и B_2' как позицию начала тени и точки пересечения;
12. Запустить алгоритм внутри тени **Knotting**(A_1, A_2', B_2');
14. Задать $Neigh$ и B_2 по последующему $Neigh$ бисектору;

Конец

Алгоритм позволяет находить узловые точки как на основном уровне береговой линии, так и в тенях отверстий. Для этого алгоритм последовательно просматривает бисекторы береговой линии снизу вверх до тех пор, пока не закончится тень или пока очередной бисектор не окажется выше верхней точки пересечения рассматриваемого события Voronate (рис. 4).

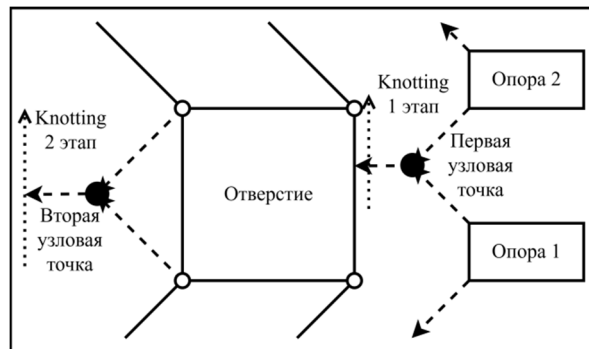


Рис. 4. Пример алгоритма поиска узловых точек

Fig. 4. Example of the knot points searching algorithm

Для определения узловых точек между одновременными последовательными событиями $Voronate_0, Voronate_1, \dots, Voronate_V$ во время обработки первого из них $Voronate_0$ в момент фиксации и для любой промежуточной итерации (фиксация западной вершины отверстия) при заданной верхней точке пересечения с береговой линией A_0 от события $Voronate_0$ предлагается применять следующий алгоритм обработки узловых точек:

Алгоритм обработки узловых точек (на первой итерации фиксации)

Начало

1. Задать $v = 1, KP = \emptyset, KA = \emptyset$;
2. **делать**:
3. Knotting для $Voronate_0$ и $Voronate_v, KP = KPoints.Top(), v = v + 1$;
4. **пока** $KP = \emptyset$ и $v \leq V$;

5. **если** $KP \neq \emptyset$, **то**:
 6. **если** $y_{A0} - y_{KP} > |x_{A0} - x_{KP}|$, **то**:
 7. $KP = KPoints.Dequeue()$ – вывести вершину из очереди;
 8. $KA = ((x_{A0} + y_{A0} + x_{KP} - y_{KP})/2, (x_{A0} + y_{A0} + y_{KP} - x_{KP})/2)$;
 9. **иначе если** $y_{A0} - y_{KP} = |x_{A0} - x_{KP}|$ – узловая точка игнорируется, **то**:
 10. $KPoints.Dequeue()$ – выбросить вершину из очереди;
- Конец**

Алгоритм обработки узловых точек (на промежуточной фиксации)

Начало

1. Задать $v = 2$, $KP = KPoints.Top()$, $KA = \emptyset$;
2. **пока** $v \leq V$:
3. **если** $y_{A0} - y_{KP} > |x_{A0} - x_{KP}|$, **то**:
4. $KP = KPoints.Dequeue()$ – вывести вершину из очереди;
5. $KA = ((x_{A0} + y_{A0} + x_{KP} - y_{KP})/2, (x_{A0} + y_{A0} + y_{KP} - x_{KP})/2)$;
6. **конец пока** – узловая точка найдена;
7. **иначе если** $y_{A0} - y_{KP} = |x_{A0} - x_{KP}|$ или $x_{KP} + y_{KP} > x_{A0} + y_{A0}$, **то**:
8. $KPoints.Dequeue()$, $KP = KPoints.Top()$ – узловая точка пройдена;
9. **иначе конец пока** – узловая точка ещё не достигнута;
10. **если** $KP = \emptyset$ – узловые точки для $Voronate_{v-1}$ пройдены, **то**:
11. Knotting для $Voronate_0$ и $Voronate_v$, $KP = KPoints.Top()$, $v = v + 1$;

Конец

Представленные алгоритмы позволяют обрабатывать одновременные события фиксации береговой линии от основания или достижения некоторым бисектором вершины восточной грани отверстия. Алгоритмы приспособлены к обоим типам событий и интегрированы в оригинальный алгоритм.

Разработанные модификации дают возможность применить инструментарий диаграммы Вороного в задаче сравнительного анализа деформаций и поиска рациональных планов опорных конструкций. Далее проведен анализ различных параметров диаграммы Вороного для описания сравнительной оценки деформаций в корреляции со смоделированными деформациями плит.

3. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАНА ОПОР ПО ДИАГРАММЕ ВОРОНОГО

Для вывода корректной сравнительной оценки деформаций плиты с заданным планом опор по диаграмме Вороного требуется провести корреляционный анализ параметров опорных областей и рассчитанной метрики деформационных воздействий. В данном разделе приведены корреляционный и эвристический анализ оценки деформаций в опорных областях перекрытия.

В качестве метрики деформаций взято среднеквадратическое отклонение значений перемещения узлов КЭ по вертикали Z . Метрика описывает среднюю силу деформационных воздействий в опорной области единственной величиной, при этом сами значения метрики Z отражают степень деформирования плиты в узлах КЭ. Для совмещения ячеек диаграммы Вороного и сетки конечных элементов были применены следующие правила:

- если узел конечного элемента расположен в нескольких опорных областях, то его значение будет учитываться во всех них;

- если узел конечного элемента полностью лежит внутри отверстия, то он не учитывается ни в одной опорной области;

- для всех вершин ячеек Вороного рассчитываются средние значения метрики Z в них, и их значения учитываются в расчете этой опорной области.

Последнее правило позволяет не игнорировать малые или узкие опорные области, которые не включают ни одного узлового конечного элемента.

3.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПЛИТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЙ

Для проведения корреляционного анализа и вывода сравнительной оценки деформаций в опорных областях был сгенерирован набор случайных планов опорных конструкций, по которым были построены диаграммы Вороного, получены параметры опорных областей и рассчитаны значения деформационных воздействий по метрике Z . Сгенерировано 3500 планов без отверстий и 3000 планов с отверстиями на области плиты размером $18 \times 28,5$ м. Планы были сгенерированы группами по суммарной длине опор и суммарной площади отверстий. Настройки генерации представлены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Настройки генерации планов опорных конструкций для анализа корреляции

Support plan generation settings for correlation analysis

Набор 1 (без отверстий), 3500 планов		Набор 2 (с отверстиями), 3000 планов		
Опоры	Номер набора	Опоры	Отверстия	Номер набора
[10 м; 20 м]	1–500	[5 м; 15 м]	[40 м ² ; 110 м ²]	3501–3750
[15 м; 25 м]	501–1000	[7.5 м; 20 м]	[40 м ² ; 110 м ²]	3751–4250
[20 м; 30 м]	1001–1500	[10 м; 25 м]	[40 м ² ; 110 м ²]	4251–4750
[25 м; 35 м]	1501–1750	[15 м; 35 м]	[35 м ² ; 85 м ²]	4751–5000
[30 м; 45 м]	1751–2000	[20 м; 45 м]	[35 м ² ; 85 м ²]	5001–5250
[35 м; 55 м]	2001–2250	[25 м; 50 м]	[35 м ² ; 85 м ²]	5251–5500
[40 м; 60 м]	2251–2500	[30 м; 60 м]	[30 м ² ; 80 м ²]	5501–5750
[45 м; 65 м]	2501–2750	[35 м; 70 м]	[30 м ² ; 80 м ²]	5751–6000
[50 м; 70 м]	2751–3000	[40 м; 100 м]	[30 м ² ; 80 м ²]	6001–6250
[65 м; 95 м]	3001–3250	[50 м; 105 м]	[25 м ² ; 65 м ²]	6251–6500
[75 м; 110 м]	3251–3500			

Экспериментальная модель плиты подготовлена и проанализирована в программно-расчетном комплексе «ПК ЛИРА». Настройки: плита $18 \times 28,5$ м, толщина 25 см, модуль упругости $3e+006$ т/м², коэффициент Пуассона 0,2, удельный вес материала 2,5 т/м³; нагрузка вертикальная равномерная 0,6255 т/м²; КЭ заданы сеткой с шагом 0,75 м (количество элементов – 912).

Итоговое количество полученных анализируемых опорных областей – 105 422. Далее проведен анализ параметров и метрик полученных областей.

3.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ ОПОРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛИТЕ ПЕРЕКРЫТИЯ

Был проведен анализ выбранных эвристических параметров опорных областей, принятых для анализа корреляции деформаций плит. В табл. 2 представлено их описание, нормирование по плите (Площ. – площадь, Диаг. – диагональ, Наиб. – наибольшая сторона, Пер. – периметр), коэффициенты линейной корреляции Пирсона и ранговой корреляции Спирмена относительно метрики деформации. На рис. 5 представлены диаграммы рассеивания значений метрики деформаций по значениям параметров.

Среди сильно коррелирующих параметров выделяются параметры расстояния от опор до вершин ячейки (MD, AD, VD). Их диаграммы рассеивания указывают на возможную степенную зависимость. Получена высокая степень корреляции параметров расстояния между центром ячейки и центром опоры CD, площади S и периметра P, но для площади и периметра диаграммы рассеивания не позволяют сказать о характере связи с метрикой деформации.

Таблица 2

Table 2

Анализ корреляции параметров опорных областей плиты и деформаций в плите

Correlation analysis of slab support area parameters and deformations in slab

Параметр	Нормирование	Описание параметров	Корреляция	
			линейная	ранговая
S	Площ.	Площадь ячейки	0,50	0,75
CD	Диаг.	Расстояние от центра опоры до центра ячейки	0,53	0,72
CDS	Наиб.	Расстояние от центра ячейки до грани опоры по метрике Чебышёва	0,43	0,52
MD	Наиб.	Расстояние от опоры до вершины по метрике Чебышёва (максимум, среднее, стандартное отклонение)	0,56	0,93
AD	Наиб.		0,54	0,90
VD	Наиб.		0,58	0,87

Окончание табл. 2

End of the Tab. 2

Параметр	Нормирование	Описание параметров	Корреляция	
			линейная	ранговая
OVP	Пер.	Грани и вершины диаграммы Вороного, прилегающие к граням плиты (суммарный периметр, среднее расстояние от опоры)	0,45	0,61
OAD	Наиб.		0,55	0,65
IVP	Пер.	Грани и вершины диаграммы Вороного, не прилегающие к граням плиты (суммарный периметр, среднее расстояние от опоры)	0,22	0,55
IAD	Наиб.		0,29	0,69
P	Пер.	Периметр границы ячейки	0,43	0,77
LS	Наиб.	Длина опоры области	0,005	0,13
BLX	Наиб.	Длина огибающего ячейку прямоугольника (по X, по Y, отношение наибольшей длины к наименьшей длине)	0,36	0,70
BLY	Наиб.		0,38	0,70
BLXY	–		0,03	0,10
CLX	Наиб.	Максимальная длина внутри ячейки (по X, по Y, отношение наибольшей длины к наименьшей длине)	0,34	0,67
CLY	Наиб.		0,35	0,67
CLXY	–		0,02	0,08

Параметры длины опоры LS, отношений между максимальными расстояниями вдоль осей по огибающей области BLXY и внутри ячейки CLXY имеют низкие показатели корреляции. Однако вследствие большого набора данных только значение корреляции LS не имеет статистической значимости: $T_{\text{Набл}}$ линейного коэффициента LS – 1,467, BLXY – 8,867, CLXY – 8,119 при критической точке двусторонней области $t_{\text{кр}} = 2,579$ с уровнем значимости 0,01; $t_{\text{кр}}$ для ранговой корреляции LS – 0,0079, BLXY – 0,0079, CLXY – 0,0079). В связи с этим был проведен дополнительный корреляционный анализ с разбиением исходной выборки на группы. Если параметры будут иметь незначимые коэффициенты корреляции на группах выборки, то нет оснований для принятия таких параметров к дальнейшему анализу на всей выборке.

Для этого исходный набор опорных областей был разбит на группы по порядковым номерам планов, в которых они были получены. В каждую группу включалось по 25 планов опорных конструкций из изначальных 6500.

Для групп были рассчитаны коэффициенты корреляции и оценки статистической значимости всех параметров. Результаты изображены на рис. 6.

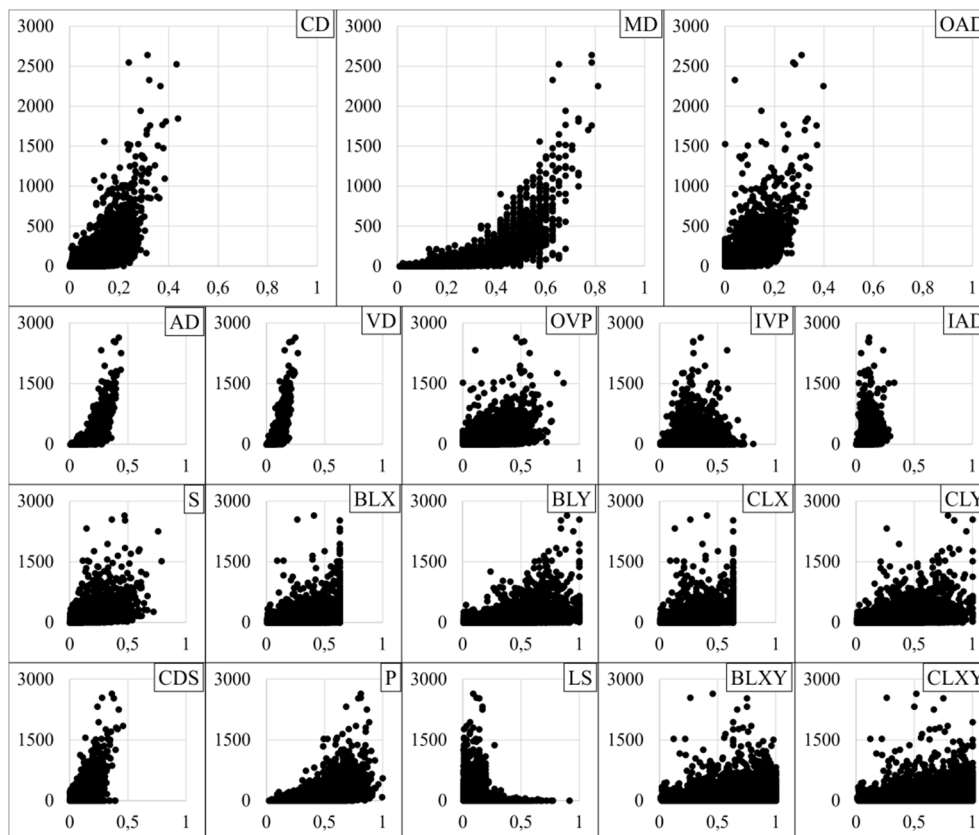


Рис. 5. Диаграммы рассеивания значений метрики деформаций для разных параметров

Fig. 5. Scatter plots of deformations metric for different parameters

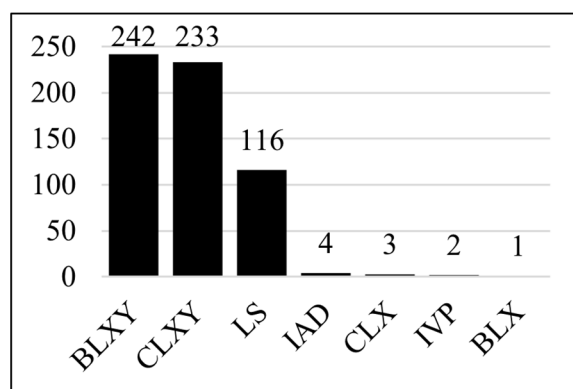


Рис. 6. Количество незначимых коэффициентов корреляции параметров в группах

Fig. 6. The number of insignificant correlation coefficients of parameters in groups

Как и ожидалось, на сгруппированных выборках исходного набора опорных областей коэффициенты корреляции параметров LS, BLXY и CLXY чаще

всего оказываются незначимыми. Также в редких случаях незначимыми оказались коэффициенты корреляции для параметров IAD, IVP, CLX и BLX.

Для параметров внутренних вершин IAD и IVP это объясняется опорными областями, большая часть которых примыкает к внешней грани плиты: деформации у грани возрастают, а внутренний периметр и расстояние остаются низкими. Для параметров CLX и BLX незначимость корреляции возникает в группах с широкими опорными областями и различными значениями деформаций. Поэтому перечисленные параметры IAD, IVP, CLX и BLX, а также симметричные им параметры BLY и CLY должны приниматься в оценку в качестве неосновных факторов.

3.3. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИЙ В ОПОРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Поскольку проведенный корреляционный анализ параметров не выявил явных факторов, которые могли бы в одиночку объяснить дисперсию значений деформаций, было принято решение сконцентрироваться на исследовании моделей с несколькими параметрами. Для этого были построены парные коэффициенты корреляции между параметрами (рис. 7).

S																
CD	0,55															
MD	0,80	0,79														
AD	0,86	0,77	0,96													
P	0,91	0,57	0,84	0,86												
BLX	0,81	0,52	0,76	0,78	0,86											
BLY	0,80	0,50	0,76	0,75	0,89	0,57										
CLX	0,82	0,49	0,72	0,76	0,82	0,95	0,53									
CLY	0,80	0,47	0,72	0,73	0,84	0,52	0,93	0,54								
OVP	0,66	0,48	0,68	0,69	0,69	0,54	0,55	0,58	0,61							
IVP	0,71	0,38	0,60	0,61	0,81	0,74	0,77	0,65	0,65	0,13						
OAD	0,66	0,59	0,74	0,76	0,63	0,53	0,52	0,56	0,56	0,92	0,12					
IAD	0,67	0,60	0,75	0,79	0,69	0,68	0,65	0,61	0,58	0,17	0,81	0,20				
VD	0,73	0,90	0,93	0,89	0,76	0,68	0,67	0,64	0,63	0,66	0,51	0,73	0,66			
CDS	0,47	0,62	0,58	0,54	0,54	0,45	0,49	0,44	0,47	0,38	0,43	0,43	0,41	0,65		
	S	CD	MD	AD	P	BLX	BLY	CLX	CLY	OVP	IVP	OAD	IAD	VD	CDS	

Рис. 7. Коэффициенты парной корреляции параметров опорных областей

Fig. 7. Pairwise correlation coefficients of the support area parameters

Было принято решение аналогично оценкам пролетных областей [9] выбрать для эвристической оценки тройки параметров по следующим правилам:

- все парные коэффициенты корреляции меньше 0,7;
- хотя бы один парный коэффициент корреляции меньше 0,6;
- хотя бы один параметр не из списка IAD, IVP, BLX, BLY, CLX, CLY;
- параметры BLX и BLY, CLX и CLY должны участвовать парно;
- параметры CD и CDS не должны быть в одной тройке.

По указанным правилам было получено 45 подходящих троек параметров опорных областей. Они представлены в табл. 3.

Таблица 3

Table 3

Тройки параметров опорных областей для эвристических оценок деформаций

Triples of support area parameters for heuristic slab deformation evaluation

№ п/п	П ₁	П ₂	П ₃	№ п/п	П ₁	П ₂	П ₃	№ п/п	П ₁	П ₂	П ₃
1	S	CD	OVP	16	CD	IVP	OAD	31	BLX	BLY	VD
2	S	CD	OAD	17	CD	IAD	OAD	32	BLX	BLY	CDS
3	S	CD	IAD	18	MD	OVP	IVP	33	CLX	CLY	OVP
4	S	OVP	IAD	19	MD	OVP	CDS	34	CLX	CLY	OAD
5	S	OVP	CDS	20	MD	IVP	CDS	35	CLX	CLY	VD
6	S	OAD	IAD	21	AD	OVP	IVP	36	CLX	CLY	CDS
7	S	OAD	CDS	22	AD	OVP	CDS	37	OVP	IVP	VD
8	S	IAD	CDS	23	AD	IVP	CDS	38	OVP	IVP	CDS
9	CD	P	OVP	24	P	OVP	IAD	39	OVP	IAD	VD
10	CD	P	OAD	25	P	OVP	CDS	40	OVP	IAD	CDS
11	CD	P	IAD	26	P	OAD	IAD	41	OVP	VD	CDS
12	CD	BLX	BLY	27	P	OAD	CDS	42	IVP	OAD	CDS
13	CD	CLX	CLY	28	P	IAD	CDS	43	IVP	VD	CDS
14	CD	OVP	IVP	29	BLX	BLY	OVP	44	IAD	OAD	CDS
15	CD	OVP	IAD	30	BLX	BLY	OAD	45	IAD	VD	CDS

Для каждого параметра были оценены корреляции 2, 3 и 4-й степеней и выделены наиболее коррелирующие степени: для S, OVP, IVP, OAD – 2; для CD, CLX, CLY, IAD, VD, CDS – 3; для MD, AD, P, BLX, BLY – 4. Обозначим возведение в такую степень параметра П как Π^{bst} . Были выделены функции оценки деформаций плиты по параметрам опорной области (табл. 4).

Таблица 4

Table 4

Эвристические функции оценки деформаций по параметрам опорных областей
Heuristic slab deformation evaluation functions of support area parameters

№ п/п	Функция	№ п/п	Функция
I	$\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3$	IX	$\left(\Pi_1^2 + (1 + \Pi_2)^{\Pi_3}\right) / 3$
II	$\Pi_2^3 \cdot \Pi_3^3 \cdot \Pi_1$	X	$\Pi_1(1 + \Pi_2)^{\Pi_3} / 2$
III	$(\Pi_2 + \Pi_3 + 1)^{\Pi_1} / 3$	XI	$\Pi_1^{bst} \cdot \Pi_2^{bst} \cdot \Pi_3^{bst}$
IV	$\left(\Pi_1^{bst} + \Pi_2 \cdot \Pi_3\right) / 2$	XII	$\left(\Pi_1^{bst} + \Pi_2^{bst} + \Pi_3^{bst}\right) / 3$
V	$\left(\Pi_1^{bst} \cdot \Pi_2 + 1\right)^{\Pi_3} / 2$	XIII	$\frac{\left(\left(\Pi_1 + 1\right)^{\Pi_1} + \left(\Pi_2 + 1\right)^{\Pi_2} + \left(\Pi_3 + 1\right)^{\Pi_3}\right)}{6}$
VI	$\left(\left(\Pi_2 + 1\right)^{bst} + \left(\Pi_3 + 1\right)^{bst}\right)^{\Pi_1} / 4$	XIV	$\frac{\left(\Pi_1 \cdot \Pi_2 + \Pi_1 \cdot \Pi_2 + \Pi_1 \cdot \Pi_2\right)}{3}$
VII	$\left(\Pi_1 + 1\right)^{\left(\Pi_2 + 1\right)^{\Pi_3}} - 1$	XV	$\left(\Pi_1^{bst \cdot 3/4} + \Pi_2^{bst \cdot 3/4} + \Pi_3^{bst \cdot 3/4}\right) / 3$
VIII	$\frac{\left(\Pi_2 + \Pi_3 + 1\right)\Pi_1}{3}$		

Для функций и троек оценивались различные перестановки параметров со следующим порядком в некоммутативных операциях:

- с одной некоммутативной операцией (II, III, IV, VI, VIII) порядок участия параметров в некоммутативной операции: A – Π_1 ; B – Π_2 ; C – Π_3 ;
- с двумя некоммутативными операциями (V, VII, IX, X): A – $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$; B – $\Pi_1\Pi_3\Pi_2$; C – $\Pi_2\Pi_1\Pi_3$; D – $\Pi_2\Pi_3\Pi_1$; E – $\Pi_3\Pi_1\Pi_2$; F – $\Pi_3\Pi_2\Pi_1$.

Проведен сравнительный корреляционный анализ получаемых оценок и значений метрики деформации в опорных областях. В табл. 5 указаны значения коэффициентов корреляции для наилучших вариантов (обозначение функции и обозначение перестановки). На рис. 8 продемонстрированы результаты сравнения оценок по коэффициентам линейной корреляции Пирсона и ранговой корреляции Спирмена; отдельной линией выделено Парето-оптимальное множество эвристических оценок деформаций.

Таблица 5

Table 5

Значения коэффициентов корреляции Парето-оптимальных вариантов оценки

Correlation coefficients of Pareto-optimal evaluation models

Функция	Параметр	Корреляция		Функция	Параметр	Корреляция	
		линейная	ранговая			линейная	ранговая
VII(B)	19	0,584	0,929	V(F)	31	0,818	0,876
VIII(A)	19	0,636	0,927	V(B)	20	0,827	0,872
VI(A)	19	0,724	0,924	V(A)	20	0,827	0,872
IX(B)	19	0,742	0,923	IV(B)	19	0,847	0,799
XV	17	0,747	0,905	V(E)	39	0,850	0,713
XII	17	0,801	0,902				

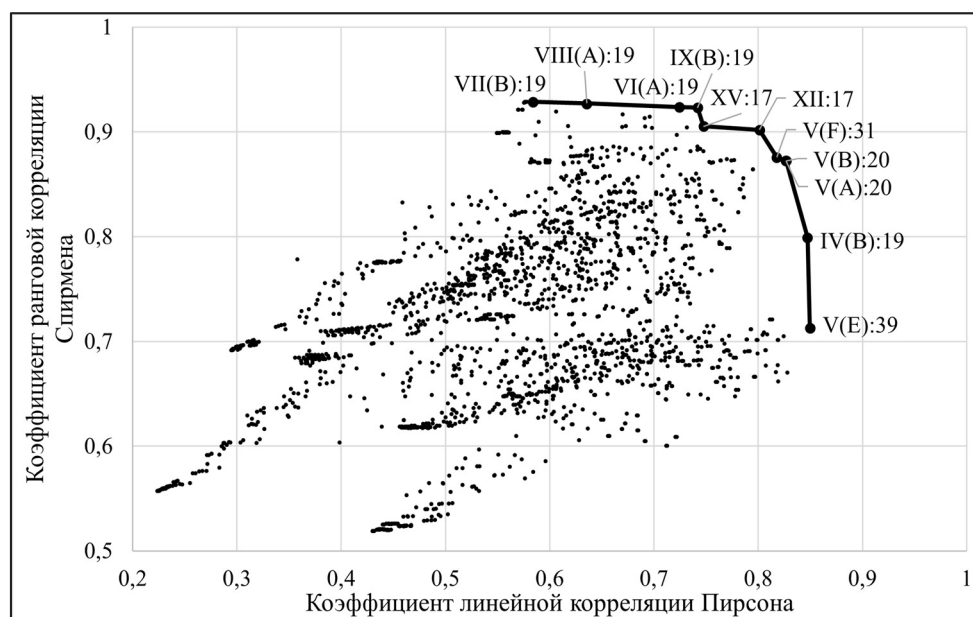


Рис. 8. Наилучшие функции эвристической оценки деформаций по корреляции

Fig. 8. Best heuristic evaluation functions by correlation coefficients

По результатам сравнительного анализа было выделено 11 функций. Чаще всего среди эвристических оценок с наибольшей линейной и ранговой корреляцией встречается тройка параметров MD, OVP, CDS (№ 19); наиболее частая функция – V. Для дальнейшего анализа были выбраны оценки, у которых линейная корреляция больше 0,7 и ранговая корреляция больше 0,8. Полученные 7 вариантов оценок (VI(A):19, IX(B):19, XV:17, XII:17, V(F):31, V(B):20, V(A):20) были проанализированы в дополнительном эксперименте.

4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЭВРИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ДЕФОРМАЦИЙ ПО ОПОРНЫМ ОБЛАСТЯМ

Поскольку сравнительная оценка деформаций является частью процесса рационального планирования опор, в том числе с помощью многокритериального генетического алгоритма [10], то необходимо, чтобы оценка позволяла корректно сравнивать планы опорных конструкций между собой при одинаковых плитах и расположении отверстий, но с разным размещением опор. В соответствии с этим требованием был проведен эксперимент анализа качества эвристических оценок деформаций в опорных областях.

Был подготовлен набор из 40 групп планов опорных конструкций по 25 планов в каждой группе. Для каждой группы сгенерированы плиты перекрытий и отверстия в них. Каждый план в группе отличается от другого плана той же группы только расположением и количеством опорных конструкций.

В отличие от предыдущих экспериментов, в текущем эксперименте в качестве метрики деформаций выступает суммарное количество требуемой арматуры, поскольку именно эта характеристика является критерием качества планов опор найденных в ходе рационального планирования опорных конструкций. Кроме того, метрика среднеквадратического отклонения перемещений узлов КЭ плит по вертикали, по которой выстраивались оценки, непосредственно влияет на количество требуемого в плите арматурного усиления.

Также необходимо определить функции агрегации оценок опорных областей для оценки всего плана опорных конструкций. В качестве рассматриваемых функций агрегации принято максимум оценок опорных областей плана MAX, среднее оценок опорных областей плана AVG, среднее оценок опорных областей плана AVG50, больших среднего значения, и среднеквадратическое отклонение оценок опорных областей плана VAR.

Поскольку оценка деформаций в планах опор нацелена на корректное сравнение планов между собой, то в качестве показателя качества принято количество ошибок порядка рангов, т. е. инверсий в рангах планов опор внутри групп. Наибольшее количество возможных инверсий для множества мощностью 25 элементов равно 300. Результаты анализа представлены в табл. 6.

Наилучшей функцией агрегации в среднем является функция среднеквадратического отклонения VAR: средний случай в 1,14 раза лучше, чем MAX, и в 1,48 раза лучше, чем в AVG; худший случай в 1,2 раза лучше, чем в MAX, и в 1,8 раза лучше, чем в AVG. Функция агрегации AVG50 сопоставима, уступая VAR в 1,09 и в 1,03 раза в среднем и худшем случаях соответственно.

Среди функций наилучшие результаты (21,33 % ошибочных сравнений планов в худшем случае, 13,94 % – в среднем) дает функция V с параметрами BLX, BLY, VD в последней перестановке F, возводящей параметр стандартного отклонения расстояний от вершин опорной области до опоры по метрике Чебышёва VD, возведенной в 3-ю степень, наиболее коррелирующую с метрикой деформаций по сравнению с другими степенями параметра VD. По сравнению с другими функциями: функция IX с параметрами MD, OVP, CDS для второй перестановки дает в 1,12 раза больше ошибок в среднем и в 1,2 раза больше ошибок в худшем случае; функция VI с параметрами MD, OVP, CDS для первой перестановки дает в 1,15 раза больше ошибок в среднем и в 1,23 раза больше ошибок в худшем случае.

Таблица 6

Table 6

Результаты анализа качества сравнительных оценок деформаций плит

Quality analysis results of the slab deformation comparative evaluation

MAX	VI(A):19	IX(B):19	XV:17	XII:17	V(F):31	V(B):20	V(A):20
Лучшее	7,67 %	8,33 %	11,33 %	12,33 %	5,33 %	6,67 %	6,67 %
Среднее	18,00 %	18,15 %	21,14 %	22,98 %	15,98 %	17,76 %	17,78 %
Худшее	29,00 %	27,67 %	35,33 %	39,33 %	23,33 %	28,67 %	28,67 %
AVG	VI(A):19	IX(B):19	XV:17	XII:17	V(F):31	V(B):20	V(A):20
Лучшее	21,33 %	14,33 %	11,33 %	10,67 %	8,67 %	6,33 %	6,33 %
Среднее	37,23 %	30,03 %	29,08 %	23,91 %	16,26 %	16,81 %	16,82 %
Худшее	58,67 %	46,00 %	47,00 %	35,67 %	25,67 %	26,33 %	26,33 %
AVG50	VI(A):19	IX(B):19	XV:17	XII:17	V(F):31	V(B):20	V(A):20
Лучшее	11,67 %	9,67 %	10,33 %	9,33 %	7,00 %	7,67 %	7,67 %
Среднее	21,37 %	18,29 %	18,72 %	19,92 %	14,64 %	16,66 %	16,68 %
Худшее	33,67 %	30,33 %	30,67 %	31,00 %	21,67 %	28,33 %	28,33 %
VAR	VI(A):19	IX(B):19	XV:17	XII:17	V(F):31	V(B):20	V(A):20
Лучшее	9,00 %	6,00 %	7,33 %	8,33 %	4,33 %	7,33 %	7,33 %
Среднее	16,08 %	15,63 %	16,91 %	19,83 %	13,94 %	16,43 %	16,43 %
Худшее	26,33 %	25,67 %	30,00 %	32,67 %	21,33 %	27,33 %	27,33 %

Поскольку параметры BLX и BLY являются парными, то для функции V с шестой перестановкой $(VD^3 \cdot BLY + 1)^{BLX} / 2$ наиболее рациональным подходом будет усреднение значений BLX и BLY как в множителе функции, так и в степени. Для упрощения операция деления заменена на вычитание:

$$\left(VD^3 \left(\frac{BLX + BLY}{2} \right) + 1 \right)^{(BLX+BLY)/2} - 1.$$

Именно такая оценка является наилучшей по результатам исследования, по результатам анализа получено в среднем 14 % и в худшем случае 21 % ошибочных сравнений планов опорных конструкций между собой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый подход к оценке деформаций плит перекрытий на основе анализа опорных областей. Разработан алгоритм построения опорных областей на основе диаграммы Вороного на прямоугольных основаниях. Представлена модификация алгоритма для случаев сопряженного расположения опорных конструкций, которая позволила корректно обрабатывать одновременные события фиксации при построении диаграммы Вороного на прямоугольных основаниях.

Для оценки деформаций в опорных областях проведен анализ 18 эвристических параметров опорных областей. Проанализировано 6500 планов опорных конструкций, в том числе проанализирована значимость коэффициентов корреляции при разбиении большого набора опорных областей на группы. Вследствие анализа выбраны 15 значимых параметров, по которым с учетом анализа мультиколлинеарности построены 45 триплетов.

Предложено 15 функций оценок деформаций по триплетам параметров с учетом различных перестановок параметров в функции. Проведен корреляционный анализ триплетов параметров, функций оценок и перестановок параметров. Выделено 13 сравнительных оценок деформаций по критерию Парето-оптимальности относительно линейного коэффициента корреляции Пирсона и рангового коэффициента корреляции Спирмена, из которых выбрано 7 оценок с линейными коэффициентами больше 0,7 и ранговыми коэффициентами больше 0,8. Выбранные оценки проанализированы по степени качества сравнения рангов планов с различным размещением опорных конструкций в группах по 25 планов. По результатам анализа качества наилучшей оценкой деформаций признана функция вида

$$\left(VD^3 \left(\frac{BLX + BLY}{2} \right) + 1 \right)^{(BLX + BLY)/2} - 1,$$

где VD – параметр стандартного отклонения расстояний от опоры до вершин ячейки диаграммы Вороного, нормированный относительно наибольшей стороны плиты; BLX и BLY – параметры длины огибающего ячейку прямоугольника вдоль соответствующих осей. В качестве функции агрегации оценок по опорным областям для общей оценки по плану опор выбрана функция среднеквадратического отклонения. Полученная оценка дает в среднем 14 % и в худшем случае 21 % ошибочных сравнений планов опор между собой.

Таким образом, в работе формулируется новый алгоритм построения опорных областей на основе диаграммы Вороного и обосновывается оценка опорных областей и планов опор по эвристическим параметрам. В будущих исследованиях планируется сделать упор на поиске лучшей оценки плана опор, в том числе применив множественный регрессионный анализ и проанализировав триплеты параметров со вторым Парето-рангом. Кроме того, последующим этапом исследований является применение полученной сравнительной оценки деформаций плиты по опорным областям в проблеме рационального планирования опор, в частности, с помощью ее внедрения в качестве целевого критерия многокритериального генетического алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beeby A.W., Narayanan R.S.* Designers' guide to EN 1992-1-1 and EN 1992-1-2 Eurocode 2: Design of concrete structures design of concrete structures general rules and rules for buildings and structural fire design. – Thomas Telford Publishing, 2005. – 230 p. – DOI: 10.1680/dgte2docs.31050.
2. *Sharafi P.* Cost optimization of the preliminary design layout of reinforced concrete framed buildings: PhD Thesis. – Australia: University of Wollongong, 2013. – 286 p.
3. Optimizing support locations in the roof-column structural system / X. Meng, T.-U. Lee, Y. Xiong, X. Huang, Y.M. Xie // Applied Science. – 2021. – Vol. 11 (6). – P. 2775. – DOI: 10.3390/app11062775.

4. *Petprakob W.* Beam-slab floor optimization using genetic and particle swarm optimization algorithms: M-s of Science thesis. – Thailand: Thammasat University, 2015. – 90 p. – DOI: 10.14457/TU.the.2014.490.
5. *Zelickman Y., Amir O.* Optimization of column layouts in buildings considering structural and architectural constraints // *Engineering Archive (engrXiv)*. – 2024. – P. 1–44. – DOI: 10.31224/2723.
6. *Леушкевич О.Н.* Использование искусственных нейронных сетей для оценки армирования железобетонных плит перекрытий // *Проблемы современного бетона и железобетона*. – Минск, 2019. – Вып. 11. – С. 51–62. – DOI: 10.35579/2076-6033-2019-11-04.
7. Ensemble deep learning enabled multi-condition generative design of aerial building machine considering uncertainties / J. Wang, K. Chen, H. Yang, L. Zhang // *Automation in Construction*. – 2024. – Vol. 157 (11). – P. 105134.
8. Integrated structural-architectural design for interactive planning / B. Steiner, E. Mosavian, S.F. Mehdizadeh, M. Wimmer, P. Musialski // *Computer Graphics Forum*. – 2016. – Vol. 36 (8). – P. 80–94. – DOI: 10.1111/cgf.12996.
9. *Зинов В.И., Картак В.М., Валиахметова Ю.И.* Алгоритм оценки деформации плит перекрытий по пролетно-опорным схемам здания // *Системы анализа и обработки данных*. – 2023. – № 4 (92). – С. 35–54. – DOI: 10.17212/2782-2001-2023-4-35-54.
10. *Зинов В.И., Картак В.М., Валиахметова Ю.И.* Решение многокритериальной задачи рационального размещения несущих стен с помощью генетического алгоритма // *Информатика и автоматизация*. – 2025. – № 24 (2). – С. 464–491. – DOI: 10.15622/ia.24.2.4.
11. *Polat H., Ilerisoy Z.Y.* A geometric method on façade form design with Voronoi Diagram // *Modular*. – 2020. – Vol. 3 (2). – P. 179–194.
12. *Rokicki W., Gawell E.* Voronoi diagrams – architectural and structural rod structure research model optimization // *Malowsze Studia Regoinalne*. – 2016. – Vol. 19. – P. 155–164. – DOI: 10.21858/msr.19.10.
13. *Jung C., Redenbach C.* Crack modelling via minimum-weight surfaces in 3d Voronoi diagrams // *Journal of Mathematics in Industry*. – 2023. – Vol. 13 (1). – DOI: 10.1186/s13362-023-00138-1.
14. *Карабцев С.Н., Стуколов С.В.* Построение диаграммы Вороного и определение границ области в методе естественных соседей // *Вычислительные технологии*. – 2008. – № 13 (3). – С. 65–80.
15. *Bhattacharya P., Gavrilova M.L.* Voronoi diagram in optimal path planning // *Proceeding of the 4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering ISVD 2007*. – Wales: Pontypridd, 2007. – P. 38–47. – DOI: 10.1109/ISVD.2007.43.
16. *Ho Y.-J., Liu J.-S.* Smoothing Voronoi-based obstacle-avoiding path by length-minimizing composite Bezier curve // *Proceeding of the International Conference on Service and Interactive Robotics (SIRCon09)*. – Institute of Information Science: Academia Sinica, 2009.
17. *Papadopoulou E., Lee D.T.* Critical area computation via Voronoi Diagrams // *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. – 1999. – Vol. 18 (4). – P. 463–474. – DOI: 10.1109/43.752929.
18. *Зинов В.И., Картак В.М.* Алгоритмы планирования топологии вертикальных несущих конструкций при проектировании зданий // *Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений (памяти проф. Н.И. Юсуповой) ITIDS'2024: труды X Международной научной конференции: в 2 т. Т. 2.* – Уфа: Уфим. ун-т науки и технологий, 2024. – С. 118–123.

Зинов Владислав Игоревич, аспирант кафедры вычислительной математики и кибернетики Уфимского университета науки и технологий. Основное направление научных исследований – методы оптимизации в задачах проектирования и строительства, системный анализ, системы поддержки принятия решений, эвристические алгоритмы. E-mail: zinovvladislavufa@gmail.com

Zinov Vladislav I., a graduate student at the department of computational mathematics and engineering cybernetics, Ufa university of science and technology. His research interests are currently focused on optimization methods in the design and construction problems, system analysis, decision support systems, heuristic algorithms. E-mail: zinovvladislavufa@gmail.com

An algorithm for the evaluation of floor slab deformation by the support plan based on the Voronoi diagram analysis*

V.I. ZINOV

Ufa University of Science and Technology, 32 Zaki Validi Street, Ufa, 450076, Russian Federation

zinovvladislavufa@gmail.com

Abstract

The assessment of the building plan is a critical step in building design. The finite element method determines fairly accurately stress values and deflections and evaluates the required reinforcement based on them, yet it takes a long time to complete computations. To build a decision support system for rational support structure planning, an algorithm for comparative analysis of floor slab deformations is proposed. It is based on the analysis of heuristic parameters of support areas and their evaluation correlating with actual deformations. This will allow quick comparison of different slab support plans, while using the finite element method only for the best of them. This paper proposes an algorithm for obtaining and evaluating deformations in floor slab supports areas.

To determine support areas based on support plans, a Voronoi diagram with rectangular sites corresponding to the supports calculated using the Chebyshev distance metric is used. The article proposes a modification to the existing Voronoi diagram algorithm to accurately process conjugated rectangular sites via an iterative search for knot points of simultaneous fixation events. The proposed algorithm maintains the heuristic parameters of support areas estimation based on their correlation with the deformation metric on a set of 6500 support plans. The computational experiment estimates the significance of the heuristic parameter correlation coefficients dividing the main data set into small groups of plans and identifies the insignificant ones. The remaining parameters construct a set of triplets and build the proposed evaluation functions, which estimate the correlation for each triplet with deformations metric. In the final experiment, the analysis yields estimation with an average of 14 % and with a worst-case 21% error rate for comparisons of support plans.

Keywords: optimization in the construction industry, floor slabs, support constructions plan, deformations comparative analysis, Voronoi diagram, heuristic parameters, rational support placement, correlation analysis

REFERENCES

1. Beeby A.W., Narayanan R.S. Designers' Guide to EN 1992-1-1 and EN 1992-1-2 Eurocode 2: Design of Concrete Structures Design of Concrete Structures General Rules and Rules for Buildings and Structural Fire Design. Thomas Telford Publishing, 2005. 230 p. DOI: 10.1680/dgte2docs.31050.
2. Sharafi P. Cost optimization of the preliminary design layout of reinforced concrete framed buildings. PhD Thesis. Australia, University of Wollongong, 2013. 286 p.
3. Meng X., Lee T.-U., Xiong Y., Huang X., Xie Y.M. Optimizing support locations in the roof-column structural system. *Applied Science*, 2021, vol. 11 (6), p. 2775. DOI: 10.3390/app11062775.
4. Petprakob W. Beam-slab floor optimization using genetic and particle swarm optimization algorithms. M-s of Science thesis. Thailand, Thammasat University, 2015. 90 p. DOI: 10.14457/TU.the.2014.490.
5. Zelickman Y., Amir O. Optimization of column layouts in buildings considering structural and architectural constraints. *Engineering Archive (enrXiv)*, 2024, pp. 1–44. DOI: 10.31224/2723.
6. Liashkevich A. Ispol'zovanie iskusstvennykh neironnykh setei dlya otsenki armirovaniya zhelezobetonnykh plit perekrytii [Application of artificial neural networks for assessing the reinforcement of reinforced-concrete floor slabs]. *Problemy sovremennogo betona i zhelezobetona [Contemporary Issues of Concrete and Reinforced Concrete]*. Minsk, 2019, iss. 11, pp. 51–62. DOI: 10.35579/2076-6033-2019-11-04.

* Received 29 October 2025.

7. Wang J., Chen K., Yang H., Zhang L. Ensemble deep learning enabled multi-condition generative design of aerial building machine considering uncertainties. *Automation in Construction*, 2024, vol. 157 (11), p. 105134. DOI: 10.1111/cgf.12996.
8. Steiner B., Mosavian E., Mehdizadeh S.F., Wimmer M., Musialski P. Integrated structural-architectural design for interactive planning. *Computer Graphics Forum*, 2016, vol. 36 (8), pp. 80–94. DOI: 10.1111/cgf.12996.
9. Zinov V.I., Kartak V.M., Valiakhmetova Yu.I. Algoritm otsenki deformatsii plit perekrytii po proletno-opornym skhemam zdaniya [An algorithm for estimating the deformation of floor slabs based on the span-support topology of the building]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2023, no. 4 (92), pp. 35–54. DOI: 10.17212/2782-2001-2023-4-35-54.
10. Zinov V.I., Kartak V.M., Valiakhmetova Yu.I. Reshenie mnogokriterial'noi zadachi ratsional'nogo razmeshcheniya nesushchikh sten s pomoshch'yu geneticheskogo algoritma [Solving multi-objective rational placement of load-bearing walls problem via genetic algorithm]. *Informatika i avtomatizatsiya = Informatics and Automation*, 2025, no. 24 (2), pp. 464–491. DOI: 10.15622/ia.24.2.4. (In Russian).
11. Polat H., Ilerisoy Z.Y. A geometric method on façade form design with Voronoi Diagram. *Modular*, 2020, vol. 3 (2), pp. 179–194.
12. Rokicki W., Gawell E. Voronoi diagrams – architectural and structural rod structure research model optimization. *Malowsze Studia Regoinalne*, 2016, vol. 19, pp. 155–164. DOI: 10.21858/msr.19.10.
13. Jung C., Redenbach C. Crack modelling via minimum-weight surfaces in 3d Voronoi diagrams. *Journal of Mathematics in Industry*, 2023, vol. 13 (1). DOI: 10.1186/s13362-023-00138-1.
14. Karabtsev S.N., Stukolov S.V. Postroenie diagrammy Voronogo i opredelenie granits oblasti v metode estestvennykh sosedei [Construction of Voronoi diagrams and defining the area boundary for natural element method]. *Vychislitel'nye tekhnologii = Computing Technologies*, 2008, no. 13 (3), pp. 65–80.
15. Bhattacharya P., Gavrilova M.L. Voronoi diagram in optimal path planning. *Proceeding of the 4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering ISVD 2007, Wales, Pontypridd*, 2007, pp. 38–47. DOI: 10.1109/ISVD.2007.43.
16. Ho Y.-J., Liu J.-S. Smoothing Voronoi-based obstacle-avoiding path by length-minimizing composite Bezier curve. *Proceeding of the International Conference on Service and Interactive Robotics (SIRCon09)*. Institute of Information Science, Academia Sinica, 2009.
17. Papadopoulou E., Lee D.T. Critical area computation via Voronoi Diagrams. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1999, vol. 18 (4), pp. 463–474. DOI: 10.1109/43.752929.
18. Zinov V.I., Kartak V.M. [Algorithms for planning the topology of vertical load-bearing structures in building design]. *Informatsionnye tekhnologii intellektual'noi podderzhki prinyatiya reshenii (pamyati prof. N.I. Yusupovoi) ITIDS'2024 [Information technologies for intelligent decision making support (in memory of prof. N.I. Yusupova) ITIDS'2024]*. *Proceedings of the 10th International Scientific Conference*. In 2 vol. Vol. 2, Ufa, 2025, pp. 118–123. (In Russian).

Для цитирования:

Зинов В.И. Алгоритм оценки деформации плит по плану опор на основе анализа диаграммы Вороного // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 1 (101). – С. 7–30. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-7-30.

For citation:

Zinov V.I. Algorithm otsenki deformatsii plit po planu opor na osnove analiza diagrammy Voronogo [An algorithm for the evaluation of floor slab deformation by the support plan based on the Voronoi diagram analysis]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 1 (101), pp. 7–30. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-7-30.