ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 101, № 1, 2026, с. 47–58

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 101, No. 1, 2026, pp. 47–58

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 681.5.015 DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-47-58

Уточнение МНК-оценок параметров посредством метода инструментальной переменной*

А.А. МИЗЮКАНОВА[a], Г.П. ЧИКИЛЬДИН[b]

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

[a] *mizyukanova.anna@gmail.com* [b] *chikildin@gmail.com*

Наличие математической модели объекта играет ключевую роль при синтезе систем управления, поскольку позволяет провести более глубокий анализ динамических свойств системы, оценить ее устойчивость, управляемость и наблюдаемость. Однако в реальных условиях параметры объекта часто неизвестны, и тогда на первый план выходят методы параметрической идентификации, которые обеспечивают построение модели на основе экспериментальных данных. Хотя современные методы идентификации объектов позволяют получить математические модели, они сталкиваются с рядом принципиальных сложностей, таких как выбор структуры модели, требуемая точность, вычислительная сложность, а также чувствительность к помехам и качеству данных. В работе основной акцент делается на том, что является более важным – это точность, помехоустойчивость алгоритма и качество данных. Рассматривается алгоритм пассивной ретроспективной параметрической идентификации линейного динамического объекта с одним входом и одним выходом, описываемого дифференциальным уравнением n-го порядка, в условиях неполной априорной информации. Под неполной априорной информацией подразумевается отсутствие информации о производных сигналов входа и выхода идентифицируемого объекта. Предлагается метод для уточнения полученных оценок параметров объекта с помощью метода наименьших квадратов посредством применения инструментальной переменной. Приводятся взаимные корреляционные функции между инструментальной переменной и выходным сигналом объекта третьего порядка, а также между инструментальной переменной и обобщенной помехой. Представлены результаты идентификации объекта третьего порядка, полученные классическим методом наименьших квадратов и методом инструментальной переменной. Результаты сравнения показывают эффективность предложенного метода уточнения оценок, полученных методом наименьших квадратов с использованием метода инструментальной переменной.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, одноканальный объект управления, линейный динамический объект, дифференцирование сигналов, интегрирование по частям, формирующая функция, метод наименьших квадратов, метод инструментальной переменной, корректирующие параметры

---

* *Статья получена 17 июля 2025 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Определение работоспособной математической модели объекта является ключевой задачей системного анализа и управления, решение которой заключается в выборе подходящего метода идентификации. С помощью успешно идентифицированной модели можно лучше понять физические и математические процессы, происходящие в системе управления, делать более точные прогнозы ее поведения в будущем, что особенно важно в инженерных отраслях, а также оптимизировать параметры управления и снижать риски при проектировании сложных технических комплексов.

Особую значимость задача идентификации приобретает в современных условиях, когда стремительно развиваются технологии и увеличивается объем данных, который генерируется современными системами. В таком случае становится всё более актуальной необходимость быстро и точно определять параметры модели. Также появляется острая необходимость в создании новых методов идентификации или доработке существующих классических методов (таких как метод наименьших квадратов (МНК), метод максимального правдоподобия и т. д.).

В рамках традиционных методов идентификации использование классического МНК для повышения точности и помехоустойчивости алгоритма невозможно из-за сильной смещенности получаемых оценок [1]. В работах [2, 3] была предложена некоторая доработка классического метода параметрической идентификации динамического объекта, представленного в виде линейного дифференциального уравнения. Идентификация проводилась на основе измерений входного и выходного сигналов без привлечения информации об их производных. Оценивание параметров осуществлялось МНК [4–7], а необходимая система линейных алгебраических уравнений, требуемая для реализации МНК, была сформирована посредством специальной функции и операции интегрирования по частям [8]. Здесь же была проиллюстрирована корректность применения операции многократного интегрирования по частям для замены численного дифференцирования зашумленных сигналов объекта аналитическим дифференцированием специальных функций.

В работах [2, 3] также приводятся результаты идентификации модельных объектов третьего порядка. Среднеквадратическая погрешность оценивания параметров в отсутствие помех составила около 0,01 %. Однако, как известно, МНК обладает слабой помехоустойчивостью [9] и при идентификации того же объекта в присутствии широкополосной помехи уровня 10 % (максимум модуля отношения помеха/сигнал на интервале идентификации) на выходном сигнале были получены среднеквадратические погрешности около 1 %. Среднеквадратическая погрешность оценивания параметров определялась относительно истинных значений параметров объекта. Анализ результатов в [2, 3] показал, что основная составляющая погрешностей порождена смещенностью МНК-оценок относительно истинных параметров.

В ряде работ приводятся рекомендации по поводу уменьшения влияния обобщенной помехи на погрешности идентификации. Например, в [10] предлагается так называемый обобщенный МНК (ОМНК), суть которого заключается в «выбеливании» обобщенной помехи. Обобщенная помеха представляется в виде реакции дискретного формирующего фильтра на белый шум, что, в свою очередь, позволяет выразить обобщенную помеху в виде произведения белого шума на передаточную функцию фильтра. Поскольку белый шум не коррелирует с другими сигналами, такая модель обеспечивает стремление к нулю взаимной корреляционной функции между ним и обобщенной помехой.

В работах [11, 12] приводится и исследуется прямой компенсационный МНК (ПКМНК). В данном методе синтезируется специальное добавочное слагаемое, которое вводится в правую часть алгебраической системы уравнений и частично устраняет влияние обобщенной помехи в плане смещенности получаемых оценок.

Особый интерес с точки зрения простоты реализации, не требующий сложных оптимизаций (в отличие, например, от метода максимального правдоподобия), вызывает метод инструментальной переменной (МИП) [13–15]. В настоящей статье рассмотрим возможность повышения помехоустойчивости МНК посредством МИП.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим алгоритм параметрической идентификации на базе МНК в условиях неполной априорной информации, предложенный в работах [2, 3]. В данном алгоритме используется специальный подход, исключающий необходимость численного дифференцирования зашумленных сигналов и применяемый к линейным динамическим объектам, математическая модель которых описывается дифференциальным уравнением

$$y^{(l)}(t)+\sum_{d=1}^{l} b_d y^{(d-1)}(t)=\sum_{f=1}^{r+1} c_f x^{(f-1)}(t) \tag{1}$$

или в виде эквивалентного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t)=u_0(t), \tag{2}$$

где $a_i=\begin{cases} b_d \text{ при } d\in[1,\ l] \\ c_f \text{ при } f\in[1,\ r+1] \end{cases}$, где $i\in[1,\ n]$, $n=l+r+1$,

$u_i(t)=\begin{cases} y^{(d-1)}(t) \text{ при } d\in[1,\ l] \\ -x^{(f-1)}(t) \text{ при } f\in[1,\ r+1] \end{cases}$, где $i\in[1,\ n]$, $n=l+r+1$,

$u_0(t)=-y^{(l)}(t)$.

МНК предполагает формирование системы линейных алгебраических уравнений путем умножения слагаемых выражения (2) на некоторую систему n линейно независимых функций с последующим интегрированием на определенном интервале времени. В результате система линейных алгебраических уравнений запишется как

$$\mathbf{Ua}=\mathbf{u}_0, \tag{3}$$

где $\mathbf{U}=(u_{ij})$, $i\in[1,\ m_u]$, $j\in[1,\ n]$ – матрица координат объекта, $\mathbf{a}=(a_j)$, $j\in[1,\ n]$ – вектор искомых параметров, $\mathbf{u}_0=(u_{0i})$, $i\in[1,\ m_u]$ – вектор правой части.

С учетом искажений сигналов объекта $u_{i*}(t)=u_i(t)+\delta u_i(t)$, $i\in[0,\ n]$ может быть сформирована алгебраическая система [2, 3]

$$\mathbf{U}_*\mathbf{a}=\mathbf{u}_{*0}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}_*=(u_{*ij})$, $i\in[1,\ m_u]$, $j\in[1,\ n]$ – матрица координат объекта, $\mathbf{a}=(a_j)$, $j\in[1,\ n]$ – вектор искомых параметров, $\mathbf{u}_{*0}=(u_{*0i})$, $i\in[1,\ m_u]$ – вектор правой части, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}=(\delta v_i)$, $i\in[1,\ m_u]$ – вектор обобщенной погрешности, содержащий помимо неизмеримой помехи $\delta u_i(t)$, $i\in[0,\ n]$, еще и методическую погрешность интегрирования. Под неизмеримой помехой подразумевается модель случайного процесса, которую невозможно последовательно описать с помощью стандартных вероятностных методов. Данная помеха порождается искажениями входного $\delta x(t)$ и выходного сигналов $\delta y(t)$ объекта управления в процессе их измерения.

Ставится задача уточнения оценок параметров объекта идентификации, полученных путем решения системы алгебраических уравнений (4) МНК. Большие погрешности в МНК-оценках при наличии помех в измеряемых сигналах возникают в основном за счет их смещенности относительно истинных параметров.

2. АЛГОРИТМ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

В исследованиях [2, 3] система (4) была решена с помощью МНК. Применение МИП приводит данную систему к виду

$$\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathbf{T}}\mathbf{U}_*\mathbf{a}=\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_{*0}+\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \tag{5}$$

за счет умножения каждого члена равенства (4) на коэффициент $\dfrac{1}{K_0}$ и транспонированную матрицу $\mathbf{Q}_*$.

Матрица $\mathbf{Q}_*$ формируется из отсчетов реализации функции q_{*k}, $k\in[K_s,\ K_0]$, которая называется инструментальной переменной, и вычисляется как

$$\mathbf{Q}_*=\left[\mathbf{q}_{*(K_S+1)}^{\mathbf{T}},\ \mathbf{q}_{*(K_S+2)}^{\mathbf{T}},\ \ldots,\ \mathbf{q}_{*(K_S+K_0)}^{\mathbf{T}}\right].$$

Инструментальная переменная q_{*k}, $k\in[K_s,\ K_0]$ должна удовлетворять двум требованиям [13]: сильно коррелировать с элементами вектора $\mathbf{u}_{*k}$ и не коррелировать с обобщенной помехой δv_k.

Выполнение первого требования обеспечит невырожденность матрицы $\mathbf{Q}_*^{\mathbf{T}}\mathbf{U}_*$, а выполнение второго при больших K_0 приведет к выполнению условия

$$\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \approx \mathbf{0}\,. \tag{6}$$

Однако выполнение данных требований создает проблему выбора инструментальной переменной. Известны два подхода к выбору инструментальной переменной [13] – метод сдвига и метод линейного фильтра.

Рассмотрим метод сдвига в условиях отсутствия помех на входном сигнале $\delta x(t) = 0$. При этом инструментальную переменную сформируем как выходной сигнал идентифицируемого объекта, сдвинутый на r отсчетов:

$$q_{*k} = y_{*(k+r)}\,,$$

причем сдвиг r должен быть таким, чтобы сигнал $y_{*(k+r)}$ не коррелировал с обобщенной помехой δv_k. Однако никаких рекомендаций по выбору параметра r не дается.

В данной работе предлагается оригинальный подход к выбору параметра r, а именно, посредством минимизации информационного критерия близости выходных сигналов модели и идентифицируемого объекта. При использовании информационного критерия оценка параметра r отыскивается в рамках l-процедуры ($l \in [1, L]$, L – наперед задаваемое число, например, $L \in [25, 50]$) в виде $r_0 = l_0$, где l_0 определяется из условия минимального относительного среднеквадратического рассогласования выходных сигналов идентифицируемого объекта и получаемой на каждом значении l модели в виде

$$\varepsilon_{l_0}(K_0) = \min_{l\in[1,L]} \sqrt{\sum_{k=K_s+1}^{K_0} [y_{*k} - y_{\text{м}k}]^2 \Bigg/ \sum_{k=K_s+1}^{K_0} [y_{*k}]^2}\;. \tag{7}$$

В этом выражении y_{*k} есть выходной сигнал объекта, а $y_{\text{м}k}$ представляет собой выходной сигнал модели, изначально полученной МНК и затем уточняемой в рамках l-процедуры для выбора параметра сдвига r.

Таким образом, на базе алгоритма параметрической идентификации с применением подхода для замены численного дифференцирования измеренных сигналов объекта, предложенного в работах [2, 3], был сформирован новый метод параметрической идентификации на базе МИП. Используя полученную рекомендацию по выбору параметра сдвига r в процессе формирования инструментальной переменной, исследуем предложенный алгоритм на точность и помехоустойчивость.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОШИБОК ИДЕНТИФИКАЦИИ НА БАЗЕ МНК И МИП

С целью исследования возможностей описанного МИП, использующего подход для замены численного дифференцирования зашумленных сигналов и предложенное условие выбора параметра сдвига, было разработано программное обеспечение, с помощью которого была проведена идентификация модельного объекта третьего порядка вида

$$y^{(3)}(t)+9y^{(2)}(t)+60y^{(1)}(t)+200y(t)=400x(t), \tag{8}$$

ранее идентифицированного с помощью МНК в [2, 3].

Для исследования методов в процессе моделирования использовались следующие данные. На вход объекта подавался случайный сигнал с равномерным законом распределения в диапазоне частот $\omega\in[0, 16]$ рад/с. Максимальная частота эффективной полосы амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) объекта Ω_w = 15 рад/с. Выходной сигнал объекта был получен путем решения дифференциального уравнения методом Адамса четвертого порядка точности с прогнозом и коррекцией решения и вычислением первых двух точек решения методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Шаг дискретизации по времени Δt = 0,02 с на всем интервале определения.

Формирование системы линейных алгебраических уравнений осуществлялось посредством предложенного авторами в работе [2] так называемого «скользящего» формирования, суть которого заключается в том, что в процессе получения строк формируемой матрицы системы линейных алгебраических уравнений использовался лишь один формирующий фильтр.

На вход этого формирующего фильтра подавались равной длины отрезки координат объекта из одних и тех же реализаций, но сдвинутые на некоторое $K_{\text{В}}$ количество отсчетов (например, $K_{\text{В}}=5\div15$), выбираемых исходя из линейной независимости строк формируемой матрицы. При формировании использовалась операция интегрирования по частям. Координаты объекта, из которых формировались уравнения системы, определялись через интеграл свертки в виде

$$u_j(t_i)=\int_{t_i-T}^{t_i} w^{(j)}(\tau)y(t_i-\tau)d\tau,\quad j\in[0,\ n-1], \tag{9}$$

$$u_n(t_i)=-\int_{t_i-T}^{t_i} w^{(0)}(\tau)x(t_i-\tau)d\tau, \tag{10}$$

$$u_0(t_i)=-\int_{t_i-T}^{t_i} w^{(l)}(\tau)y(t_i-\tau)d\tau. \tag{11}$$

Таким образом, для фиксированного момента времени t_i на интервале T формируется i-я строка системы уравнений. Следующий момент времени t_{i+1} определим в виде $t_{i+1}=t_i+\Delta T$, где $\Delta T=K_{\text{В}}\Delta t$ – шаг, с которым осуществляется скольжение по интервалу идентификации (измеренным исходным данным), $K_{\text{В}}$ – выбираемый параметр скольжения.

Выражение импульсной характеристики (ИХ) формирующего фильтра имеет вид [8]

$$w(t) = (\alpha^{(m+1)} / m!) t^m e^{-\alpha \cdot t}, \quad m \ge l, \ \alpha > 0, \tag{12}$$

где l – максимальная учитываемая производная, используемая в операции интегрирования по частям.

Производные ИХ вычисляются согласно соотношениям

$$w^{(r-1)}(t) = \alpha^{(r-1)} \sum_{i=1}^{r} b_{ri} v_i(t), \quad r \in [1,\ l+1], \tag{13}$$

где

$$b_{ri} = (-1)^{(r-i)} (r-1)! / [(r-i)!\,(i-1)!],$$

$$v_i(t) = [\alpha^{(m+2-i)} / (m+1-i)!] t^{(m+1-i)} e^{-\alpha \cdot t}.$$

Вид и расположение ИХ и ее производных во временной и частотной областях определяются параметрами α и m. Детальное описание формирующего фильтра (ИХ и ее производных), его временные и частотные характеристики в зависимости от выбора α и m приведены в [8], рекомендации по выбору параметров α и m – в [16, 17].

При моделировании использовался оригинальный алгоритм выбора корректирующего параметра α при фиксированном значении параметра m, приведенный в [16, 17]. Данный алгоритм позволяет по задаваемой максимальной частоте АЧХ идентифицируемого объекта определить значение параметра α, обеспечивающего расположение спектра ИХ и ее производных в диапазоне АЧХ объекта, что существенно влияет на помехоустойчивость метода в целом, особенно при высокочастотной помехе.

В табл. 1 показаны результаты, полученные при идентификации объекта третьего порядка (8) в процессе моделирования предлагаемого МИП. Линейная алгебраическая система формировалась из четырех уравнений с помощью фильтра с параметрами $\alpha = 5$ и $m = 5$ в условиях отсутствия помех $\delta y_m = 0$, $\alpha = 2{,}75$ и $m = 5$ при широкополосной (ШП) помехе ($\omega \in [0, 25]$ рад/с) уровня $\delta y_m = 0{,}1$ и высокочастотной (ВЧ) помехе ($\omega \in [20, 30]$ рад/с) уровня $\delta y_m = 0{,}1$. Параметр $K_{\text{В}} = 5$, а квазиоптимальное значение r_0 параметра сдвига выбиралось согласно (7) из диапазона $r \in [1, 35]$.

Оценивание результатов идентификации проводилось по погрешностям, полученным при выборе квазиоптимального значения параметра сдвига r_0 согласно соотношению (7). Осуществлялось дополнительное (контрольное) вычисление относительной среднеквадратической погрешности, определяемой выражением

$$e_{\text{со}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [a_i - a_{\text{о}i}]^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} [a_i]^2}, \tag{14}$$

где a_i, $i \in [1, n]$ – истинные коэффициенты модели (2), числовые значения которых приведены в выражении (8), а a_{oi}, $i \in [1, n]$ – полученные оценки. Следует отметить, что оба способа оценивания результатов идентификации совпали.

В таблице приведены также результаты, полученные МНК для разных способов формирования из [2, 3] для сравнения с предложенным в данной статье МИП.

Сравнительные результаты идентификации на базе МНК и МИП

Comparative results of identification based on LSM and IVM

Уровень помехи	Метод и его параметры		
	МНК	МИП	
	e_{co}	r_0	e_{co}
$\delta y_m = 0$	0,4E-03	12	0,2E-03
ВЧ-помеха $\delta y_m = 0{,}1$	0,8E-03	3	0,9E-03
ШП-помеха $\delta y_m = 0{,}1$	0,4E-01	13	0,6E-02

Наиболее реальный случай практической идентификации – искажение измеряемого сигнала ШП-помехой, и в этом случае наглядно наблюдается уменьшение ошибки в МИП по сравнению с МНК практически на порядок, что явно свидетельствует о преимуществе предложенного МИП.

Рисунок 1 показывает помехоустойчивость предлагаемого метода. С увеличением уровня помехи растет среднеквадратическая ошибка идентификации, однако в случае искажения выходного сигнала на уровень 50 % (максимум модуля отношения помеха/сигнал) ошибка идентификации составляет 10 %.

Стоит отметить, что предложенный метод остается линейным, сохраняет простоту в реализации и менее чувствителен к помехам по сравнению с МНК из [2, 3].

Что касается требований, предъявляемых к инструментальной переменной, то для примера были вычислены взаимные корреляционные функции R_{qy} между инструментальной переменной q_{*k} и выходным сигналом объекта y_{*k}, а также $R_{q\delta v}$ между инструментальной переменной q_{*k} и обобщенной помехой δv_k (рис. 2).

Данные корреляционные функции были получены при моделировании модельного объекта (8) посредством МИП в режиме функционирования с ШП-помехой уровня $\delta y_m = 0{,}1$.

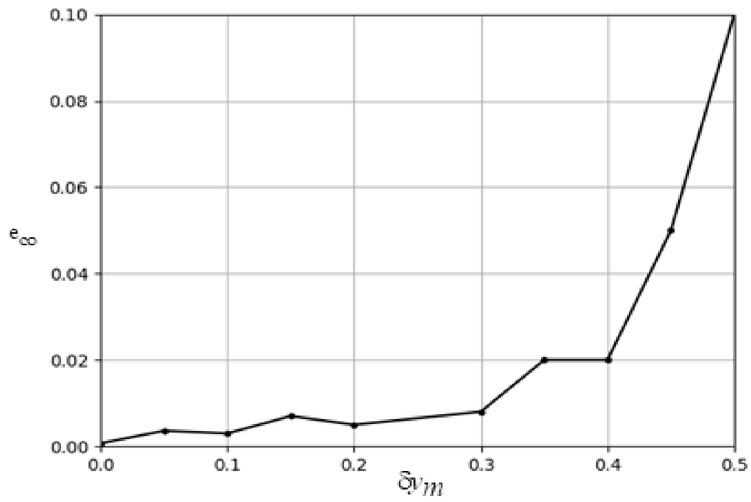

Рис. 1. График зависимости ошибки e_{co} от уровня помехи δy_m

Fig. 1. Graph of the error e_{co} depending on the level of interference δy_m

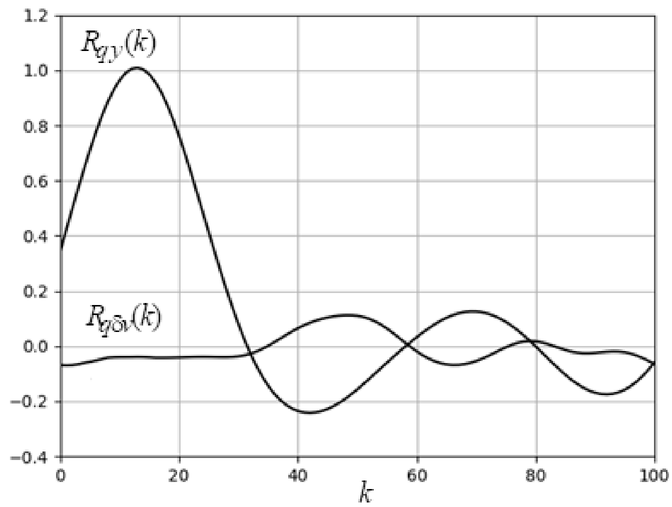

Рис. 2. Взаимные корреляционные функции $R_{q\,y}$ и $R_{q\,\delta v}$

Fig. 2. Cross correlation functions $R_{q\,y}$ and $R_{q\,\delta v}$

Полученные кривые наглядно, хоть и не в полной мере, иллюстрируют выполнение требований к инструментальной переменной – сильную корреляцию с сигналом и малую корреляцию с обобщенной помехой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был предложен метод для уточнения МНК-оценок параметров идентифицируемого объекта с одним входом и одним выходом, получаемых в условиях неполной априорной информации посредством МИП (метод сдвига).

Разработан способ выбора параметра сдвига, базирующийся на минимизации информационного критерия близости выходных сигналов модели и идентифицируемого объекта.

Приведены результаты идентификации объекта третьего порядка, полученные посредством МИП в сравнении с МНК и иллюстрирующие несомненное превосходство предложенного МИП в плане помехоустойчивости. Среднеквадратическая погрешность идентификации в условиях влияния широкополосных помех на выходной сигнал объекта (это наиболее вероятный случай) уменьшилась практически на порядок.

Получены взаимные корреляционные функции между инструментальной переменной и выходным сигналом объекта, а также между инструментальной переменной и обобщенной помехой, иллюстрирующие достаточно близкие требования к инструментальной переменной в плане ее корреляции с выходным сигналом объекта и обобщенной помехой.

Дальнейшее движение направлено в сторону повышения помехоустойчивости МИП в условиях неполной априорной информации об объекте за счет замены метода сдвига на метод линейного фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hsu D., Kakade S.M., Zhang T.* Random design analysis of ridge regression // Foundations of Computational Mathematics. – 2014. – Vol. 14 (3). – P. 569–600.

2. *Mizyukanova A.A.*, *Chikildin G.P.* Parametric identification under incomplete a priori information // 2023 IEEE 24th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). – IEEE, 2023. – P. 1640–1643.

3. *Mizyukanova A.A.*, *Chikildin G.P.*, *Karasenko I.I.* On linear algebraic system forming in parametric identification problems // 2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). – IEEE, 2023. – P. 940–943.

4. *Турчак Л.И.* Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

5. *Lawson C.L.*, *Hanson R.J.* Solving least squares problems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

6. *Söderström T.*, *Hong M.*, *Xing Zheng W.* Convergence properties of bias-eliminating algorithms for errors-in-variables identification // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. – 2005. – Vol. 19 (9). – P. 703–722.

7. *Ljung L.*, *Söderström T.* Theory and practice of recursive identification. – MIT Press, 1983.

8. *Чикильдин Г.П., Мизюканова А.А.* Анализ функции, формирующей алгебраическую систему в параметрической идентификации // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 95–104. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-95-104.

9. *Ljung L.* System identification: Theory for the user. – Prentice-Hall, 1987.

10. *Haia T.C.* On least squares algorithm system parameter identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1976. – Vol. 21 (1). – P. 104–108.

11. *Feng C.B.*, *Zheng W.X.* Robust identification of stochastic linear systems with correlated noise // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. – 1991. – Vol. 138. – P. 484–492.

12. *Zheng W.X.* On a least-squares-based algorithm for identification of stochastic linear systems // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1998. – Vol. 46. – P. 1631–1638.

13. Современные методы идентификации систем: пер. с англ. / под ред. П. Эйкхофа. – М.: Мир, 1983. – 400 с.

14. *Спиди К.*, *Браун Р.*, *Гудвин Дж.* Теория управления: пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 248 с.

15. *Young P.* An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process // Automatica. – 1970. – Vol. 6 (2). – P. 271–287.

16. *Мизюканова А.А.*, *Чикильдин Г.П.* Определение зависимости частотных свойств от параметров функции, используемой в методе наименьших квадратов параметрической идентификации // Автометрия. – 2025. – Т. 61, № 2. – С. 50–55. – DOI: 10.15372/AUT20250206.

17. *Mizyukanova A.A., Chikildin G.P.* Determination of the dependence of the frequency properties on the parameters of the function used in the least squares method of parametric identification // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2025. – Vol. 61 (2). – P. 220–225. – DOI: 10.3103/S8756699025700268.

Мизюканова Анна Александровна, аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – параметрическая идентификация, численные методы. E-mail: mizyukanova.anna@gmail.com

Чикильдин Геннадий Павлович, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – идентификация динамических объектов, вычислительная математика, цифровая обработка сигналов. E-mail: chikildin@gmail.com

Mizyukanova Anna A., PhD student at the Automation Department, Novosibirsk State Technical University. The main field of her scientific research is parametric identification and numerical methods. E-mail: mizyukanova.anna@gmail.com

Chikildin Gennady P., PhD (Eng.), associate professor, Department of Automation, Novosibirsk State Technical University. The main field of his scientific research is identification of dynamic objects, numerical mathematics, and digital signal processing. E-mail: chikildin@gmail.com

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-47-58

Refinement of LSM parameter estimates using the instrumental variable method[*]

A.A. MIZYUKANOVA[a], *G.P. CHIKILDIN*[b]

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[a] *mizyukanova.anna@gmail.com* [b] *chikildin@gmail.com*

Abstract

The availability of a mathematical model of an object plays a key role in the synthesis of control systems, as it enables a deeper analysis of the system dynamic properties, and allows for the assessment of its stability, controllability, and observability. However, in real-world conditions, the object parameters are often unknown, which brings methods of parametric identification to the forefront. These methods facilitate the construction of a model based on experimental data. Although modern object identification methods are capable of obtaining mathematical models, they face a number of fundamental challenges, such as selecting the model structure, achieving the required accuracy, managing computational complexity, and mitigating sensitivity to noise and data quality. This work places primary emphasis on what is deemed more critical: namely, the accuracy, noise immunity of the algorithm, and the quality of the input data. An algorithm for the parametric identification of a linear dynamic object with a single input and a single output, described by an n-th order differential equation, under conditions of incomplete a prior information is considered. Incomplete a prior information here implies the absence of information on the derivatives of the identified object input and output signals. An approach is proposed for refining the parameter estimates obtained via the least squares method through the application of the instrumental variable. The mutual correlation functions between the instrumental variable and the output signal of a third-order object, as well as between the instrumental variable and the generalized noise, are presented. The results of identifying a third-order object, obtained by the classical least squares method and the instrumental variable method, are provided. The comparative results demonstrate the effectiveness of the proposed method for refining the least squares estimates using the instrumental variable approach.

Keywords: parametric identification, SISO plant, linear dynamic plant, signal differentiation, integration by parts, forming function, least square method, instrumental variable method, correcting parameters

---

[*] *Received 17 July 2025.*

REFERENCES

1. Hsu D., Kakade S.M., Zhang T. Random design analysis of ridge regression. *Foundations of Computational Mathematics*, 2014, vol. 14 (3), pp. 569–600.

2. Mizyukanova A.A., Chikildin G.P. Parametric identification under incomplete a priori information. *2023 IEEE 24th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM)*. IEEE, 2023, pp. 1640–1643.

3. Mizyukanova A.A., Chikildin G.P., Karasenko I.I. On linear algebraic system forming in parametric identification problems. *2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE)*. IEEE, 2023, pp. 940–943.

4. Turchak L.I. *Osnovy chislennykh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 320 p.

5. Lawson C.L., Hanson R.J. *Solving least squares problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

6. Söderström T., Hong M., Xing Zheng W. Convergence properties of bias-eliminating algorithms for errors-in-variables identification. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2005, vol. 19 (9), pp. 703–722.

7. Ljung L., Söderström T. *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press, 1983.

8. Chikildin G.P., Mizyukanova A.A. Analiz funktsii, formiruyushchei algebraicheskuyu sistemu v parametricheskoi identifikatsii [Analysis of the function that forms an algebraic system in parametric identification]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 2 (86), pp. 95–104. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-95-104.

9. Ljung L. *System identification: Theory for the user*. Prentice-Hall, 1987.

10. *Haia T.C.* On least squares algorithm system parameter identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, vol. 21 (1), pp. 104–108.

11. Feng C.B., Zheng W.X. Robust identification of stochastic linear systems with correlated noise. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 1991, vol. 138, p. 484–492.

12. Zheng W.X. On a least-squares-based algorithm for identification of stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, vol. 46, pp. 1631–1638.

13. Eykhoff P., ed. *Sovremennye metody identifikatsii system* [Trends and progress in system identification]. Moscow, Mir Publ., 1983. 400 p. (In Russian).

14. Speedy C.B., Broun R.F., Goodwin G.C. *Teoriya upravleniya* [Control theory]. Moscow, Mir Publ., 1973. 248 p. (In Russian).

15. Young P. An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 1970, vol. 6 (2), pp. 271–287.

16. Mizyukanova A.A, Chikildin G.P. Opredelenie zavisimosti chastotnykh svoistv ot parametrov funktsii, ispol'zuemoi v metode naimen'shikh kvadratov parametricheskoi identifikatsii [Determination of the dependence of the frequency properties on parameters of the function used in the least squares parametric identification]. *Avtometriya = Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 50–55. DOI: 10.15372/AUT20250206. (In Russian).

17. Mizyukanova A.A, Chikildin G.P. Determination of the dependence of the frequency properties on the parameters of the function used in the least squares method of parametric identification. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2025, vol. 61 (2), pp. 220–225. DOI: 10.3103/S8756699025700268.

Для цитирования:

Мизюканова А.А., Чикильдин Г.П. Уточнение МНК-оценок параметров посредством метода инструментальной переменной // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 1 (101). – С. 47–58. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-47-58.

For citation:

Mizyukanova A. A., Chikildin G. P. Utochnenie MNK-otsenok parametrov posredstvom metoda instrumental'noi peremennoi [Refinement of LSM parameter estimates using the instrumental variable method]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 1 (101), pp. 47–58. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-47-58.