

Построение гибкого процесса полиномиального синтеза системы с управлением пониженного порядка *

М.Н. РУДОМЕТКИНА^{1,a}, А.В. ЧЕХОНАДСКИХ^{2,b}

¹ 109316, РФ, г. Москва, Волгоградский пр., 43, стр. 1А, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Колледж многоуровневого профессионального образования

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

^a mn.rud@inbox.ru ^b chekhonadskikh@corp.nstu.ru

На основе большого числа изученных примеров в работе строятся принципиальные схемы синтеза систем автоматического управления как гибкого процесса. Рассматриваются линейные стационарные системы с регуляторами пониженного порядка, управление ведется в непрерывном времени; при этом используется полиномиальный синтез методом критических корневых диаграмм. Наряду с классическими одноканальными системами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, рассматриваются примеры дескрипторных систем, описываемых дифференциальными и алгебраическими уравнениями, вибрационные системы с гироскопическим регулированием и др. На верхнем иерархическом уровне в синтезе выделяется пять типичных стадий; на среднем уровне в каждой из них прослеживаются характерные для гибких процессов свойства и приемы, строятся схемы, включающие все принципиальные составляющие метода критических корневых диаграмм. Поскольку нижний уровень непосредственно ориентирован на программную реализацию, он в работе не рассматривается. В последней стадии к полученной замкнутой системе применяются оценки компараторного (качественного, не формализуемого алгоритмически) характера, допускающие принятие результата в качестве окончательного или возврат к началу синтеза с целью повторения всего процесса для более сложной или более простой структуры регулятора. Построенные схемы представляются необходимым этапом в перспективе полной или частичной автоматизации процесса синтеза систем с помощью критических корневых диаграмм и применения методов process mining (интеллектуального анализа процессов). Таким образом, в статье подводится основа для применения ИИ к инженерно-конструкторской проблеме по аналогии с тем, как это до сих пор делалось в process mining бизнес-процессов и промышленного производства.

Ключевые слова: анализ процессов, гибкий процесс, линейная стационарная система, синтез системы управления, пониженный порядок, степень устойчивости, расположение полюсов, критические корневые диаграммы, полиномиальные уравнения, компараторная оценка

* Статья получена 20 июня 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

Быстро развивающийся в последние годы интеллектуальный анализ процессов (process mining) находит свое применение в самых разных областях: поиск информации в сетевых источниках и преобразование информационных ресурсов, разбор и распознавание текстов (в том числе гипертекстов и метатекстов) на естественных и искусственных языках, бизнес-процессы, сложные проектно-конструкторские и технологические работы, схемы лечения в медицине [1–3]. Одним из важнейших предметов изучения и в то же время полей деятельности для интеллектуального анализа является так называемый гибкий процесс (flexible process). Дать ему точное определение вряд ли возможно, и обычно под гибким процессом понимается сложная по структуре и многофазная по выполнению взаимосвязанная активность, предполагающая вариативность действий и адаптацию к особенностям ситуации при конкретном осуществлении. Хотя организационные и структурные операции и характерные черты гибких процессов могут наблюдаться в жестких регламентах и алгоритмах, на практике те и другие различаются по тяготению к четко фиксированному стандарту или отходу от него.

Методы синтеза систем автоматического управления (САУ) в технике почти без исключения оказываются гибкими процессами инженерно-конструкторского содержания. Даже в работе с готовыми моделями объектов, когда задача сводится к определению структуры и настроек регуляторов, практически каждый синтез включает типичные «гибкие» процессные ситуации (ветвление, детализацию, скрытие, блокирование, отсечение и др., [4, 5]), причем в нескольких фазах. САУ с определенной структурой регулятора и найденными настройками параметров управления тестируется стандартным набором возмущений переходных процессов, и по результатам всей совокупности переходных характеристик, полученных с помощью расчетов или измерений, имеющийся результат принимается или пересматривается. Последнее носит принципиально компараторный характер [6] и едва ли допускает полную формализацию и автоматизацию. Однако на предыдущих стадиях такие возможности представляются, особенно при наличии адекватной модели реального объекта и использовании стандартных блоков регулятора.

Как гибкий процесс в статье рассматривается синтез линейных стационарных САУ, включающих в себя регулятор пониженного порядка [7]; управление производится в непрерывном времени; всё дальнейшее в той или иной мере относится к дескрипторным системам [8] и некоторым другим неклассическим типам объектов [9–11], а также к стабилизации малых возмущений установившегося режима в нелинейных динамических системах. Разработанный для вышеназванного класса систем метод критических корневых диаграмм [7, 8, 11] допускает программную реализацию ряда своих составляющих, однако вряд ли укладывается в жесткий алгоритм даже очень высокой сложности. Многие препятствия связаны с лежащей в основе метода некорректной (в частности, невыпуклой и недифференцируемой, [12]) оптимизацией, которую на практике всё же удается осуществить [7–9], а также с известными затруднениями численного решения систем полиномиальных уравнений над полем действительных чисел. Отдельную трудность составляют сложность, разветвленность и разнородность осуществляемых в ходе реализации процедур.

Преимущественно о взаимозависимости и координации отдельных фаз в рамках общего метода и пойдет речь ниже. Конкретные примеры нахождения стабилизирующего управления для классических и неклассических САУ методом критических корневых диаграмм достаточно многочисленны [13–17] и при всём своем разнообразии позволяют выделить и схематизировать принципиальные составляющие синтеза САУ пониженного порядка с помощью критических корневых диаграмм.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Синтез линейной стационарной САУ пониженного порядка, осуществляемый с применением критических корневых диаграмм, проводится в частотной области, т. е. описание управляемого объекта и регулятора вместе с возникающими в процессе синтеза структурирующими и расчетными фазами предусматривает применение прямого и по окончании синтеза обратного преобразования Лапласа к дифференциальным или дифференциально-алгебраическим уравнениям исходной динамической системы.

В целом схема синтеза как гибкого процесса должна включать все принципиальные стадии, и в них должно отражаться большинство операций, необходимых для осуществления метода¹. Таких стадий в общем случае пять:

i – начальный выбор структур и параметров синтеза;



ii – составление списка критических корневых диаграмм и корневых многочленов;



iii – решение системы полиномиальных уравнений для каждого корневого многочлена;



iv – верификация решений и реализуемости критических корневых диаграмм;



v – тестирование решений в пространстве состояний.

Каждая стадия отображается в схеме с детализацией, достаточной для передачи ее характерных особенностей. Нетривиальных циклов внутри стадий здесь не возникает (с одним исключением на стадии *iii*), но стоит оговорить очевидную необходимость возвращения к начальной фазе – определению структуры регулятора, числа каналов управления и критерия оптимальности его настроек в тех случаях, когда первичный выбор не позволяет получить удовлетворительного решения.

¹ Схему не предполагается доводить до уровня конкретных предикатов, какие в общем случае позволяют осуществлять итоговую программную реализацию [18], однако все принципиальные составляющие метода в ней следует отразить.

2. ПЕРВАЯ СТАДИЯ: НАЧАЛЬНЫЙ ВЫБОР

Исходными данными полиномиального синтеза являются следующие составляющие:

- математическая модель объекта управления (plant) в форме передаточной функции для одноканальной или передаточной матрицы для многоканальной систем $Pl(s) = N_{pl}(s)D_{pl}^{-1}(s)$;

- технически состоятельная компоновка регулятора (controller), включая число управляющих воздействий и создающие их стандартные блоки, т. е. в комплексе – передаточная функция или матрица регулятора $Con(s) = D_c^{-1}(s)N_c(s)$, в числитель $N_c(s)$ которой, как правило, входят настраиваемые параметры управления C ; возможно, что для последних будут заданы также некоторые границы значений;

- схема обратной связи объекта и регулятора с учетом числа каналов управления;

- формальные требования и ограничения к расположению в комплексной плоскости (левой полуплоскости) полюсов системы – корней z_1, \dots, z_n ее характеристического многочлена $f_n(s) = \det(N_{pl}(s)N_c(s) + D_{pl}(s)D_c(s))$ (введение в формулу определителя \det имеет смысл только для многоканальной САУ).

В качестве стандартных блоков регулятора обычно выбираются пропорциональный (П), интегральный (И), дифференциальный (Д), но может использоваться и аperiodическое (инерционное) звено (Ап) [13, 14, 19]² и др. Требование к расположению полюсов в методе критических корневых диаграмм формализуется в виде оптимизации целевой функции – степени устойчивости или иной *корневой градуировки*, численно выражающей не только качество устойчивости, но и другие важные для задачи свойства: колебательность замкнутой системы [7], отчасти доминирование правого действительного полюса (для обеспечения бесколебательного гашения возмущений) и др.

Наконец, существенное значение для систем с запаздыванием имеет **предварительная стадия** применения метода критических корневых диаграмм: выбор аппроксимации Паде для экспоненты, возникающей после преобразования Лапласа в передаточной функции или матрице объекта. Двухпараметрический «веер» степеней числителя и знаменателя аппроксимирующей дроби существенно отражается на синтезе САУ: в частности, задача полного порядка при повышении степеней сначала может перейти в задачу синтеза системы пониженного порядка, а далее создавать всё бóльшие вычислительные трудности.

Итогом первой стадии является характеристический многочлен замкнутой системы $f_n(s, C)$, коэффициенты которого включают настраиваемые параметры регулятора. Определение настроек, оптимальных по выбранной целевой функции, составляет содержание метода критических корневых диаграмм.

Сказанное подытоживается схемой на рис. 1.

² В работах [13, 14] ПИ-регулятор с аperiodическим блоком назван «обобщенным ПИД-регулятором», что оправдывается переходом ПИАп-регулятора в ПИД в пределе при стремящемся к нулю параметре времени аperiodического звена.

3. ВТОРАЯ СТАДИЯ: ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ КОРНЕВЫХ ДИАГРАММ И КОРНЕВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Содержательная часть составления списка критических корневых диаграмм и корневых многочленов представлена в работах [7, 11, 15]. Каждому полюсу или комплексной паре соответствует градуировочное значение (градуировка), численно выражающее «неудобство» его расположения на комплексной плоскости по влиянию на переходные процессы в САУ. Максимум градуировок позволяет выделить среди полюсов «самые правые», наименее «удобные» с точки зрения заданных свойств. Эти полюса задают правую границу расположения на комплексной плоскости всех полюсов вместе – линию, на которой их градуировки совпадают, условную «правую вертикаль».



Рис. 1. Первая стадия метода критических корневых диаграмм: начальный выбор синтеза оптимальной САУ. Левая колонка связана с определением структуры САУ, правая – с формализацией требуемых системных свойств

Fig. 1. The first stage of the critical root diagram method: the initial choice of an optimal control system design. The left column is related to the control system structure definition, the right one – to the formalization of the required system properties

Критическая корневая диаграмма D представляет собой схему взаимного расположения полюсов САУ на правой границе в наибольшем количестве, какое возможно при сделанном выборе числа параметров регулятора, которые, как уже сказано, входят в коэффициенты характеристического многочлена [11]. В неособенных случаях такое расположение задает критическую точку и возможный локальный минимум градуировки как целевой функции, зависящей от настраиваемых параметров регулятора. При произвольном векторе S справа находится какой-то действительный корень или комплексно-сопряженная пара.

Меняя параметры регулятора так, чтобы самые правые корни смещались влево (это означает увеличение степени устойчивости замкнутой САУ) или чтобы полюса комплексно-сопряженной пары сближались между собой (это означает снижение колебательности моды решения), можно добиться возрастания числа корней на правой границе области расположения всех корней. Число равенств между градуировками граничных корней увеличивается, а число степеней свободы параметров C , допускающее дальнейшее смещение влево границы со всеми находящимися на ней полюсами, уменьшается.

Обращение в ноль числа степеней свободы задает в пространстве параметров управления нульмерное многообразие – одну или несколько критических точек целевой функции. Различные варианты взаимного расположения самых правых полюсов, простых и кратных, действительных и комплексных, для выбранной размерности пространства параметров схематически представлены критическими корневыми диаграммами D_1, \dots, D_m на рис. 2 [11].

Если в системах полного порядка за счет выбора соответствующих значений в пространстве параметров достижимо любое наперед заданное расположение корней, то в системе пониженного порядка приходится добиваться их оптимального расположения с помощью минимизации выбранной градуировки.

В простейшем случае в качестве целевой берется гурвицева функция

$$H(C) = \max \operatorname{Re}(z_1, \dots, z_n) = \alpha,$$

противоположная степени устойчивости замкнутой системы; тогда граничными координатами оказываются градуировка α и мнимые части правых комплексных пар β_1, \dots, β_p [7].

Сомножители характеристического многочлена, включающие только самые правые корни, образуют корневой многочлен $root(s, \chi)$, зависящий от общего для правых корней градуировочного значения α и граничных координат β_1, \dots, β_p на правой границе расположения всех полюсов.

В критических точках корневой многочлен полностью задается критической корневой диаграммой. Для списка на рис. 2 и гурвицевой градуировки они выглядят так:

$$(a) \text{ } root_a(s, \chi) = (z - \alpha)^4;$$

$$(b) \text{ } root_b(s, \chi) = (z - \alpha)^3(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2);$$

$$(c) \text{ } root_c(s, \chi) = (z - \alpha)^2(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_1^2)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_2^2);$$

$$(d) \text{ } root_d(s, \chi) = (z - \alpha)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_1^2)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_2^2) \times \\ \times (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_3^2);$$

$$(e) \text{ } root_e(s, \chi) = (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_1^2)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_2^2) \times \\ \times (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_3^2)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_4^2);$$

$$(f, g) \text{ } root_{f, g}(s, \chi) = (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_1^2)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta_2^2)^2;$$

$$(h) \text{ } root_h(s, \chi) = (z - \alpha)(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)^2.$$

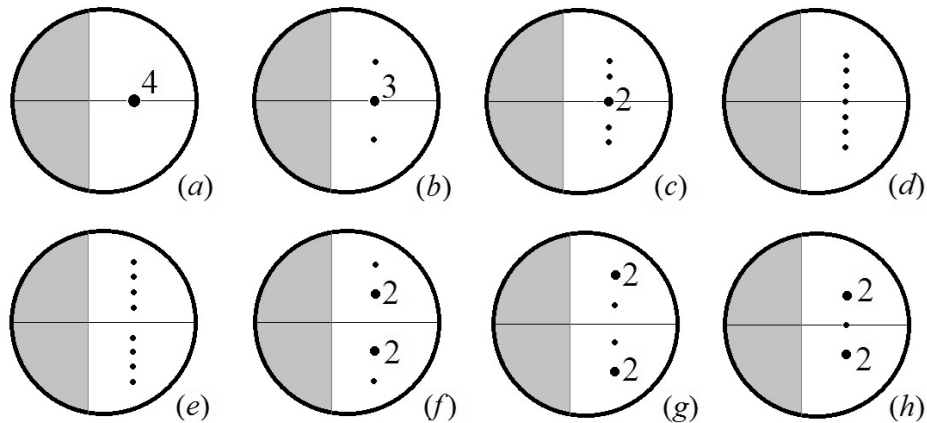


Рис. 2. Критические корневые диаграммы САУ с тремя настроечными параметрами. Взаимное расположение самых правых полюсов вместе с их кратностями схематически изображается в белом полукруге на одной вертикали, условно отображающей правую границу. Полюса, расположенные левее, условно изображаются серым полукругом

Fig. 2. Critical root diagrams of a control system having three tunable parameters. Mutual location of rightmost poles with their multiplicities is schematically depicted in a white semicircle on one vertical line, conventionally representing the right border. The rest poles located to the left are conventionally depicted by a gray semicircle

Достижение критической точки минимизируемой градуировки приводит к тому, что характеристический многочлен делится нацело на корневой, т. е. в обычной схеме деления многочленов с остатком:

$$f_n(s) = \text{root}_q(s) g_{n-q}(s) + \text{res}_{q-1}(s).$$

Частное $g_{n-q}(s, C, \chi)$ обращается в ноль на всех характеристических корнях, кроме самых правых, а остаток от деления $\text{res}_{q-1}(s, C, \chi)$ тождественно по s равен нулю [7]. Приравнивание к нулю коэффициентов остатка задает систему из q полиномиальных уравнений для параметров управления C и корневых координат χ , которая во многих случаях позволяет найти критические точки, в частности точки локальных минимумов градуировки в пространстве параметров управления.

Специфика гибкого процесса проявляет себя в том, что после алгоритмически жесткого перечисления корневых диаграмм и многочленов [11] выполняется блокирование и отсечение некоторых ветвей³. Отсечение требуется в связи с тем, что степень корневого многочлена может оказаться выше степени характеристического многочлена, так как она варьируется в зависимости от числа и кратности комплексных полюсов в пределах от p до $2p$ (ср. (a) и (e) на рис. 2); за счет этого высокие степени корневых многочленов могут оказаться недостижимы [7, 8].

³ Ранняя версия этой возможности упрощения общей схемы с учетом особенностей конкретного примера была представлена как редуцирование орграфа корневого симплекса характеристического многочлена [21, 22].

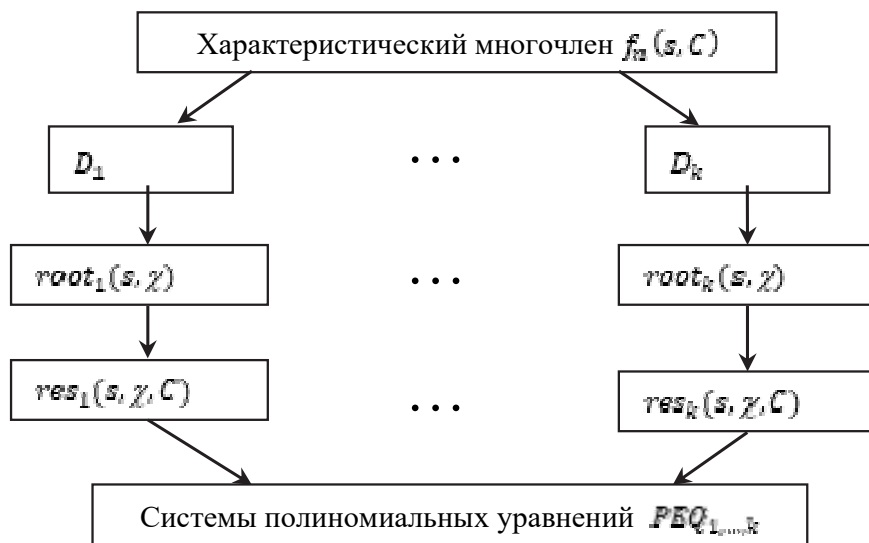


Рис. 3. Вторая стадия метода: составление для характеристического многочлена САУ полиномиальных систем уравнений $PEQ_{1,\dots,k}$, задающих такие расположения корней, которые соответствуют критическим (в том числе экстремальным) точкам целевой градуировки

Fig. 3. The second stage of the method: compiling polynomial equation systems $PEQ_{1,\dots,k}$ for the characteristic polynomial, which define such pole locations that correspond to critical (including extremal) points of the target calibration

Блокирование может применяться для диаграмм, включающих полюса слишком высокой кратности, поскольку настройка соответствующего вектора значений C на практике трудноосуществима, а незначительное отступление от него резко снижает целевой показатель. В итоге список критических корневых диаграмм уменьшается с m до k . Корневых многочленов еще меньше, так как один и тот же многочлен иногда соответствует нескольким корневым диаграммам, как в вариантах (f) и (g) на рис. 2.

Схема второй стадии сводится к ветвлению в соответствии со списком допустимых корневых диаграмм D_1, \dots, D_k (рис. 3).

4. ТРЕТЬЯ СТАДИЯ: РЕШЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Содержание этой стадии не является чисто техническим. Здесь надо выяснить, когда тождественно по s выполняется равенство $res_{q-1}(s, C, \chi) \equiv 0$ или, что то же самое, какие решения имеет система алгебраических уравнений PEQ для коэффициентов остатка $res_{q-1}(s, C, \chi)$ при различных степенях s .

Однако, как показывает практика, стандартные процедуры различных вычислительных пакетов далеко не всегда находят действительные решения, даже если впоследствии удается их найти после некоторых преобразований системы. Отметим, что здесь появляется возможность применения различных

пакетов (MATLAB⁴, Maple, Mathematica, Python), и при наличии лицензированного ПО возникает циклообразный перебор вычислительных процедур решения систем функциональных уравнений.

Преобразование системы полиномиальных уравнений PEQ может включать в себя несколько приемов. Прежде всего выражение некоторых корневых координат χ через другие координаты и параметры управления C с последующей подстановкой полученных выражений в оставшиеся уравнения; аналогичное сокращение системы иногда удается проделать и с параметрами управления.

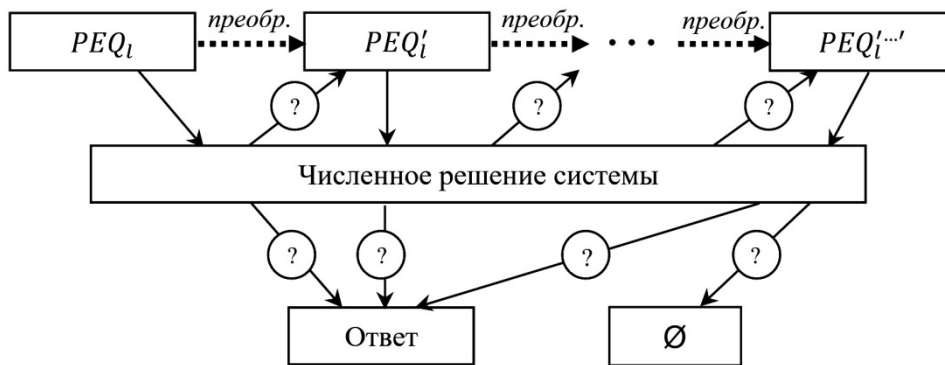


Рис. 4. Третья стадия метода: поиск решений полиномиальных систем уравнений $PEQ_l, l = 1, \dots, k$, требующий преобразования этих систем: $PEQ_l \rightarrow PEQ'_l \dots$

Исчерпание попыток принимается как несовместность исходной системы

Fig. 4. The third stage of the method: searching for numerical solution of polynomial equation system $PEQ_l, l = 1, \dots, k$, which requires equation system transformations:

$PEQ_l \rightarrow PEQ'_l \dots$ Exhaustion of attempts is accepted as a system incompatibility

Иногда удается понизить степень одного из уравнений системы за счет вычитания из него другого, умноженного на подходящий коэффициент. В некоторых задачах результат достигается с помощью тейлоровского переразложения многочленов относительно удачно выбранных точек. Вариантов здесь достаточно много, и чередующиеся преобразования – решения $PEQ_l \rightarrow PEQ'_l \rightarrow PEQ''_l \rightarrow \dots$ (рис. 4) с пошаговым обращением к вычислительной процедуре иногда приводят к числовому ответу. Однако эти циклообразные действия не являются циклами в обычном смысле; помимо прочего, преобразования разных типов (например, таких как указанные выше исключение координат или переменных и понижение степени уравнений) могут применяться в различном порядке.

Как показывают тесты, для систем полиномиальных уравнений с заведомо существующим решением (необязательно единственным), найти его с помощью численных процедур удастся не всегда. Исчерпание попыток преобразования систем уравнений приходится принять как несовместность этих систем.

⁴ Пакет MATLAB Simulink позволяет проводить блочное моделирование процесса синтеза САУ [20], и его применение в этой стадии может оказаться нецелесообразным.

К сожалению, специфические возможности преобразования систем полиномиальных уравнений с несколькими переменными изучены недостаточно. Стоит упомянуть, что при выполнении стандартных вычислительных процедур возникают различные трудности численной оптимизации [23]. Почти всегда решение полиномиальной системы отражает критическую корневую диаграмму только приближенно [8, 9, 19], приближенным оказывается и значение степени устойчивости или другой градуировки, задаваемое набором полюсов.

5. ЧЕТВЕРТАЯ И ПЯТАЯ СТАДИИ: ВЕРИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ И ИХ ТЕСТИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

На последних стадиях нужно найти оптимальное решение, что также подразумевает несколько не вполне жестко заданных действий.

Четвертая стадия включает в себя верификацию решений:

1) отрицательно ли значение используемой градуировки для всех полюсов вместе, т. е. устойчива ли замкнутая САУ (устойчива с ограниченной колебательностью и др.);

2) находится ли задаваемое корневой диаграммой расположение полюсов на правой границе их общего расположения, т. е. нет ли полюсов правее тех, которые задаются корневым многочленом, и, таким образом, реализуются ли в каждом случае критические корневые диаграммы.

После этого остается сравнить значения градуировок для всех прошедших проверку решений и выбрать минимальные и субминимальные.

Итогом четвертой стадии являются передаточные функции замкнутых САУ с теми значениями C^* параметров настройки регулятора, которые отвечают оптимальным и субоптимальным по выбранной градуировке системам.

На **пятой стадии** проводится тестирование оптимальных и субоптимальных САУ стандартными возмущениями переходных процессов, и уже в зависимости от переходной характеристики (т. е. отклика систем на возмущение) по инженерным соображениям выбирается оптимальная. Как уже сказано выше, этот выбор носит компараторный – качественный и неформальный – характер.

Принципиальное значение пятой стадии определяется не только тем, что тестируемая модель в пространстве состояний «ближе» к поведению реальной САУ хотя бы в отношении наглядности. Вероятно, еще ценнее возможность оценить обе важные для практики фазы отклика системы на возмущение:

- **первая** – временной интервал действия возмущающего импульса;
- **вторая** – возвращение системы в установившийся режим после снятия возмущения.

Скажем, если продолжительность второй фазы вполне удовлетворительно определяется степенью устойчивости и другими градуировками, то поведение системы в первой фазе (в частности, отклик системы на подачу и снятие ступенчатого импульса) связано с градуировкой только опосредованно. Исследование переходных процессов в линейных стационарных САУ в последние годы привлекает внимание [24, 25]. В частности, подавление начального всплеска составляет отдельную проблему и важную составляющую регулирования [26]. В работах [24–26] построены численные оценки поведения

системы, пригодные для параметрической оптимизации. При этом авторы [26] пишут: «Как показывают многочисленные примеры, степень консерватизма получаемых оценок весьма невелика». Поэтому во многих случаях остается довольствоваться компараторной оценкой поведения замкнутой системы.

Если удовлетворительный в числовом (по градуировке) и качественном (по совокупности тестов) отношении результат не достигнут, приходится возвращаться к первой стадии и менять структуру регулятора или некоторые начальные настройки (такие как заданные постоянные времени для Ап-блока). Этими соображениями предопределялось, например, обращение к ПИАп-регулятору в [19] для САУ с той же передаточной функцией объекта, которая в [8] стабилизировалась ПИ₃-регулятором, причем эффект применения апериодического звена дал возможность ограничиться только одним Ап-блоком вместо двух при незначительном снижении степени устойчивости.

Возвращение к выбору регулятора не носит итеративного характера, и градуировочная оценка результата на последней стадии дополняется компараторной – ситуация, типичная для гибкого процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы видели, все пять стадий метода синтеза линейных стационарных САУ с помощью критических корневых диаграмм демонстрируют характерные особенности гибких процессов.

Уже на предварительной стадии для системы с запаздыванием и первой стадии для любой САУ названного класса возникают ситуации выбора, направляющие синтез системы по тому или иному пути; корректировать выбор в процессе невозможно, а при неудовлетворительных результатах финальных тестирований его следует изменить.

Такое разнообразие вариантов постановки задачи синтеза отнюдь не является исключительной особенностью метода критических корневых диаграмм. Так, построенный на квадратичном критерии качества и градиентном способе расчета синтез ПИД-регуляторов [27] также требует на начальной стадии осуществления нескольких вариантов выбора. Как указано далее, на стадиях с предварительной до третьей создаются характерные древовидные разветвления, а в дальнейшем возникают циклические и циклообразные подпроцессы.

Поэтому создание программного комплекса для полной или частичной автоматизации синтеза САУ с помощью критических корневых диаграмм предусматривает настройку всей совокупности действий как гибкого процесса в полном соответствии с концепцией «евангелиста» этой области Вила ван дер Аалста, возражающего против сужения самого понятия и области применения гибких процессов⁵ [1, 3]. Гибкости требует также точность регулирования –

⁵ Из интервью В. ван дер Аалста порталу processmi.com по окончании конференции ICPM 2024 г.:

– Понятия *Process Mining*, *Process Analytics* и *Process Intelligence* часто фигурируют как взаимосвязанные и даже взаимозаменяемые. В чём заключается разница между ними и существует ли она на самом деле?

– *Process Mining* – широкая концепция, подразумевающая полную аналитику от извлечения и предварительной обработки данных до обнаружения узких мест и проверки соответствия реального выполнения процесса регламентированному. Поэтому важно не дово-

весьма существенное для практики качество, особенно в связи с применением регуляторов пониженного порядка [20, 28, 29].

Бесспорно, гибкий процесс инженерно-конструкторского содержания отличается и от гибкого бизнес-процесса [30], и от гибкого производства в промышленности [31], а тем более от программной инженерии в духе манифеста Agile⁶. Однако автоматизация гибких процессов во всех названных областях неизбежно находит и использует их общие черты, свойства и составляющие. Если авторы фундаментальной «Математической теории автоматического управления» имеют все основания говорить, что «в целом проблема синтеза стабилизирующих регуляторов заданной структуры весьма сложна; сказать заранее, можно ли данный объект сделать устойчивым с помощью регулятора низкого порядка, не удастся» ([29, с. 125]), то применение средств автоматизации и process mining в рамках концепции гибкого процесса позволяет рассчитывать на некоторый прогресс, как минимум, в отсечении тупиковых ветвей синтеза САУ.

Авторы приносят свою благодарность проф. А.А. Воеводе и канд. физ.-мат. наук А.Н. Корюкину за помощь в подготовке статьи. Они также искренне признательны М.В. Чехонадских за техническую помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Aalst W.* Process mining // Communications of the ACM. – 2012. – Vol. 55 (8). – P. 76–83.
2. Process flexibility: A survey of contemporary approaches / H. Schonenberg, R. Mans, N. Russell, N. Mulyar, W. Van der Aalst // Advances in Enterprise Engineering I. CIAO! EOMAS 2008. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. – P. 16–30. – (Lecture Notes in Business Information Processing; vol. 10).
3. *Berti A., Van Zelst S.J., Van der Aalst W.* Process mining for python (PM4Py): bridging the gap between process- and data science // arXiv preprint. – arXiv:1905.06169. – 2019.
4. *Рудометкина М.Н.* Использование настраиваемых базовых элементов при построении модели гибкого процесса // Научный вестник НГТУ. – 2015. – № 1 (58). – С. 107–120.
5. *Rudometkina M.N., Kakovkin P.A., Chekhonadskikh A.V.* Flexible process model design // Key Engineering Materials. – 2016. – V. 685. – Pp. 892–896.
6. *Петров Э.Г., Петров К.Э.* Компараторная идентификация моделей многофакторного оценивания. – М.: Palmarium Academic Publishing, 2014. – 224 с.
7. *Чехонадских А.В.* Корневые координаты в синтезе одноканальных систем автоматического управления пониженного порядка // Автометрия. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 69–81.
8. *Чехонадских А.В.* Полиномиальный синтез регуляторов пониженного порядка для одноканальных дескрипторных систем // Автометрия. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 101–111.
9. *Чехонадских А.В.* Оптимальный гироскопический стабилизатор многомерной вибрационной системы // Системы анализа и обработки данных. – 2022. – № 2 (86). – С. 81–94. – DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-81-94.
10. *Ezangina T., Gayvoronskiy S., Mikhailovich M.* Modal synthesis of adaptive regulators of an interval system with interval parameters based on critical root diagrams // 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, 13–15 November 2024. – IEEE, 2024. – P. 116–121. – DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803861.
11. *Chekhonadskikh A.V.* Some classical number sequences in control system design // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 620–628.

дуть Process Mining только до уровня поиска бизнес-процесса, как считают некоторые специалисты. Касательно терминов: я думаю, что было бы правильно придерживаться варианта Process Mining... <https://processmi.com/blog/vil-van-der-aalst-process-mining-proshloe-nastoyashhee-i-budushhee/>

⁶ <https://agilemanifesto.org/principles.html> См. также анализ [32].

12. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Преодоление недифференцируемости при оптимизационном синтезе систем автоматического управления // *Автометрия*. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 11–17.
13. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости для одноканальной двухмассовой системы с обобщенным ПИД-регулятором // *Научный вестник НГТУ*. – 2012. – № 4 (49). – С. 178–185.
14. Корюкин А.Н. Обобщенный ПИД-регулятор двухмассовой системы с наибольшим запасом устойчивости // *Научный вестник НГТУ*. – 2013. – № 3 (52). – С. 10–17.
15. Корюкин А.Н., Воевода А.А. ПИД-регуляторы двухмассовой системы и двукратные комплексные пары // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 56–68.
16. Соболев А.В., Гайворонский С.А. Максимизация робастной степени устойчивости системы с интервальным характеристическим полиномом // *Известия Томского политехнического университета. Промышленная кибернетика*. – 2023. – Т. 1, № 1. – С. 39–43.
17. Гайворонский С.А., Езангина Т.А., Соболев А.В. Синтез систем управления максимальной робастной степени устойчивости на основе вершинных критических корневых диаграмм // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2023. – Т. 24, № 10. – С. 519–525.
18. Рудометкина М.Н. Предикатная модель гибкого процесса // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. – 2014. – № 10-2. – С. 25–30.
19. Чехонадских А.В., Чехонадских М.В. Стабилизация одноканальной дескрипторной системы ПИД-регулятором // *Вычислительные технологии*. – 2025. – Т. 30, № 1. – С. 104–119.
20. Zhmud V., Dimitrov D. Designing of the precision automatic control systems. – Novosibirsk: KANT, 2017. – 126 p.
21. Чехонадских А.В. Критические корневые зоны и редукция симплектических графов действительных многочленов // *Algebra and Model Theory 7*. – Novosibirsk: NSTU, 2009. – P. 26–43.
22. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка // *Автометрия*. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 113–123.
23. Балашов М.В. Невыпуклая оптимизация // *Теория управления. Дополнительные главы* / под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2019. – С. 259–280.
24. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях / Б.Т. Поляк, А.А. Тремба, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков, Г.В. Смирнов // *Автоматика и телемеханика*. – 2015. – № 6. – С. 18–41.
25. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *Автоматика и телемеханика*. – 2021. – № 9. – С. 86–115.
26. Хлебников М.В., Стефанюк Е.А. Минимизация всплеска в линейной системе управления с неопределенностями при ограниченных внешних возмущениях // *Проблемы управления*. – 2023. – № 3. – С. 12–19.
27. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *Автоматика и телемеханика*. – 2022. – № 11. – С. 62–82.
28. Buijs J.C.A.M., Van Dongen B.F., Van der Aalst W. On the role of fitness, precision, generalization and simplicity in process discovery // *OTM 2012. Part I*. – Springer, 2012. – P. 305–322. – (LNCS; vol. 7565).
29. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. – М.: URSS, 2019. – 500 с.
30. Зайцев Р. Гибкость процесса – это вам не Agile // *Deep Vision Consulting*. – 2020, 9 января. – URL: <https://deep-vision.one/knowledge/gibkost-processa-eto-vam-ne-agile/> (дата обращения: 09.02.2026).
31. Гибкие производственные системы: что скрывают адаптивные решения? // *Промышленные страницы. Редакционный материал*. – 2025, 20 мая. – URL: <https://indpages.ru/autogebkkeeue-proeezvodstvuyenniye-seestyemi/> (дата обращения: 09.02.2026).
32. Vineet Nanda. Agile development models in software engineering // *Tutorialspoint: website*. – 25.11.2020. – URL: <https://www.tutorialspoint.com/agile-development-models-in-software-engineering/> (accessed: 09.02.2026).

Рудометкина Моника Николаевна, председатель Предметно-цикловой комиссии по информационным технологиям, Колледж многоуровневого профессионального образования, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации. Основное направление научных исследований – теория искусственного интеллекта, логические сети. Имеет 20 публикаций. E-mail: mn.rud@inbox.ru

Чехонадских Александр Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления, теория графов, прикладная алгебра. Имеет около 100 печатных работ и учебных пособий. E-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

Rudometkina Monika N., Chairman of the Subject-Cycle Commission on Information Technologies, College of Multilevel Professional Education, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration. Main research activities lies in the theory of artificial intelligence, logical networks, process mining. The author of 20 publications. E-mail: mn.rud@inbox.ru

Chekhonadskikh, Alexander V., D. Sc. (Eng.), associate professor at Algebra and Mathematical Logics Department in Novosibirsk State Technical University. His main research activities lie in control theory, graph theory, and applied algebra. He is the author of about 100 publications. E-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-97-112

Construction of polynomial design for a low order control system as a flexible process*

М.Н. РУДОМЕТКИНА^{1,a}, А.В. ЧЕХОНАДСКИХ^{2,b}

¹ *Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, College of Multilevel Professional Education, 43, build. 1A, Volgogradskiy prospect, Moscow, 109316, Russian Federation*

² *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation*

^a *mn.rud@inbox.ru* ^b *chekhonadskikh@corp.nstu.ru*

Abstract

Basing on numerous studied examples, the authors create principal schemes for control system design as a flexible process. Everywhere below the paper deals with linear time-invariant systems with low-order controllers; control is lead in continuous time; polynomial design is carried out by the critical root diagrams method. Along with classical SISO systems, which are described by ODE, we regard examples of descriptor systems, described by DAE, vibration systems with gyroscopic stabilization, etc. At the upper hierarchical level, the authors distinguish five typical stages of control system design. At the middle level, each stage contains different properties and techniques, which are characteristic of flexible processes; so we construct the appropriate schemes, which include all the basic components of the critical root diagram method. Since the lower level is directly focused on software implementation, it is not considered in the paper. At the final stage, an estimation of comparative character (i.e. qualitative, non-formalizable algorithmically) is applied to the resulting closed loop system, which assumes either design finalization, or a return to its beginning in order to repeat the process for a more complicated or simpler controller structure. The constructed schemes seem to be a necessary stages of full or partial automation possibility for a system design using critical root diagrams and applying of process mining methods. Thus, the article provides a basis for applying AI to an engineering design problem in the same way, which has been used so far for process mining in business and industrial production.

Keywords: process mining, flexible process, linear time-invariant system, control system design, low order, relative stability, pole location, critical root diagrams, polynomial equations, comparative evaluation

* *Received 20 June 2025.*

REFERENCES

1. Van der Aalst W. Process mining. *Communications of the ACM*, 2012, vol. 55 (8), pp. 76–83.
2. Schonenberg H., Mans R., Russell N., Mulyar N., Van der Aalst W. Process flexibility: A survey of contemporary approaches. *Advances in Enterprise Engineering I. CIAO! EOMAS 2008. Lecture Notes in Business Information Processing*. Vol. 10. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, pp. 16–30.
3. Berti A., Van Zelst S.J., Van der Aalst W. Process mining for python (PM4Py): bridging the gap between process- and data science. *arXiv preprint*, arXiv:1905.06169, 2019.
4. Rudometkina M.N. Ispol'zovanie nastravaemykh bazovykh elementov pri postroenii modeli gibkogo protsessa [Adaptation of basic elements in designing a flexible process model]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 1 (58), pp. 107–120.
5. Rudometkina M.N., Kakovkin P.A., Chekhonadskikh A.V. Flexible process model design. *Key Engineering Materials*.– 2016.– V. 685.– Pp. 892–896.
6. Petrov E.G., Petrov K.E. *Komparatornaya identifikatsiya modelei mnogofaktornogo otsenivaniya* [Comparative identification of multifactor evaluating]. Moscow, Palmarium Academic Publishing, 2014. 224 p.
7. Chekhonadskikh A.V. Root coordinates in the design of SISO control systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2015, vol. 51 (5), pp. 485–495. Translated from *Avtometriya*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 69–81.
8. Chekhonadskikh A.V. Polynomial design of low-order controllers for SISO DAE systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2023, vol. 59 (3), pp. 372–381. DOI: 10.3103/S8756699023030056. Translated from *Avtometriya*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 101–111.
9. Chekhonadskikh A.V. Optimal'nyi giroskopicheskii stabilizator mnogomernoii vibratsionnoi sistemy [An optimal gyroscopic stabilizer of a multidimensional vibration system]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2022, no. 2 (86), pp. 81–94. DOI: 10.17212/2782-2001-2022-2-81-94.
10. Ezangina T., Gayvoronskiy S., Mikhailovich M. Modal synthesis of adaptive regulators of an interval system with interval parameters based on critical root diagrams. *6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, Lipetsk, November 13–15, 2024, pp. 116–121. DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803861.
11. Chekhonadskikh A.V. Some classical number sequences in control system design. *Sibirskie elektromye matematicheskie izvestiya = Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 620–628.
12. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Overcoming nondifferentiability in optimization synthesis of automatic control systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2010, vol. 46 (5), pp. 408–413. Translated from *Avtometriya*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 11–17.
13. Koryukin A.N. Naibol'shii zapas ustoichivosti dlya odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy s obobshchennym PID-regulyatorom [The largest relative stability for a SISO two-mass system with a generalized PID controller]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 4 (49), pp. 178–185.
14. Koryukin A.N. Obobshchenniy PID-regulyator dvukhmassovoi sistemy s naibol'shim zapasom ustoichivosti [The generalized PID-regulator of the two-mass system with the greatest stock of stability]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 3 (52), pp. 10–17.
15. Koryukin A.N., Voevoda A.A. PID controllers of some two-mass system and the double complex pairs. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2015, vol. 9 (2), pp. 215–226. DOI: 10.1134/S1990478915020076. Translated from *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 56–68.
16. Sobol A.V., Gayvoronskiy S.A. Maksimizatsiya robstnoi stepeni ustoichivosti sistemy s interval'nym kharakteristicheskim polinomom [Maximizing the robust stability degree of system with interval characteristic polynomial]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Promyshlennaya kibernetika = Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Industrial Cybernetics*, 2023, vol. 1, no. 1, pp. 39–43.
17. Gayvoronskiy S.A., Ezangina T.A., Sobol A.V. Sintez sistem upravleniya maksimal'noi robstnoi stepeni ustoichivosti na osnove vershinykh kriticheskikh kornevykh diagramm [Control systems synthesis of maximum robust stability degree based on vertex critical root diagrams]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie = Mechatronics, Automation, Control*, 2023, vol. 24, no. 10, pp. 519–525.
18. Rudometkina M.N. *Predikatnaya model' gibkogo protsessa* [Predicate model of flexible process]. *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy = International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2014, no. 10-2, pp. 25–30.

19. Chekhonadskikh A.V., Chekhonadskikh M.V. Stabilizatsiya odnokanal'noi deskriptornoj sistemy PIAP-regulyatorom [Stabilization of SISO DAE control systems using PI-controller with aperiodic term]. *Vychislitel'nye tekhnologii = Journal of Computational Technologies*, 2025, vol. 30, no. 1, pp. 104–119.
20. Zhmud V., Dimitrov D. Designing of the precision automatic control systems. Novosibirsk, KANT Publ., 2017. 126 p.
21. Chekhonadskikh A.V. Critical root zones and reduction of simplex graphs of real polynomials. *Algebra and Model Theory 7*. Novosibirsk, NSTU Publ., 2009, pp. 26–43.
22. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Optimization of the pole location of automatic control systems with a reduced-order controller. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2009, vol. 45 (5), pp. 472–480. Translated from *Avtometriya*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 113–123.
23. Balashov M.V. Nevypuklaya optimizatsiya [Non-convex optimization]. *Teoriya upravleniya. Dopolnitel'nye glavy [Control theory. Additional chapters]*. Moscow, Lenand Publ., 2019, pp. 259–280.
24. Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large deviations in linear control systems with nonzero initial conditions. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76 (6), pp. 957–976. DOI: 10.1134/S0005117915060028. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 2015, no. 6, pp. 18–41.
25. Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static controller synthesis for peak-to-peak gain minimization as an optimization problem. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82 (9), pp. 1530–1553. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 2021, no. 9, pp. 86–115.
26. Khlebnikov M.V., Stefanyuk E.A. Minimizatsiya vspleska v lineinoj sisteme upravleniya s neopredelennostyami pri ogranichennykh vnesnikh vozmushcheniyakh [Peak-minimizing design for linear control systems with exogenous disturbances and structured matrix uncertainties]. *Problemy upravleniya = Control Sciences*, 2023, no. 3, pp. 12–19.
27. Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Novye kriterii nastroyki PID-regulyatorov [New criteria for tuning PID controllers]. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83 (11), pp. 1724–1741. Translated from *Avtomatika i Telemekhanika*, 2022, no. 11, pp. 62–82.
28. Buijs J.C.A.M., Van Dongen B.F., Van der Aalst W. On the role of fitness, precision, generalization and simplicity in process discovery. *OTM 2012*. Part I. LNCS. Vol. 7565. Springer, 2012, pp. 305–322.
29. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniy* [Mathematical theory of automatic control]. Moscow, URSS Publ., 2019. 500 p.
30. Zaitsev R. Gibkost' protsessa – eto vam ne Agile [Process flexibility is not Agile]. *Deep Vision Consulting*, 2020, January 9. (In Russian). Available at: <https://deep-vision.one/knowledge/gibkost-processa-eto-vam-ne-agile/> (accessed 09.02.2026).
31. Gibkie proizvodstvennye sistemy: chto skryvayut adaptivnye resheniya? [Flexible manufacturing systems: what's behind adaptive solutions?]. *Promyshlennye stranitsy = Industrial Pages*, 2025, May 20. Available at: <https://indpages.ru/auto/geebkeeye-proeezvodstvyenniye-seestyemi/> (accessed 09.02.2026).
32. Vineet Nanda. Agile development models in software engineering. *Tutorialspoint*. Website, 25.11.2020. Available at: <https://www.tutorialspoint.com/agile-development-models-in-software-engineering/> (accessed 09.02.2026).

Для цитирования:

Рудометкина М.Н., Чехонадских А.В. Построение гибкого процесса полиномиального синтеза системы с управлением пониженного порядка // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 1 (101). – С. 97–112. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-97-112.

For citation:

Rudometkina M.N., Chekhonadskikh A.V. Postroenie gibkogo protsessa polinomial'nogo sinteza sistemy s upravleniem ponizhennogo poryadka [Construction of polynomial design for a low order control system as a flexible process]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 1 (101), pp. 97–112. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-1-97-112.