ISSN 1814-1196 Научный вестник НГТУ том 57, № 4, 2014, с. 131–146 http://journals.nstu.ru/vestnik Science Bulletin of the NSTU Vol. 57, No. 4, 2014, pp. 131–146

ФИЗИКА И МЕХАНИКА

PHYSICS AND MECHANICS

УДК 536.25

Влияние нестационарной гравитационно-капиллярной конвекции на поля температуры в тонкой стенке^{*}

В.С. БЕРДНИКОВ¹, К.А. МИТИН², С.А. КИСЛИЦЫН³

¹630090, РФ, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1, Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией. E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru ²630090, РФ, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1, Институт теплофизики им С.С. Кутателадзе СО РАН, инженер. E-mail: mitin@ngs.ru

³ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант. E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

Численно в сопряженной постановке исследована зависимость распределения температуры от времени в тонкой стенке, отделяющей слой жидкости с числом Прандтля Pr = 16 от слоя газа в прямоугольной полости. Изучен сопряженный конвективный теплообмен в режиме термогравитационной конвекции в диапазоне чисел Грасгофа $10^3 \le Gr \le 10^6$ и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции жидкости при $Gr = 10^4$ и числе Марангони Ма = 4220. Методом конечных элементов решена система уравнений конвекции в приближении Буссинеска, записанная в переменных «температура», «вихрь» и «функция тока» без учета и с учетом термокапиллярного эффекта на свободной границе жидкости. Исследован процесс развития конвективных течений, рассчитаны нестационарные поля температуры в жидкости, в газе и в тонкой перегородке между ними после внезапного включения нагрева противоположной вертикальной стенки полости. Показано, что тонкая стенка разогревается неравномерно, распределение температуры в тонкой стенке существенно зависит от локальных особенностей течения в жидкости. Показано, что термокапиллярный эффект оказывает заметное влияние на интенсивность конвективных течений и распределения температуры внутри тонкой стенки.

Ключевые слова: сопряженный теплообмен, свободная конвекция, термогравитационная конвекция, тепловая гравитационно-капиллярная конвекция, термокапиллярный эффект, тонкая стенка, численное моделирование, МКЭ

DOI: 10.17212/1814-1196-2014-4-131-146

введение

Неизотермические тонкостенные элементы конструкций типичны для многих технических изделий, например, для топливных баков летательных аппаратов, заполненных топливом полностью или частично [1, 2]. Обеспечение надежности термонапряженных конструкций зависит от качества проведения расчетов термических напряжений в их элементах. Значительные термические напряжения возникают в неизотермических тонкостенных элементах в условиях, когда распределения температуры внутри стенок зависят от особенностей локального сопряженного конвективного теплообмена [1–4]. Для оценок и точного расчета термических напряжений и анализа общего напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкции необходимы достоверные знания о конвективном и сложном сопряженном теплообмене в конструкциях в режимах стационарных и нестационарных течений жидкостей и газов [5–11]. Результатом нестационарного сложного сопряженного теплообмена, являются распределения температуры в типичных составных областях «стенкажидкость-газ». Например, в авиационных конструкциях тонкая стенка топливного бака мо-

^{*} Статья получена 25 августа 2014 г.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 09-08-00487а.

жет быть отделена от внешней стенки конструкции газовым зазором. Поэтому практически важным является исследование процессов нестационарного теплообмена в составных областях, состоящих из разделенных тонкой перегородкой слоев жидкости и газа.

В неравномерно нагретых объемах жидкости, находящихся в поле тяжести, развиваются свободно-конвективные течения, сопровождающиеся расслоением жидкости по температуре вне зависимости от конфигурации полости и расположения нагретых и охлажденных стенок или их фрагментов [5–11]. При подводе тепла к стенкам полости нагретая жидкость всплывает и накапливается сверху. В частично заполненных емкостях будет существенно проявляться наличие границы раздела «жидкость–газ» и влияние термокапиллярного эффекта, обусловленное ее неизотермичностью, на структуру течения у верхней свободной границы жидкости [3, 6–9, 11–14]. Развитие гравитационно-капиллярной конвекции может повлиять на локальные процессы теплоотдачи и на распределения температуры в тонких и в массивных стенках [3, 4].

Настоящая работа является развитием исследований эволюции структуры течений и теплообмена во времени в слоях жидкости различной ориентации в режимах нагрева (или охлаждения) одной или двух границ слоя [3–11]. В работах [6–10] получены качественные и количественные данные по структуре течения, о коэффициентах теплоотдачи в нестационарных режимах термогравитационной и гравитационно-капиллярной конвекции в плоских слоях этилового спирта и воздуха.

Для понимания роли сил плавучести и термокапиллярного эффекта в слоях со свободной границей жидкости и с продольным градиентом температуры в [7, 8] выполнено численное моделирование установившихся режимов конвекции термогравитационной, термокапиллярной и гравитационно-капиллярной природы. Результаты получены методом компактных разностей с высоким пространственным разрешением при стационарных граничных условиях первого рода, позволяют понять корреляции между особенностями структуры течения и процессами локального теплообмена. Однако полученные в [3, 8, 9] результаты не позволили получить подробную информацию о зависимости нестационарных полей температуры и градиентов температуры в тонкой стенке в системе «газ-тонкая стенка-жидкость» после внезапного повышения температуры одной из вертикальных стенок прямоугольной полости до заданного уровня.

В данной работе проведены численные исследования нестационарного сопряженного теплообмена в режиме термогравитационной конвекции без и с учетом термокапиллярного эффекта на свободной поверхности жидкости. Исследован процесс развития конвективных течений, рассчитаны нестационарные поля температуры в жидкости, в газе и в тонкой перегородке между ними после внезапного включения нагрева противоположной вертикальной стенки полости. Показано, что тонкая стенка разогревается неравномерно, распределение температуры в тонкой стенке существенно зависит от локальных особенностей течения в жидкости.



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рис. 1. Схема расчетной области

Задача решалась в нестационарной двумерной сопряженной постановке в декартовых координатах. Геометрия расчетной области подобна рабочему участку экспериментального стенда [3]. Схема расчетной области представлена на рис. 1.

Расчетная область состоит из слоя жидкости (этиловый спирт), слоя газа (воздух) и разделяющей их тонкой металлической стенки (жаропрочная сталь 1Х13). Граница Г₁ в на-

чальный момент разогревается и в дальнейшем поддерживается в изотермичном состоянии. Граница Γ_7 – изотермично холодная, температура на ней соответствует начальной температуре системы. На всех границах в системе заданы условия непротекания. На границах Γ_1 , Γ_3 , Γ_4 , и

 Γ_5 задано условие прилипания, на границах Γ_6 , Γ_7 , и Γ_8 – условие проскальзывания (отсутствие вязкого трения). Горизонтальные границы Γ_2 , Γ_4 , Γ_6 и Γ_8 считаются адиабатическими. На границах раздела «жидкость-твердое тело» и «газ-твердое тело» учитывается условие идеального теплового контакта. На границе Γ_2 ставится условие отсутствия трения (в режимах термогравитационной конвекции) или учтен термокапиллярный эффект.

Задача решалась в безразмерном виде, в качестве масштаба геометрических размеров выбрана высота слоя – H. Масштаб температуры – $\Delta T = T_{max} - T_{min}$, где T_{max} и T_{min} – температуры на горячей и холодной стенках соответственно. Для скорости и времени использованы масштабы v_f/H и H^2/v_f соответственно, где v_f – кинематическая вязкость жидкости.

Кондуктивный теплообмен в тонкой стенке описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0,$$

где α_s – коэффициент температуропроводности материала тонкой стенки (жаропрочная сталь 1Х13), *х* и *у* – горизонтальная и вертикальная пространственные координаты. В безразмерном виде уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha_s}{\alpha_f} \frac{1}{\Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \; .$$

Конвективный теплообмен в жидкости описывается безразмерной системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, записанной в терминах «температура», «вихрь» и «функция тока»:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right),$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - Gr \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega, \qquad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Конвективный теплообмен в газе описывается безразмерной системой уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{split} &\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha_g}{\alpha_f} \frac{1}{\Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \\ &\frac{\partial \omega}{\partial t} + V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\nu_g}{\nu_f} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - \frac{\beta_g}{\beta_f} \operatorname{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} \\ &\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega, \quad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{split}$$

Здесь Gr = $g\beta_f H^3 (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})v_f^{-2}$ – число Грасгофа, число Прандтля Pr_f = v_f / α_f = 16; g – ускорение свободного падения; β_f – коэффициент объемного расширения жидкости; β_g – коэффициент объемного расширения газа; v_g – кинематическая вязкость газа; α_f – коэффициент температуропроводности жидкости; α_g – коэффициент температуропроводности газа; T – безразмерная температура; ω – безразмерный вихрь; ψ – безразмерная функция тока; V_x и V_y горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости.

При учете термокапиллярного эффекта на границе Г₂ использовано условие

$$\omega\big|_{\Gamma_2} = -\frac{Ma}{\Pr}\frac{dT}{dx}\,,$$

где Ма – число Марангони, вычисляемое по следующему соотношению:

$$\mathrm{Ma} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{H \Delta T}{\alpha_f \mu} \,.$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $\mu = 119,8 \cdot 10^{-4}$ – динамическая вязкость жидкости; $\partial \sigma / \partial T = 0,875 \cdot 10^{-4}$ H/(м·K) [9]. В режиме термогравитационной конвекции на границе Γ_2 ставится условие: $\partial V_x / \partial y = 0$.

Для расчетов чисел Грасгофа, Прандтля и других параметров были использованы фиксированные значения теплофизических свойств 96 %-го этилового спирта и воздуха при 293 К: коэффициент объемного расширения спирта $\beta_f = 1,3 \cdot 10^{-3}$ 1/К; коэффициент объемного расширения воздуха $\beta_g = 2,9 \cdot 10^{-3}$ 1/К; коэффициент кинематической вязкости спирта $v_f = 1,483 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{c}$; коэффициент кинематической вязкости воздуха $v_g = 14,94 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{c}$; коэффициент температуропроводности стали $\alpha_s = 8,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{c}$; коэффициент температуропроводности спирта $\alpha_f = 21,094 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{c}$; коэффициент температуропроводности воздуха $\alpha_g = 92,21 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{c}$ [9].

Для определения значений числа Грасгофа и относительных размеров слоя жидкости использован масштаб: высота слоя жидкости H = 180 мм для задач термогравитационной конвекции и 18 мм для случая тепловой гравитационно-капиллярной конвекции. Толщина тонкой стенки принята равной 0,9 мм и 0,09 мм соответственно. Длина области, заполненной воздухом, для задач термогравитационной конвекции равна 72 мм, спиртом – 288 мм. Для задач тепловой гравитационно-капиллярной конвекции – 7,2 мм и 28,8 мм соответственно. При значении числа Gr = 10^4 определен характерный перепад температуры исходя из этих размеров и соответствующее значение числа Марангони Ма = 4220.

Сформулированная нестационарная задача решались методом конечных элементов [15]. Использовалась неравномерная прямоугольная конечноэлементная сетка с билинейными базисными функциями. При вычислении значений вихря на границах с заданным на них условием прилипания использовано условие Вудса. В программе реализован итерационный процесс, в который при необходимости подставляются нужные значения переменных с предыдущих шагов. При этом сначала находится температура, затем вихрь и функция тока. Размерность сетки составляла 210×101 узлов.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

По аналогии с экспериментальной работой [9] проведены расчеты сопряженного теплообмена в режиме термогравитационной конвекции. В начальный момент времени полость с жидкостью находилась в изотермическом состоянии, жидкость покоилась. В момент t = 0 правая стенка (см. рис. 1) была мгновенно нагрета до заданной температуры. После включения нагрева существует инкубационный период прогрева прилегающего к стенке вертикального слоя жидкости в режиме теплопроводности. Этот период характеризует задержку процесса возникновения и развития течения жидкости в правой части расчетной области $0,405 \le x \le 2,005$. Движение жидкости начинается после прогрева критической массы жидкости в пристеночной области. Тонкий прогретый слой жидкости начинает всплывать «столбиком» и растекается вдоль верхней границы. На место всплывающей жидкости подтягивается холодная из придонной области и из холодного ядра. Через некоторый промежуток времени передний фронт горячего потока вдоль верхней свободной поверхности жидкости достигает холодной левой стенки. Далее формируется все более интенсивная струя жидкости вдоль верхней границы, на которой наблюдается максимальное значение горизонтальной компоненты скорости (рис. 2). В области с газом конвекция зарождается со сдвигом по времени и менее выражена.



Рис. 2. Изотермы при Gr = 10^5 в моменты времени: $a - t = 0.029; \delta - t = 0.057; s - t = 0.169; c - t = 4.083$ (добавлено 8 изотерм в диапазоне от 0.003125 до 0.025)

Еще до касания нагретой жидкости холодной тонкой стенки ее достигает гидродинамический предвестник. Это видно по профилям температуры и скорости вдоль свободной верхней границы слоя жидкости, показанным на рис. 3 в одни те же моменты времени. Видно, что головная часть гидродинамического возмущения достигает холодной тонкой стенки раньше теплового возмущения.



Рис. 3. Распределения температуры (*a*) и горизонтальной компоненты скорости (б) вдоль свободной поверхности слоя жидкости при Gr = 10⁵ в различные моменты времени:

1 - t = 0,029; 2 - t = 0,057; 3 - t = 0,169; 4 - t = 0,329; 5 - t = 0,559; 6 - t = 4,083

Представленные на рис. 3 профили температуры интересны с точки зрения анализа влияния термокапиллярного течения на гидродинамику и теплообмен в случае учета термокапиллярного эффекта. Неравномерность распределения температуры вдоль свободной поверхности показывает, что вклад термокапиллярного эффекта будет существенно зависеть от интенсивности термогравитационной конвекции. Там, где создаются большие продольные градиенты температуры, влияние термокапиллярного эффекта будет существенным. В установившихся режимах большие градиенты температуры наблюдаются только в пристеночных областях. Следовательно, только в этих областях следует ожидать существенного влияния течения термокапиллярной природы.

На начальной стадии развития конвективного течения на место всплывающей жидкости подтягивается жидкость из ядра, а не только из придонной области, как это происходит в установившихся режимах, когда наблюдается циркуляция жидкости по контуру. Это видно по профилям 1–4 на рис. 4, *а*. Динамика развития течения, полей скорости и температуры со временем видна по эволюции профилей горизонтальной компоненты скорости на рис. 3–5.



Рис. 4. Профили горизонтальной компоненты скорости в сечении x = 0,605 при $Gr = 10^5$ в моменты времени *a*) 1 - t = 0,029; 2 - t = 0,034; 3 - t = 0,039; 4 - t = 0,044; 5 - t = 0,049; 6 - t = 0,054; 7 - t = 0,059; *b*) 1 - t = 0,059; 2 - t = 0,079; 3 - t = 0,109; 4 - t = 0,129; 5 - t = 0,169

На рис. 5, *а* показана эволюция во времени распределений температуры по высоте слоя. Видно, как формируется устойчивая стратификация слоя жидкости по температуре и, следовательно, по плотности. По профилям скорости на рис. 4 и 5 видно, что подтекание холодной жидкости к нагретой стенке вместо всплывающей нагретой жидкости начинается практически от холодной противоположной стенки. При достижении холодной стенки горячей головной частью струи вдоль свободной верхней границы часть жидкости, не успевшая за короткий промежуток времени охладиться, разворачивается и как возмущение распространяется в обратном направлении ниже верхней границы (рис. 4).

Объясняется это тем, что разогретая жидкость имеет излишнюю плавучесть и не может уйти в глубину слоя вдоль холодной стенки (профили 6, 7 на рис. 4, a и профиль 2 на рис. 4, δ). Дойдя назад до горячей стенки, жидкость участвует в подъемном течении. Таким образом, на некоторый промежуток времени устанавливается пространственная форма приповерхностного течения, которая на качественном уровне совпадает с наблюдаемой экспериментально [3]. Отличие состоит в том, что в эксперименте при существенном вкладе термокапиллярного эффекта такая форма течения остается практически неизменной в течение всего времени нагрева. При исключении термокапиллярного эффекта и при относительно малых перепадах температуры обратное течение в верхней части устойчиво стратифицированного по температуре и плотности (рис. 5, a, рис. 2, c) слоя жидкости через некоторый промежуток времени исчезает и устанавливается циркуляция жидкости по контуру полости (профили 5, 6 на рис. 5, d и рис. 2).



Рис. 5. Профили температуры (*a*) и горизонтальной компоненты скорости в центральном сечении слоя жидкости x = 1,205 при Gr = 10^5 в моменты времени: l - t = 0,029; 2 - t = 0,057; 3 - t = 0,169; 4 - t = 0,329; 5 - t = 0,559; 6 - t = 4,084

Характер течения и пространственная форма течения становятся аналогичными установившемуся режиму в момент безразмерного времени t = 4,083: жидкость разогревается на горячей стенке, всплывает к верхней границе, разворачивается и распространяется вдоль верхней границы, охлаждается и опускается к дну полости, вдоль дна подтягивается к нагретой стенке. За исключением пристеночных поворотных зон течение плоскопараллельное (рис. 2, г). Интенсивность течения меняется во времени и коррелирует с процессом установления поля температуры. Эволюция профилей горизонтальной компоненты скорости в центральном по длине полости сечении x = 1,205 (в части, заполненной жидкостью $0,405 \le x \le 2,005$) и в сечении x = 0,605 вблизи тонкой металлической стенки, показанная на рис. 4 и рис. 5, δ , а также распределения горизонтальной компоненты скорости вдоль свободной поверхности жидкости на рис. 3, б говорят о том, что со временем интенсивность течения падает. Это происходит по мере установления устойчивой стратификации слоя жидкости. При этом максимальные значения горизонтальной компоненты скорости наблюдаются в начальные моменты времени, когда горячая жидкость всплывает и растекается в слое с нейтральным распределением плотности. Максимальное значение горизонтальной компоненты скорости достигается на верхней границе области в начальный период времени, когда струя горячей жидкости еще не достигла холодной стенки. После достижения горячей жидкостью холодной стенки интенсивность течений у верхней границы начинает медленно снижаться, достигая своего минимума при установившемся течении. При этом температура в приповерхностной части слоя растет с течением времени, достигая своего максимума при установившемся течении (рис. 5, a).

Интересной особенностью обладает пространственная форма конвективного течения в газе. Для газа тонкая металлическая стенка, разогреваемая за счет конвективных процессов, происходящих в жидкости, является не «пассивным приемником», а «генератором течения». Из-за сравнительно небольшого перепада температуры между левой холодной внешней стенкой и разогреваемой тонкой металлической стенкой и неоднородности разогрева тонкой стенки сверху вниз (рис. 6, δ) в газе развиваются лишь слабые ползущие конвективные течения с ядром, смещенным к верхней границе области (на рис. 6, a в области ($0 \le x \le 0,4$).

С увеличением числа Грасгофа сокращается инкубационный период, растет интенсивность конвективных течений из-за увеличивающейся силы плавучести вследствие большего перепада температуры между массами разогретой и холодной жидкости. Также наблюдается формирование неподвижного устойчиво стратифицированного по температуре (и, соответственно, по плотности) ядра и выраженных пограничных слоев вблизи твердых стенок полости. Меняются сценарии подтекания холодной жидкости к внезапно нагретой стенке после начала всплывания горячей жидкости. Сокращается интервал времени, в течение которого нагретая жидкость достигает тонкой холодной стенки.



Рис. 6. Изолинии функции тока (*a*) в момент времени t = 4,083 при Gr $=10^5$ (добавлено три изолинии функции тока в диапазоне от 0,0125 до 0,0375), распределение температуры (*б*) в сечении x = 0,405 в моменты времени:

1 - t = 0,029; 2 - t = 0,057; 3 - t = 0,169; 4 - t = 0,329; 5 - t = 0,559; 6 - t = 4,084



Рис. 7. Профили горизонтальной (*a*−*в*) компоненты скорости в сечении x = 1,205 и вертикальной компоненты (*z*−*e*) скорости в сечении y = 0,5 при $x \ge 0,405$ в сходственные моменты времени: при Gr = 10³ в моменты времени: *a*) 1 - t = 0,29; 2 - 0,59; 3 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 14,29; *c*) 1 - t = 0.29; 2 - 0.59; 3 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 14,29; *c*) 1 - t = 0.29; 2 - 0.59; 3 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 14,29; *c*) 1 - t = 0.29; 2 - 0.59; 3 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 3,45; 7 - 5,62; 8 - 14,29; при Gr = 10⁴ в моменты времени: *b*) 1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 2,16; 7 - 3,48; 8 - 8,78; при Gr = 10⁵ в моменты времени: *b*) 1 - t = 0,029; 2 - 0,057; 3 - 0,169; 4 - 0,329; 5 - 0,559; 6 - 4,083; *e*) 1 - t = 0,029; 2 - 0,057; 3 - 0,169; 4 - 0,329; 5 - 0,559; 6 - 1,145; 7 - 1,733; 8 - 4,083

На рис. 7 представлены профили компонент скорости в сходственные моменты времени. Хорошо виден рост амплитуд компонент скорости с ростом числа Грасгофа. Четко видно формирование неподвижного ядра и пограничного слоя в пристеночных областях. Заметно снижение толщины пограничных слоев и струи жидкости вдоль свободной поверхности по мере увеличения числа Грасгофа. Появляются инверсионные течения (рис. 7, e). Сокращается время установления пространственной формы конвективных течений. Данные на рис. 7, a-e показывают также, что максимальные времена, при которых приведены данные на всех других рисунках, соответствуют состояниям, очень близким установившимся стационарным течениям при заданных характерных перепадах температуры. Профили скорости на рис. 7, *а*-в в промежутки времени, соответствующие кривым 6-8, практически совпадают.



Рис. 8. Профили температуры в сечении x = 1,205 в сходственные моменты времени: *a* – при Gr = 10³ в моменты времени: *1* – *t* = 0,29; *2* – 0,59; *3* – 0,69; *4* – 1,09; *5* – 1,29; *6* – 14,29; *6* – при Gr = 10⁴

a – при Gr = 10 в моменты времени: 1 - t = 0,29; 2 - 0,59; 5 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 14,29; 6 - при Gr = 10 в моменты времени: <math>1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78; 6 - при Gr = 10⁵ в моменты времени: <math>1 - t = 0,029; 2 - 0,057; 3 - 0,169; 4 - 0,329; 5 - 0,559; 6 - 4,083

На рис. 8 представлены распределения температуры по высоте слоя жидкости при разных числах Грасгофа в сходные моменты времени в сечении, центральном по длине области, заполненной жидкостью. Распределения температуры по высоте слоев жидкости и газа в различные моменты времени показывают процесс их расслоения по температуре и формирования стратифицированного ядра.

Максимальные значения температуры всегда находятся на свободной поверхности за счет выноса нагретой жидкости. В процессе развития и установления конвективных течений уровень температуры на поверхности растет. Сначала за счет прохождения через центральное сечение области, заполненной жидкостью, переднего фронта горячей струи, распространяющейся вдоль свободной границы, происходит скачкообразный рост максимума температуры. Затем происходит монотонный рост температуры до момента установления пространственной формы конвективных течений. Распределение температуры по высоте области приближается к линейному распределению, формируется стратифицированное по температуре и плотности ядро, которое оказывает обратное влияние на эволюцию во времени полей скорости (рис. 7).



Рис. 9. Поле изотерм в тонкой стенке в различные моменты времени при $Gr = 10^5$

На рис. 9 представлена эволюция во времени полей изотерм в объеме тонкой стенки при числе Грасгофа Gr = 10^5 . Заметно, что за счет натекающего горячего потока жидкости, распространяющегося вдоль верхней границы области, стенка разогревается неравномерно. После достижения горячей струи поверхности стенки происходит резкий рост температуры в области, прилегающей к верхней границе. Видно, что тепловой удар после достижения тепловой волной тонкой стенки сглаживается за счет ее тепловой инерции и растекания тепла в плоскости стенки. С течением времени рост температуры замедляется, распределение температуры на стенке начинает приближаться к линейному распределению. Максимальная температура на поверхности тонкой стенки достигается при установившемся течении в прилегающей к верхней границе области.



Рис. 10. Профили температуры в сечении *x* = 0,402 в сходственные моменты времени:

a – при Gr = 10^3 в моменты времени: $I - t = 0,29; 2 - 0,59; 3 - 0,69; 4 - 1,09; 5 - 1,29; 6 - 14,29; 6 – при Gr = <math>10^4$ в моменты времени: $I - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78; 6 – при Gr = <math>10^5$ в моменты времени: I - t = 0,029; 2 - 0,057; 3 - 0,169; 4 - 0,329; 5 - 0,559; 6 - 4,083

На рис. 10 представлены распределения температуры по высоте в центральном по толщине стенки сечении x = 0,402 в сходственные моменты времени. Видно, что при меньших значениях числа Грасгофа характер развития поля температуры в тонкой стенке не изменяется, но увеличиваются характерные промежутки времени, такие как инкубационный период прогрева жидкости в режиме теплопроводности, время достижения горячей жидкостью холодной стенки, установление режима стационарной конвекции.

Наличие свободной поверхности жидкости и неравномерность распределения температур вдоль свободной поверхности приводит к развитию тепловой гравитационно-капиллярной конвекции. Наличие термокапиллярного эффекта может повлиять на пространственную форму и скорость конвективных течений, на локальные процессы теплоотдачи и распределение температуры в стенке вблизи границы раздела «жидкость–газ». Для понимания относительной роли сил плавучести и термокапиллярного эффекта в слоях со свободной границей жидкости и продольным градиентом температуры проведено численное исследование структуры течения и распределения температуры в тонкой стенке с учетом влияния термокапиллярного эффекта при внезапно включенном нагреве правой стенки расчетной области. Исследования проведены при одном перепаде температуры, соответствующем значениям числа Грасгофа $Gr = 10^4$ и числа Марангони Ma = 4220.

В режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции наблюдается ряд существенных отличий. Из всплывающего у горизонтальной стенки объема жидкости формируется более компактная струя горячей жидкости, распространяющаяся вдоль свободной границы (рис. 11) с более высокой скоростью в сравнении со случаем термогравитационного течения (рис. 12). В результате горячая струя раньше достигает стальной перегородки. Характерно отличие профилей горизонтальной компоненты скорости в центральном сечении по длине слоя: в режиме термогравитационной конвекции отсутствует трение и градиент скорости по нормали к свободной поверхности, а в режиме гравитационно-капиллярной конвекции вдоль свободной границы включается тангенциальное напряжение и наблюдается существенный градиент скорости. Другой интересной особенностью является то, что в установившемся режиме течения наблюдаются локальные максимумы скорости вдоль свободной поверхности у нагретой и холодной стенок, а значение амплитуды скорости вдоль большей части свободной поверхности возрастает не столь значительно. Вблизи горячей стенки локальный максимум скорости менее выражен. Объясняется это распределением температуры вдоль свободной поверхности в режиме термогравитационной конвекции на рис. 3, а. Градиент температуры вблизи горячей стенки в установившемся режиме резко снижается и поверхность на большом



протяжении почти изотермическая. К холодной стенке жидкость подтекает с температурой, близкой к температуре горячей стенки.

Рис. 11. Поля изотерм при Gr = 10^4 и Ma = 4220 в моменты времени: *a* – *t* = 0,04; *б* – 0,08; *в* – 0,17; *г* – 8,5 (добавлено 12 изотерм в диапазоне от 0,0015625 до 0,01875)



Рис. 12. Профили горизонтальной компоненты скорости в сечении x = 1,205 при Gr = 10^4 в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (*a*) и термогравитационной конвекции (*б*) в моменты времени:

a)
$$1 - t = 0,04; 2 - 0,08; 3 - 0,17; 4 - 0,44; 5 - 0,79; 6 - 8,5; \delta$$
) $1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78$

На рис. 13 хорошо видно, как струя получает ускорение при подходе к холодной перегородке под влиянием термокапиллярного эффекта. Это происходит из-за больших значений градиента температуры по нормали к стенке в пристеночной области у перегородки (рис. 14).

По приведенным на рис. 14 распределениям градиентов температуры по нормали к тонкой стенке со стороны жидкости хорошо видно, что термокапиллярный эффект приводит к резкому росту градиентов температуры на поверхности тонкой стенки вблизи границы раздела «жидкость–газ». Это приводит к резкому росту градиентов температуры по высоте стенки и к значительному росту локальных термических напряжений в стальной стенке вблизи этого раздела. Полученные результаты наглядно показывают необходимость учета сопряженного свободноконвективного теплообмена при расчете термических напряжений в частично заполненных топливных баках летательных аппаратов (ЛА) и общего напряженно-деформированного состояния в элементах конструкции ЛА, контактирующих с заполненными жидкостями емкостями.



Рис. 13. Профили горизонтальной компоненты скорости в сечении y = 1 при Gr $= 10^4$ в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (*a*) и термогравитационной конвекции (*б*) в моменты времени:

a) 1 - t = 0,04; 2 - 0,08; 3 - 0,17; 4 - 0,44; 5 - 0,79; 6 - 8,5; 6) 1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78



Рис. 14. Распределения градиентов температуры по нормали к стенке $\partial T/\partial x$ в сечении x = 0,405 в спирте при Gr = 10^4 в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (*a*) и термогравитационной конвекции (*б*) в моменты времени:

a) 1 - t = 0,04; 2 - 0,08; 3 - 0,17; 4 - 0,44; 5 - 0,79; 6 - 8,5; 6) 1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78



Рис. 15. Профили вертикальной компоненты скорости в сечении y = 0.5 при Gr = 10^4 в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (*a*) и термогравитационной конвекции (*б*) в моменты времени:

a) 1 - t = 0,04; 2 - 0,08; 3 - 0,17; 4 - 0,44; 5 - 0,79; 6 - 8,5; 6) 1 - t = 0,08; 2 - 0,17; 3 - 0,29; 4 - 0,54; 5 - 0,84; 6 - 8,78

На рис. 15 представлены профили вертикальной компоненты скорости в центральном по высоте сечении в различные моменты времени в режиме тепловой гравитационнокапиллярной конвекции и термогравитационной конвекции. Заметны различия в эволюции вертикальных компонент скорости для двух процессов. При тепловой гравитационнокапиллярной конвекции наблюдается возрастание амплитуды вертикальной компоненты скорости у горячей стенки, затем убывание, в отличие от постоянного убывания при термогравитационной конвекции (в данные моменты времени в начале процесса скорость быстро достигает максимального значения). Это вызвано усилением сноса нагретой жидкости термокапиллярным эффектом от нагревающей стенки в начале развивающегося процесса.



Рис. 16. Поля изотерм в тонкой стенке при Gr = 10^4 в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (*a*) и термогравитационной конвекции (*б*) в сходственные моменты времени

Сравнивая распределение изотерм в разделяющей жидкость и газ стальной перегородке при $Gr = 10^4$ в режиме тепловой гравитационно-капиллярной конвекции (рис. 16, *a*) и в режиме термогравитационной конвекции (рис. 16, *б*), видим, что в первом процессе перегородка разогревалась более интенсивно, причем в более узкой по вертикали полосе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При внезапно включенном боковом подводе тепла в исследуемой составной области наблюдаются следующие эволюции полей температуры и этапы развития течения. На начальном этапе во всех режимах наблюдается прогрев тонких слоев неподвижной жидкости вблизи нагреваемой стенки. Интервалы времени от начала нагрева до возникновения конвективного течения уменьшаются при увеличении приложенной разности температуры. После возникновения конвективного течения и развития нестационарного конвективного течения в исследуемой составной области тонкая вертикальная стенка, на которую натекает поток горячей жидкости, нагревается неравномерно. Жидкость имеет максимальную температуру и скорость в тонком поверхностном слое у свободной верхней границы, особенно в начальные моменты времени. Именно этот перегретый слой ударяет в тонкую стенку. В результате происходит локальный нагрев стенки и возникают большие градиенты температуры. Следовательно, именно в этой области возникнут максимальные термические напряжения. Тепловой удар после достижения тепловой волной тонкой стенки сглаживается за счет ее тепловой инерции и растекания тепла в плоскости стенки. Область локального нагрева тонкой стенки сокращается при учете термокапиллярного эффекта. Одновременно увеличиваются локальные градиенты температуры в плоскости стенки. В начальные моменты времени после достижения горячей струей жидкости тонкой стенки устанавливается пространственная форма приповерхностного течения, которая на качественном уровне остается практически неизменной в течение всего времени нагрева. Увеличиваются лишь размеры по вертикали и скорость течения. При формировании регулярного потока вдоль верхней границы области и с ростом температуры в набегающем потоке появляется относительно узкая нагретая полоса на стенке. В результате непрерывного подогрева и слабой теплоотдачи с внешней поверхности тонкой стенки в слое газа растет объем нагретой жидкости в верхней части бака, а также ее средняя температура. С течением времени в системе возникает установившееся циркуляционное течение, профиль температуры на горячей стенке приближается к почти линейному распределению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. Методы расчета. – М.: Машиностроение, 1966. – 216 с.

2. Белов В.К., Белов В.В. Прочность и устойчивость ракетных и авиационных конструкций при термосиловом нагружении. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 491 с.

3. Влияние нестационарной тепловой гравитационно-капиллярной конвекции на распределение температуры в тонкой вертикальной стенке / В.С. Бердников, В.А. Гапонов, В.А. Гришков, П.М. Лиханский, В.А. Марков // Теплофизика и аэромеханика. – 2010. – Т. 17, № 2. – С. 197–208.

4. *Бердников В.С., Митин К.А.* Сопряженный конвективный теплообмен в вертикальном слое жидкости // Вестник НГУ. Серия: Физика. – 2012. – Т. 7, вып. 1. – С. 70–79.

5. *Kutateladze S.S., Berdnikov V.S.* Structure of thermogravitational convection in flat variously oriented layers of liquid and on a vertical wall // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1984. – Vol. 27, iss. 9. – P. 1595–1611. – doi:10.1016/0017-9310(84)90272-2.

6. Бердников В.С., Забродин А.Г., Марков В.А. Тепловая гравитационно-капиллярная конвекция в полости с различно нагретыми торцевыми стенками // Структура вынужденных и термогравитационных течений: сборник научных трудов / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теплофизики; под ред. Е.М. Хабахпашевой. – Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. – С. 147–163.

7. Бердников В.С., Гапонов В.А. Тепловая гравитационно-капиллярная конвекция в прямоугольных полостях // Труды II Российского симпозиума «Процессы тепломассопереноса и рост монокристаллов и тонкопленочных структур (HT&CG'97)», 22–24 сентября 1997 г. – Обнинск, 1998. – С. 35–46.

8. Бердников В.С., Гапонов В.А., Коврижных Л.С. Тепловая гравитационно-капиллярная конвекция в полости с продольным градиентом температуры // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 4. – С. 116–121.

9. Нестационарная термогравитационная конвекция в плоских прослойках жидкости различной ориентации / В.С. Бердников, П.М. Лиханский, В.А. Марков, П.В. Мокрушников // Структура гидродинамических потоков (вынужденное течение, тепловая конвекция): сборник научных трудов / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теплофизики; под ред. Е.М. Хабахпашевой, В.С. Бердникова. – Новосибирск, 1986. – С. 94–107.

10. Бердников В.С., Гришков В.А. Ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое и теплоотдача вертикальных стенок // Труды 4 Российской национальной конференции по теплообмену – РНКТ 4, Москва 23–27 октября 2006 г. – М.: МЭИ, 2006. – Т. 3: Свободная конвекция. Тепломассообмен при химических превращениях. – С. 67–70.

11. Бердников В.С., Гришков В.А. Структура течения и теплообмен в вертикальных слоях жидкости в режимах термогравитационной и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции // Аэродинамика и прочность конструкций летательных аппаратов: сборник трудов Всероссийской конференции по аэродинамике летательных аппаратов и прочности авиационных конструкций. – Новосибирск: СибНИА, 2009. – С. 124–131.

Гершуни Г.З., Жуховщкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
Конвективные процессы в невесомости / В.И. Полежаев, М.С. Белло, Н.А. Верезуб, К.Г. Дубовик, А.П. Лебедев, С.А. Никитин, Д.С. Павловский, А.И. Федюшкин. – М.: Наука, 1991. – 240 с.

14. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб, Г.С. Глушко, В.Л. Грязнов, К.Г. Дубовик, С.А. Никитин, А.И. Простомолотов, А.И. Федосеев, С.Г. Черкассов. – М.: Наука, 1987. – 274 с.

15. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с. – (Учебники НГТУ).

Бердников Владимир Степанович, доктор физико-математических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета, заведующий лабораторией Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Основное направление научных исследований – сложный сопряженный теплообмен при росте кристаллов в тонкостенных конструкциях, в задачах геодинамики; процессы ламинарно-турбулентного перехода при свободной и смешанной конвекции в слоях жидкости различной ориентации. Автор более 300 научных работ. E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

Митин Константин Александрович, магистр прикладной математики и информатики, инженер Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Основное направление научных исследований – численное моделирование сложного сопряженного теплообмена, процессов ламинарно-турбулентного перехода, свободной конвекции. Автор более 20 научных работ. E-mail: *mitin@ngs.ru*

Кислицын Степан Александрович, бакалавр прикладной математики и информатики, магистрант первого года обучения факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – численное моделирование сопряженного свободноконвективного теплообмена. Автор одной научной работы. Е-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

Influence of non-stationary thermal-capillary and gravitational convection on temperature fields in a thin wall^{*}

V.S. BERDNIKOV¹, K.A. MITIN², S.A. KISLITSYN³

¹Institute of Thermal Physics SB RAS, 1 Lavrentiev Prospekt, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, D.Sc. (Phys.&Math.), laboratory head. E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

² Institute of Thermal Physics SB RAS, 1 Lavrentiev Prospekt, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, engineer. E-mail: mitin@ngs.ru

³ Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marks Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, postgraduate student. E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

Time dependence of temperature distribution inside a thin wall that separates the liquid layer with the Prandtl number Pr = 16 from the gas layer in a rectangular cavity was numerically investigated. The conjugate convective heat transfer in the thermal and gravitational convection mode in the range of Grashof of $10^3 \le Gr \le 10^6$ and thermal gravitational and capillary fluid convection at $Gr = 10^4$ and the Marangoni number Ma = 4220 was studied. A system of equations of convection in the Boussinesq approximation written in variables of temperature, vorticity and the stream function with and without taking into account a thermo-capillary effect on the free surface of the liquid was solved by the finite element method (FEM). The evolution of a convective flow after sudden heating of the opposite vertical wall of the cavity was studied. Transient temperature fields in the liquid, gas and a thin wall between them were also calculated. It is shown that a thin wall is heated unevenly and temperature distribution in a thin wall substantially depends on the local flow characteristics in the liquid. It is shown that the thermo-capillary effect has a significant impact on the intensity of convective flows and temperature distribution inside a thin wall.

Keywords: conjugate heat transfer, natural convection, thermo-gravitational convection, thermal-capillarygravitational convection, thermo-capillary effect, thin wall, numerical simulation, FEM

REFERENCES

1. Zarubin V.S. *Temperaturnye polya v konstruktsii letatel'nykh apparatov. Metody rascheta* [The temperature fields in the design of aircraft. Methods of calculation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1966. 216 p.

2. Belov V.K., Belov V.V. *Prochnost' i ustoichivost' raketnykh i aviatsionnykh konstruktsii pri termosilovom nagruzhenii* [Strength and stability of the missile and aircraft structures under thermomechanical loading]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011. 491 p.

3. Berdnikov V.S., Gaponov V.A., Grishkov V.A., Likhanskii P.M., Markov V.A. Vliyanie nestatsionarnoi teplovoi gravitatsionno-kapillyarnoi konvektsii na raspredelenie temperatury v tonkoi vertikal'noi stenke [Effect of nonstationary thermal gravitation-capillary convection on temperature distribution in a thin vertical wall]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 197–208. (In Russian)

4. Berdnikov V.S., Mitin K.A. Sopryazhennyi konvektivnyi teploobmen v vertikal'nom sloe zhidkosti [The convective conjugate heat transfer in a vertical liquid lay]. *Vestnik NGU. Seriya: Fizika – Vestnik NSU. Series: Physics*, 2012, vol. 7, iss. 1, pp. 70–79.

5. Kutateladze S.S., Berdnikov V.S. Structure of thermogravitational convection in flat variously oriented layers of liquid and on a vertical wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1984, vol. 27, iss. 9, pp. 1595–1611. doi:10.1016/0017-9310(84)90272-2

6. Berdnikov V.S., Zabrodin A.G., Markov V.A. [Thermal gravity-capillary convection in a cavity with differently heated end walls]. Sbornik nauchnykh trudov Instituta teplofiziki Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR "Struktura vynuzhdennykh i termogravitatsionnykh techenii" [Collection of scientific transactions of the Institute of thermophysics, Siberian Branch of the USSR Academy of sciences "Structure internally and thermogravitational currents"]. Novosibirsk, ITF SO AN SSSR Publ., 1983, pp. 147–163.

7. Berdnikov V.S., Gaponov V.A. [Thermal gravity-capillary convection in a rectangular cavity]. *Trudy II Rossiiskogo simpoziuma "Protsessy teploperenosa i rost monokristallov i tonkoplenochnykh struktur (HT&CG'97)", 22–24 sentyabrya 1997 g.* [Proceedings of II Russian Symposium "The processes of heat mass transfer and the growth of single crystals and thin-film structure (HT & CG'97)"]. September 22–24, 1997, Obninsk, 1998, pp. 35–46.

8. Berdnikov V.S., Gaponov V.A., Kovrizhnykh L.S. Teplovaya gravitatsionno-kapillyarnaya konvektsiya v polosti s prodol'nym gradientom temperatury [Thermal gravitational-capillary convection in a cavity with a longitudinal temperature gradient]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, no. 4, pp. 116–121. (In Russian)

9. Berdnikov V.S., Likhanskii P.M., Markov V.A., Mokrushnikov P.V. [Unsteady natural convection in flat liquid interlayers of different orientations]. Sbornik nauchnykh trudov Instituta teplofiziki Sibirskogo otdeleniya Akademii nauk SSSR "Struktura gidrodinamicheskikh potokov (vynuzhdennoe techenie, teplovaya konvektsiya)" [Collection of scientific transactions of the Institute of thermophysics, Siberian Branch of the USSR Academy of sciences "Structure of hydrodynamic flows (forced flow, thermal convection)"]. Novosibirsk, ITF SO AN SSSR Publ., 1986, pp. 94–107. 10. Berdnikov V.S., Grishkov V.A. [Laminar-turbulent transition in the natural convection boundary layer and heat transfer of the vertical walls]. *Trudy 4 Rossiiskoi natsional'noi konferentsii po teploobmenu – RNKT 4, Moskva 23–27 okty-abrya 2006* g. [Proceedings of the 4 Russian National Conference on Heat Transfer – RNKT 4, Moscow 23–27 October 2006], Moscow, MEI Publ., 2006, vol. 3, pp. 67–70.

11. Berdnikov V.S., Grishkov V.A. [Flow and heat transfer in vertical liquid layers in the thermogravitational and thermal gravity-capillary convection modes] *Sbornik trudov Vserossiiskoi konferentsii po aerodinamike letatel'nykh apparatov i prochnosti aviatsionnykh konstruktsii "Aerodinamika i prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov"*. [Collection of works All-Russian Conference on the aerodynamics of aircraft and strength of aircraft structures "Aerodynamics and strength designs of aircraft"]. Novosibirsk, SibNIA Publ., 2009, pp. 124–131.

12. Gershuni G.3., Zhukhovitskii E.M. Konvektivnaya ustoichivost' neszhimaemoi zhidkosti [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p.

13. Polezhaev V.I., Bello M.S., Verezub N.A., Dubovik K.G., Lebedev A.P., Nikitin S.A., Pavlovskii D.S., Fedyushkin A.I. Konvektivnye protsessy v nevesomosti [Convective processes in microgravity]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 240 p.

14. Polezhaev V.I., Bune A.V., Verezub N.A., Glushko G.S., Gryaznov V.L., Dubovik K.G., Nikitin S.A., Prostomolotov A.I., Fedoseev A.I., Cherkassov S.G. *Matematicheskoe modelirovanie konvektivnogo teplomassoobmena na osnove uravnenii Nav'e-Stoksa* [Mathematical modeling of convective heat and mass transfer on the basis of the Navier-Stokes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 274 p.

15. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for solving scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 896 p.

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik Science Bulletin of the NSTU Vol. 57, No. 4, 2014, pp. 131–146