ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 103, № 3, 2026, с. 23–38

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 103, No. 3, 2026, pp. 23–38

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.6

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-23-38

Численное решение обратной кинематической задачи в линеаризованной постановке для неоднородных сред с использованием рефрагированных и рассеянных волн*

С.М. ЗЕРКАЛЬ[a], Е.А. ПУТЯТА[b]

РФ, 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

[a] *zerkal@corp.nstu.ru* [b] *putyata.2018@stud.nstu.ru*

Исследована обратная кинематическая задача для вертикально-неоднородных сред, в которых скорость распространения волн зависит только от глубины, с использованием рефрагированных и рассеянных волновых сигналов. В отличие от классических постановок обратных кинематических задач, где основное внимание уделяется прямым или отраженным волнам, в настоящей работе ключевым объектом анализа выступают рассеянные волны, в которых траектория была изменена в результате взаимодействия с локальными неоднородностями среды. Такой подход расширяет область применимости метода на среды, демонстрирующие волноводные эффекты, где волны «запираются» в слое и распространяются на большие расстояния с минимальными потерями. Разработан вычислительный алгоритм на основе линеаризации функционала Ферма, позволяющий определять скоростное распределение $V(z)$ в таких средах. Для прямой задачи применены как аналитические решения (в линейном случае $V(z) = 1 + Bz$), так и численные методы (для нелинейных случаев), включая метод Рунге – Кутты 4-го порядка. Реализованное решение показало возможность восстановления скоростного распределения среды по измеренному времени регистрации волновых сигналов; выявлены погрешности, связанные с неточностью линеаризации. Анализ показал, что ошибка линеаризации растет с увеличением глубины, что, в свою очередь, может быть компенсировано введением дополнительных регуляризирующих процедур, таких как, например, сглаживание шумов с помощью сплайнов. Полученные результаты могут быть интересны для решения задач сейсмики, акустического зондирования и неразрушающего контроля. Перспективы дальнейших исследований связаны прежде всего с переходом к более сложным моделям сред с применением более совершенных методов регуляризации, а также с гибридизацией данного подхода с моделями искусственного интеллекта. Всё это открывает перспективы к расширению области применимости и разрешающей способности метода.

* *Статья получена 10 марта 2026 г.*

Ключевые слова: обратная кинематическая задача, рефрагированные волны, рассеяние, компьютерное моделирование, линеаризация функционала Ферма, волноводные среды, численные методы, вертикально-неоднородные среды

ВВЕДЕНИЕ

Дистанционная диагностика удаленных объектов привлекала внимание ученых с давних пор, и ее актуальность со временем только возрастает. Причем с развитием «человеческого знания» естественно становились доступными всё более удаленные объекты, возрастала детальность, разрешающая способность и границы применимости таких исследований. Часто разрабатываемые технологии имели «двойное назначение» – как в гражданском, так и в военном отношении (например, решение локационных задач, в том числе в гидроакустике) [1]. Достаточно сказать, что серьезный толчок к развитию сейсмических исследований возник в результате попыток с использованием поверхностных волн локализовать тяжелую артиллерию противника во время Первой мировой войны. Незадолго до этих событий, в 1905–1907 годах, геофизик Е. Вихерт и математик Г. Герготц получили первый результат, относящийся к «обратной кинематической задаче сейсмики», являющейся одной из основных задач теории распространения волн. Обратная кинематическая задача (ОКЗ) в общем случае заключается в определении скоростного распределения распространения сигнала в заданной среде для рефрагированных волн в некоторой области исследуемой среды по зарегистрированному времени пробега этих волн от источника до приемника колебаний, расположенных на границе отмеченной области, например поверхности Земли [2]. Исследования выполняются в «приближении геометрической оптики», что в сейсмике имеет название «геометрическая сейсмика».

Обратная кинематическая задача – типичная обратная задача математической физики. С философских позиций ОКЗ характеризуется обращением причинно-следственных связей: по следствию – времени прихода рефрагированного волнового сигнала (результату решения прямой задачи) – определяется его скоростное распространение в заданной среде, т. е. причина вместе с генерируемым зондирующим сигналом, породившими это следствие. Поэтому уместно отметить корреляцию с принятым в области искусственного интеллекта понятием «целенаправленный поиск в пространстве состояний»: прямая задача соответствует поиску от исходных данных к цели, а обратная – от цели к исходным данным. В этом случае исходные данные – скоростное распределение распространения сигнала в исследуемой среде, а цель – вектор измерений (время прихода рефрагированных волн), называемый в теории распространения волн (сейсмоакустике) годографом. Как обратная задача математической физики, ОКЗ является некорректной и требует для своего решения регуляризирующего воздействия. При этом она может иметь переопределенные постановки, а степень некорректности – как сильную, так и слабую – в соответствии с классификацией, принятой в отечественной научной школе по «условно-корректным задачам» [3].

Основным интегральным соотношением ОКЗ является функционал Ферма (1) – известная формула «Задачи геометрической оптики в пространстве» [4, 8]. Функционал Ферма связывает $V = V(x, y, z)$ – скоростное распре-

деление в исследуемой среде, $t = t(x^0, x^1)$ – время прихода рефрагированной волны от источника $x^0 = (x_0, y_0, z_0)$ до приемника $x^1 = (x_1, y_1, z_1)$, вдоль лучевой траектории $\Gamma = \Gamma(x^0, x^1)$:

$$t = t(x^0, x^1) = \int\limits_{\Gamma(x^0, x^1)} \frac{dS}{V}. \qquad (1)$$

Здесь *ds* – элемент дуги кривой $\Gamma(x^0, x^1)$. Функционал Ферма в соответствии с понятиями вариационного исчисления позволяет, зная подынтегральную функцию, найти $\Gamma(x^0, x^1)$ как решение соответствующей системы уравнений Эйлера. Таким образом, $\Gamma(x^0, x^1)$ являются геодезическими.

Если поставить ОКЗ как определение функции V по известным значениям t (естественно, при этом необходимо знать геодезические Г), то в такой постановке ОКЗ представляет собой классическую задачу «интегральной геометрии» [4], для решения которой предпочтительным является получение формулы обращения, т. е. для оператора A ($t = AV$) построение обратного оператора A^{-1}:

$$t = AV, \;\; A^{-1}t = A^{-1}AV, \;\; V = A^{-1}t. \qquad (2)$$

При решении практических задач точная информация, как правило, отсутствует, и прежде всего это относится к лучевым траекториям. Таким образом, построение обратного оператора A^{-1} становится нереализуемым. Решать такие задачи возможно только приближенно, используя априорную информацию об исследуемой среде, а точнее, об искомом скоростном распределении.

Важным обстоятельством является то, что для построения A^{-1} значения функции t недостаточно, необходимо знать еще и функции Г. При практическом применении значение t – это измеренное время прихода волн. Однако точные значения параметров среды (например, скорость и зависящую от нее лучевую траекторию) получить невозможно, поэтому в общей постановке ОКЗ не имеет решения.

Однако, как отмечалось выше, знание так называемой априорной информации об исследуемой среде, о распространении зондирующего волнового сигнала позволяет получить приближенное решение ОКЗ, основанное, например, на предположении о том, что искомая скорость V и показатель преломления n представляется в виде

$$V = V_0 + V_1, \;\; n = V^{-1}, \;\; n = n_0 + n_1, \;\; n_0 = \frac{1}{V_0},$$

$$V_0 \gg |V_1|, \;\; n_0 \gg |n_1|.$$

Кроме того, среда предполагается регулярной, т. е. паре точек «источник – приемник» соответствует одна соединяющая их траектория Г. Такая информация о свойствах V позволяет применить для решения ОКЗ метод линеаризации.

Предположим, что n_0 – известная функция, а определению подлежит функция n_1. Тогда можно «эмпирически» простой заменой в функционале Ферма геодезической Г, соответствующей $n = n_0 + n_1$, на Γ_0, соответствующую n_0, получить для n_1 следующее выражение:

$$t = \int_{\Gamma_0} (n_0 + n_1)ds = \int_{\Gamma_0} n_0 ds + \int_{\Gamma_0} n_1 ds. \qquad (3)$$

Поскольку $t_0 = \int_{\Gamma_0} n_0 ds$, то $t_1 = t - t_0 = \int_{\Gamma_0} n_1 ds$, $t_1 = An_1 \Rightarrow A^{-1}t_1 = A^{-1}An_1 = n_1$.

Таким образом получили реализацию выражения (2).

В настоящей работе рассматривается постановка обратной кинематической задачи для вертикально-неоднородных сред, в которых скорость распространения волн зависит только от глубины: $V = V(z)$. Предполагается, что функция $V(z)$ допускает линеаризацию в окрестности некоторого постоянного значения, что упрощает последующий анализ. В качестве основного сигнала используются рефрагированные акустические волны, рассеянные на внутренних неоднородностях среды, т. е. не прямые волны от источника, а именно те, что претерпели изменение траектории в результате взаимодействия с неоднородностями. Актуальность обусловлена потребностью в устойчивых и точных методах диагностики неоднородных сред, особенно в условиях зашумленных данных, что делает подход перспективным для сейсмики, акустического зондирования и неразрушающего контроля. Такой подход расширяет область применимости метода, позволяя работать со средами, в которых проявляются волноводные эффекты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В рамках предложенного подхода, основанного на анализе рассеянных волн, далее рассматривается математическая постановка обратной кинематической задачи для вертикально-неоднородных сред. В отличие от классических постановок обратных кинематических задач [6, 7], где используются только прямые или отраженные волны, ключевым объектом анализа выступают рассеянные волны [8], в которых траектория была изменена в результате взаимодействия с локальными неоднородностями среды.

Эту постановку естественно назвать обратной кинематической задачей рассеяния по аналогии с обратной задачей рассеяния в квантовой механике или акустике, где по наблюдаемым характеристикам рассеянного поля восстанавливается структура рассеивателя. В данном случае по временным задержкам рассеянных волн восстанавливается профиль скорости $V(z)$.

Система наблюдений задается следующим образом: в плоскости xz источник сигнала расположен в точке $(0, 0)$, а приемник – в точке $(l, 0)$. Известны два угла: a_1 – угол выхода луча из источника, a_2 – угол прихода регистрируемого луча (рис. 1). Цель – восстановить функцию скорости $V(z)$, описывающую среду на основе измеренного времени прихода рассеянных волн.

Важным уточнением является то, что эта постановка применима в условиях, когда возможно генерировать узконаправленные волновые пучки – «шнуровые сигналы», которые являются решением волнового уравнения функционала Ферма, представляя собой лучи, аналогично работе [12]. Такие решения характеризуются высокой локализацией в пространстве и позволяют избежать неоднозначности при восстановлении волноводных структур, а также лучи являются более простыми объектами, чем волны. Хотя требования к генерации таких лучей накладывают определенные ограничения [13] на экспериментальную реализацию, они компенсируются однозначностью восстановления (исходя из принципа Ферма), в отличие от классических обратных задач, где часто возникает неоднозначность, связанная с симметрией или недостатком данных.

Математически задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения первого рода [9–11], связывающего время регистрации сигналов t с искомым скоростным распределением $V(z)$ в заданной среде. В линеаризованной постановке, когда $V(z)$ близка к константе, задача упрощается и может быть решена аналитически или численно:

$$A(c) = \int\limits_{\Gamma(x)} \frac{dS}{V(z)} = t(x), \quad \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x). \tag{4}$$

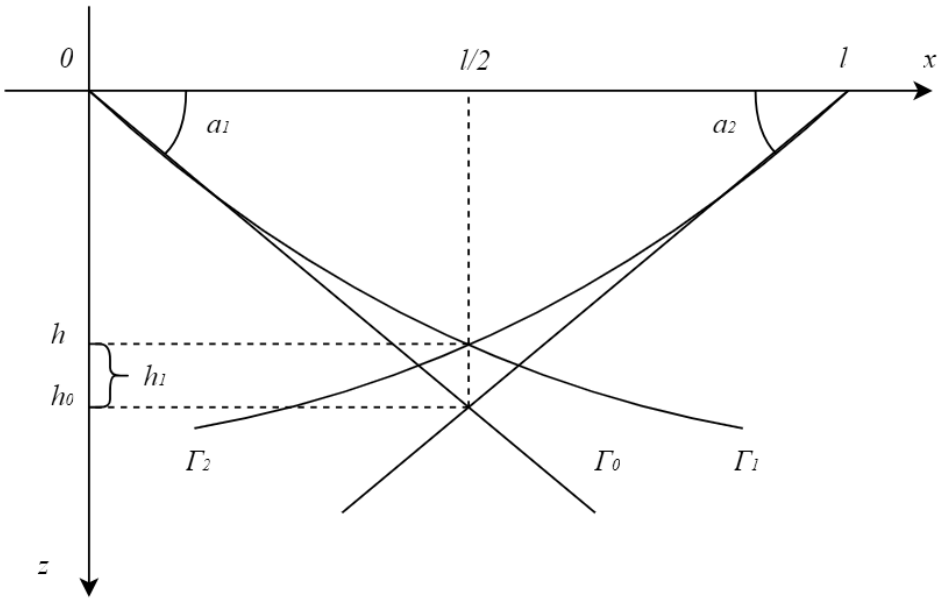


Рис. 1. Геометрическая схема выполнения измерений в ОКЗ рассеяния:
$\Gamma_0(\bar{x})$ – луч для среды $n = n_0$ при отсутствии неоднородности; $\Gamma_1(\bar{x})$ – луч для $n = n_0 + n_1$; $\Gamma_2(\bar{x})$ – луч сигнала, рассеянного на неоднородности среды

Fig. 1. Geometric diagram of measurement execution in the inverse kinematic scattering problem:
$\Gamma_0(\bar{x})$ is a ray for $n = n_0$ in the absence of heterogeneity; $\Gamma_1(\bar{x})$ is a ray for $n = n_0 + n_1$; $\Gamma_2(\bar{x})$ is a ray of a signal scattered by a medium inhomogeneity

В точке $l/2$ Γ_1 и Γ_2 пересекаются, $(\bar{x}) = (x,\ z)$.

Рассматривается частный случай, когда углы выхода и прихода лучей совпадают: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. В рамках линеаризованной постановки предполагается, что показатель преломления среды задается константой n_0. При этих условиях справедливо следующее соотношение:

$$t - t_0 = 2 \int\limits_{\Gamma_0} n_1(z) ds, \tag{5}$$

где t_0 – время регистрации рефрагированного сигнала при отсутствии неоднородности; t – фактическое время; Γ_0 – луч (лучевая траектория), который строится исходя из уравнения

$$x = z \operatorname{ctg}(\alpha).$$

Тогда

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}, \tag{6}$$

$$t(\alpha) - t_0(\alpha) = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha} n_1(z) \sqrt{1 + x_0^2 dz}. \tag{7}$$

Отсюда

$$n_1\left(\frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{\cos^2\alpha}{2l} \frac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\left(t(\alpha) - t_0(\alpha)\right)\right]. \tag{8}$$

Таким образом, меняя угол α, можно определить показатель преломления в исследуемой среде.

Прямая кинематическая задача сейсмики рассматривается в рамках лучевого метода. В результате ее решения по заданному изменению скорости распространения акустической волны в среде $V(x, y, z)$ строятся лучевые траектории, вдоль которых распространяется исследуемая волна, вычисляется время пробега волны вдоль луча.

Далее рассматривается прямая задача для модели градиентной среды с линейным законом изменения скорости от глубины:

$$V(z) = 1 + Bz, \quad B = \text{const}, \quad B > 0.$$

Соответственно, коэффициент преломления также меняется линейно:

$$n_1(z) = 1 + n(z), \text{ где } n_1(z) = Bz.$$

Согласно рис. 2

$$R^2 = \left(z + \frac{1}{B}\right)^2 + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow z = -\frac{1}{B} + \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}. \tag{9}$$

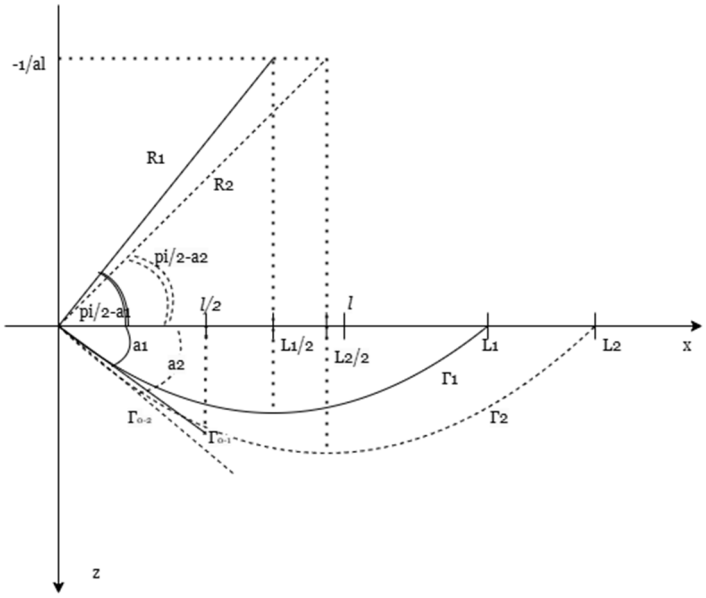


Рис. 2. Дополнительная геометрическая схема для вычислений (9)

Fig. 2. An additional geometric diagram for calculations (9)

Время прихода рассеянной и зарегистрированной в точке поверхности $x_1 = l$ волны, испущенной из источника, расположенного в точке $x_0 = 0$, рассчитывается по формуле, учитывающей соотношение (9). В результате получаем

$$t\left(0,\ \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2B} \ln \frac{R + \frac{l}{2}}{R - \frac{l}{2}}. \tag{10}$$

Для расчета t_0 используется формула

$$t_0(\alpha) = \frac{l}{\cos\alpha}. \tag{11}$$

Таким образом, на основе результатов вычислений (10) и (11) при разных значениях угла решается обратная кинематическая задача через формулу обращения (8). Важным уточнением является то, что подобное решение применимо для регулярных вертикально-неоднородных сред при линеаризованной постановке обратной кинематической задачи.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Далее выстраивается решение прямой кинематической задачи для генерации данных согласно постановке. В соответствии с построенным решением разработан вычислительный алгоритм и его программная реализация на языке Python, проведены численные компьютерные эксперименты с целью опреде-

ления параметра B, решения прямой кинематической задачи для линеаризованного случая и для точного. Результаты приведены на рис. 3 и 4.

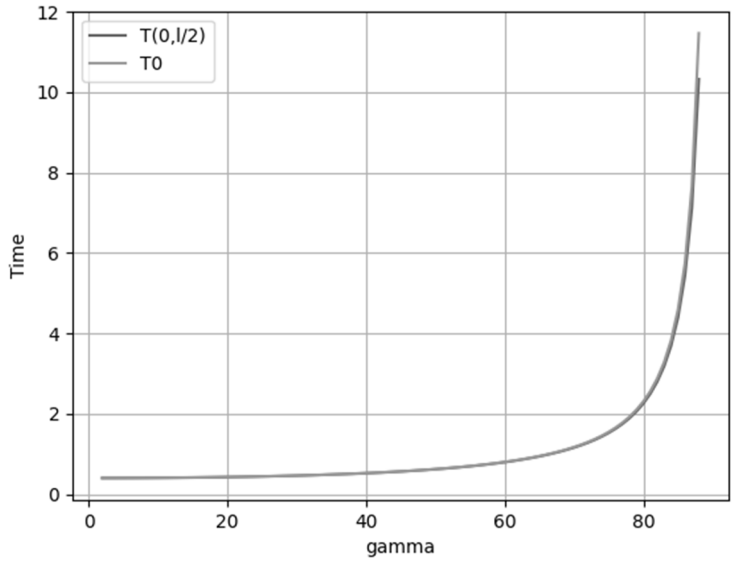


Рис. 3. Сравнение графиков времени прихода волны

Fig. 3. Comparison of wave arrival times

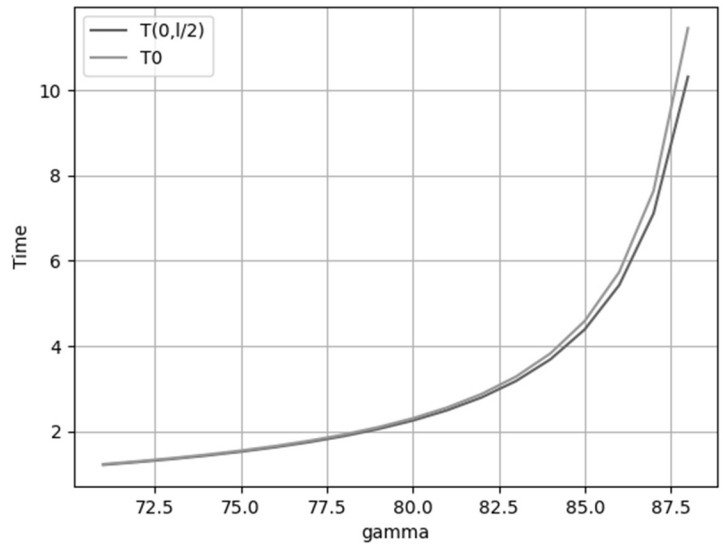


Рис. 4. Сравнение графиков времени прихода волны (приближение 70…90 градусов)

Fig. 4. Comparison of the arrival time graphs of the wave (zoom of 70…90 degrees)

Рассчитывается абсолютная и относительная ошибка и строятся графики зависимости ошибки от угла входа сигнала в исследуемую среду.

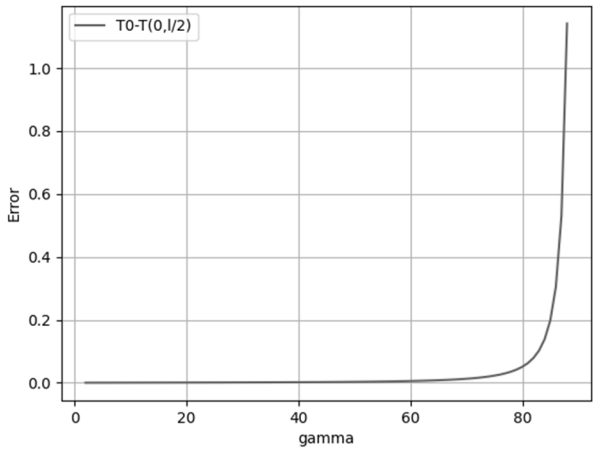


Рис. 5. График абсолютной ошибки

Fig. 5. An absolute error graph

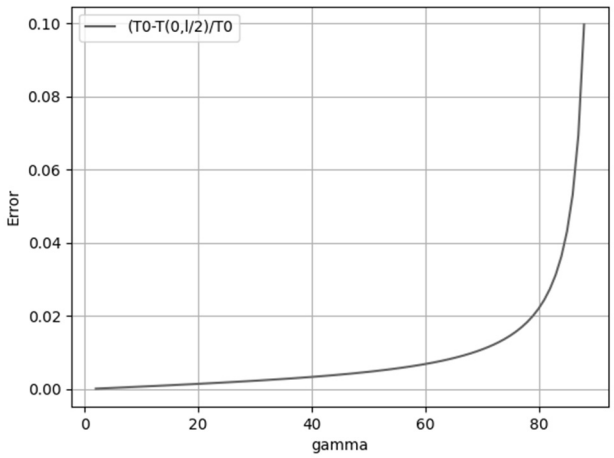


Рис. 6. График относительной ошибки

Fig. 6. Graph of the relative error

На рис. 5 и 6 виден рост абсолютной и относительной ошибки при решении прямой задачи, который может быть связан с несколькими возможными причинами: математическая ошибка из-за неточности модели решения прямой задачи или неточности, связанной с типом данных с плавающей точкой.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

При решении обратной кинематической задачи для подобных сред справедлива следующая формула обращения (12) [14], связывающая $n_1(z)$, t, α и l [15]:

$$n_1(z(\alpha)) = \frac{\cos^2\alpha}{2l}\,\frac{d\left(\sin\alpha\,(t(\alpha)-t_0(\alpha))\right)}{d\alpha}. \qquad (12)$$

После проведения математических расчетов строится график изменения показателя коэффициента преломления с изменением глубины, затем график (9) зависимости коэффициента преломления от глубины для линеаризованного и точного решения. Коэффициент B был выбран равным –0,08.

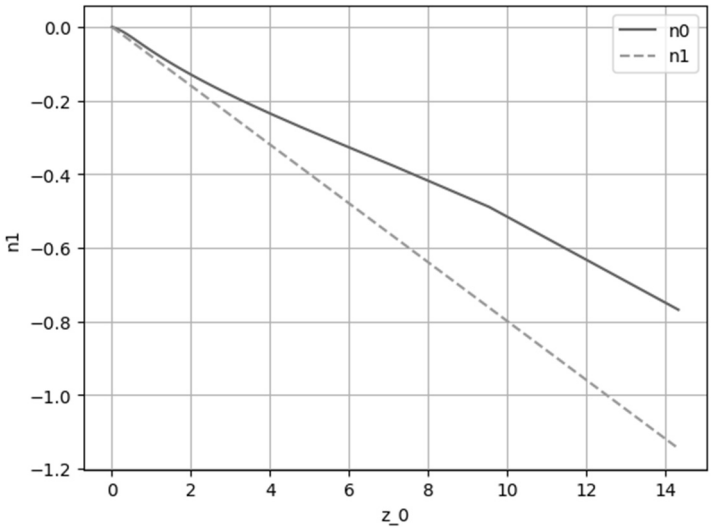


Рис. 7. Зависимость коэффициента преломления от глубины

Fig. 7. Dependence of the refraction coefficient on depth

Показано, что линеаризованное решение отличается от точного вследствие приближения линеаризации. Для оценки качества решения рассчитывается абсолютная ошибка линеаризации при изменении глубины на следующем графике (рис. 8).

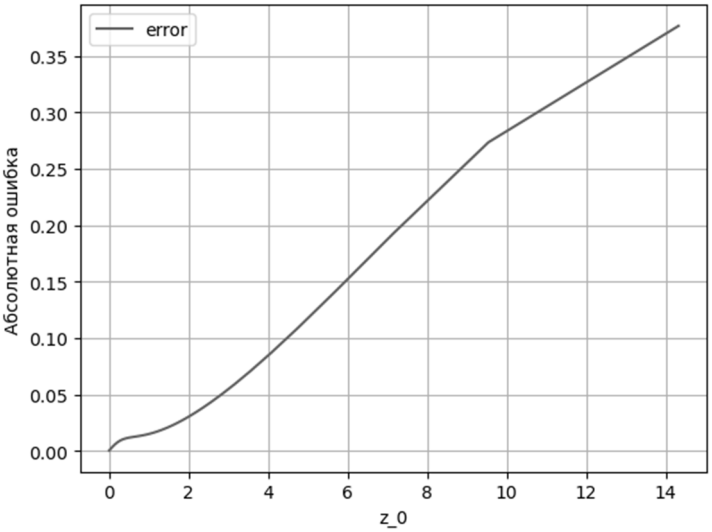


Рис. 8. Абсолютная ошибка линеаризованного решения

*Fig. 8. An a*bsolute error of the linearized solution

Как показано на рис. 8, ошибка начинает расти сильнее с ростом глубины, следовательно, необходимо внести дополнительное регуляризирующее воздействие (например, сглаживание шумов при помощи сплайнов).

4. ПОСТАНОВКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ СКОРОСТИ

Рассматривается постановка с нелинейным изменением скорости распространения сигнала от глубины. Изменение скорости сигнала будет выражаться следующей формулой:

$$V(z) = 1 + 0,02z + \sqrt{0,03z^2}. \tag{13}$$

При решении прямой кинематической задачи для нахождения времени пробега сигнала по лучевой траектории использовали численный метод Рунге – Кутты 4-го порядка в решении интегральных уравнений. На рис. 9 показаны лучевые траектории пробега сигнала при различных углах входа сигнала в среду. На данном этапе необходимо выбрать угол входа сигнала в среду (на графиках обозначается как gamma).

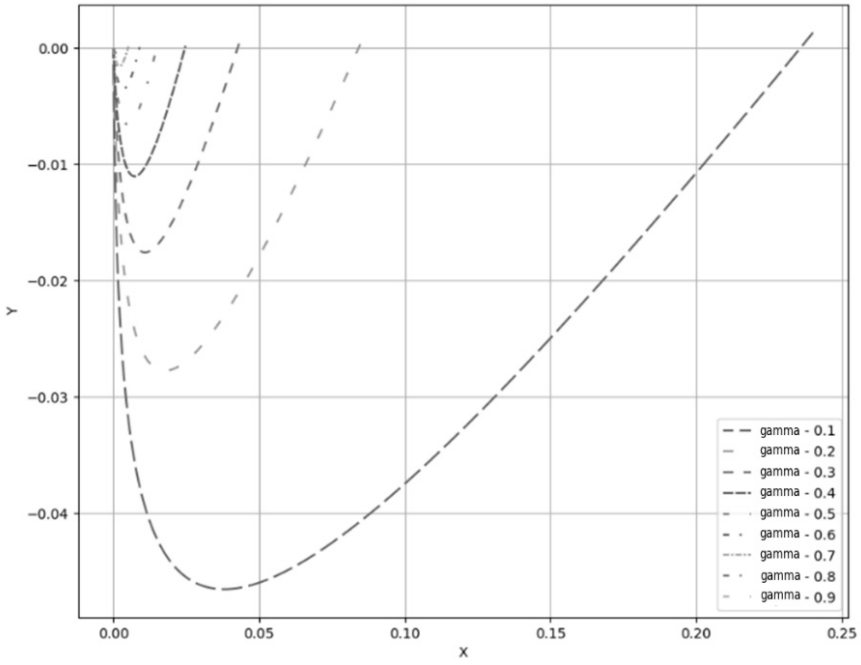


Рис. 9. Лучевые траектории

Fig. 9. Ray trajectories

Для решения ОКЗ угол входа сигнала в среду выбирается равным 0,4. Значение угла взято из соображений наглядности и управляемости, так как при таком значении угла решение получается достаточно устойчивым, но с наличием отклонений, что для подобного рода подходов нормально, особенно без

использования регуляризации. Полученная зависимость коэффициента преломления от глубины представлена на рис. 10.

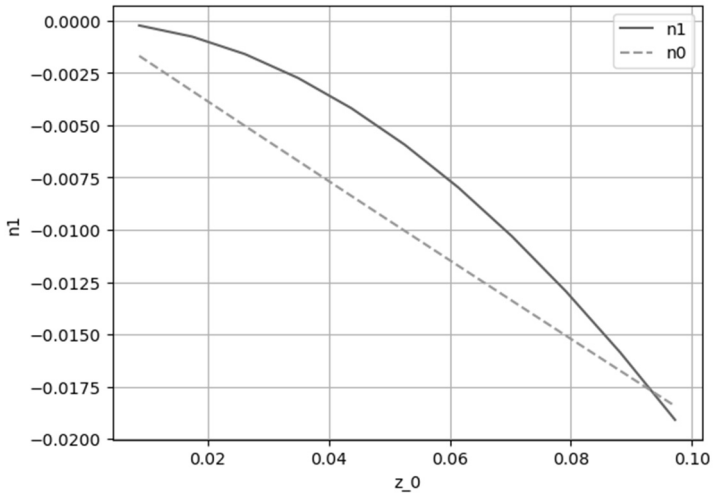


Рис. 10. Зависимость коэффициента преломления от глубины в постановке (13)

Fig. 10. Dependence of the refraction coefficient on depth in formulation (13)

Приведенные на рис. 10 кривые зависимости соотносятся, как и на рис. 7, но сказывается нелинейность скорости распространения, приведенная в (13). Как и в примере с линейной средой, в примере с нелинейной существует ошибка линеаризации, которая накладывается на несоответствие реального скоростного распределения и линеаризованной модели. На рис. 11 приведена зависимость абсолютной ошибки от глубины проникновения сигнала в среду.

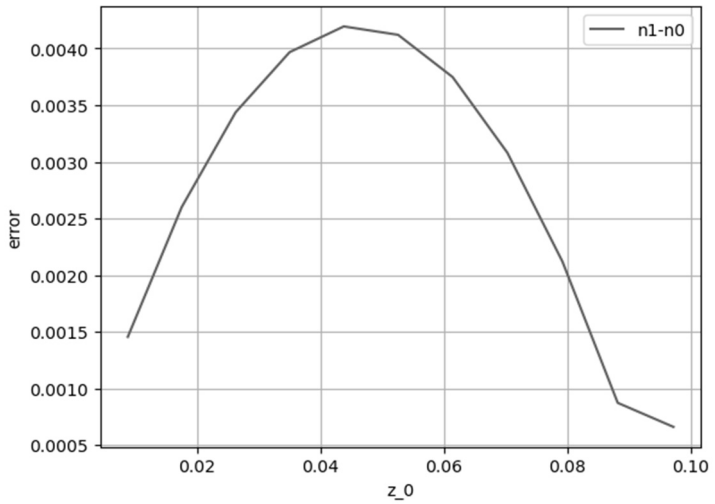


Рис. 11. Абсолютная ошибка

Fig. 11. An absolute error

Как и на рис. 5 и 6, наблюдается ошибка, но с более сложным поведением, причиной которого является группа факторов: изначально заложенная небольшая ошибка при решении прямой задачи, естественная ошибка линеаризации, также возможно влияние типа данных с плавающей точкой (в данном примере при величине ошибки 10^{-4} подобное влияние ощутимо).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе применен метод линеаризации для решения обратной кинематической задачи с использованием рефрагированных и рассеянных волновых сигналов. В отличие от классических подходов, основанных на прямых или отраженных волнах, использование рассеянных волн расширяет применимость метода на вертикально-неоднородные среды, включая волноводные структуры, где волны «запираются» в слое и распространяются с минимальными потерями. Для этой постановки предложена линеаризация функционала Ферма, сопровождаемая анализом ошибок. Показано, что они возрастают с глубиной, что обусловливает необходимость введения регуляризирующих процедур.

На рис. 7, 8 и 10, 11 показано, что линеаризованное решение имеет отклонение от точного решения при фиксированном угле падения α, что связано с ошибкой линеаризации, которая может быть снижена за счет введения регуляризации.

Таким образом, выстроенный с учетом вышесказанного эвристический подход включает два блока.

1. Формулировка постановки задачи с использованием знаний об обратных задачах и физических основах метода решения, позволяющих построить ее приближенное решение на уровне математических представлений и вывести необходимые формулы.

2. Построение вычислительного алгоритма для реализации конкретного решения и создание программного обеспечения.

Задачи неразрушающего контроля естественным образом опираются на данные физических измерений: в зависимости от схемы эксперимента это могут быть проекции объекта либо сигналы, регистрируемые при изменяющихся условиях зондирования. Подобный класс задач встречается повсеместно – от фундаментальных исследований до инженерной практики, что делает их особенно значимыми. И в этой связи особый интерес представляют обширные классы решений – как широко используемых в приложениях, так и перспективных систем наблюдения с учетом их геометрических особенностей и коллективных свойств, отвечающих за векторы (матрицы) измерений.

Полученные результаты оправдывают продолжение этого направления исследований. Особый интерес представляет распространение метода на более сложные формы функции скоростного распределения, анализ устойчивости к помехам и пределов применимости подхода линеаризации (например, через возможность гибридизации данного метода с моделями машинного обучения и использование таких гибридов в задачах с более неоднородными средами).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Машошин А.И.* Практические задачи гидроакустики, решаемые с использованием алгоритмов обработки сигналов, согласованных со средой их распространения (обзор) // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 37–48.

2. *Кузнецова А.В.* Определение скоростной характеристики верхней части сейсмического разреза // Геофизические методы исследования Земли и ее недр: материалы X Международной научно-практической конкурс-конференции молодых специалистов «Геофизика-2015». – СПб., 2016. – С. 68–75.

3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. – М.: Наука, 1968. – 802 с.

4. *Lavrentev M.M., Zerkal S.M., Trofimov O.E.* Computer modeling in tomography and ill-posed problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2001. – 128 p.

5. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – Новосибирск: Наука, 1980. – 286 с.

6. *Белоносова А.В. Алексеев А.С.* Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмики для двумерной непрерывно-неоднородной среды // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. – М.: Наука, 1967. – С. 137–154.

7. *Машошин А.И., Мельканович В.С., Тимофеев В.Н.* Алгоритм определения глубины погружения источника звука с использованием донной линейной антенны // Гироскопия и навигация. – 2025. – Т. 33, № 1 (128). – С. 146–158.

8. *Trofimov O.E.* On the problem of reconstruction of a function of three variables from its integrals along straight lines crossing a specified curve // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 1991. – N 5. – P. 56–62.

9. *Белоусова О.Н., Зеркаль С.М., Шапошникова Е.В.* Вычислительная томография при нетрадиционных схемах наблюдений. – Новосибирск: Сибстрин, 2010. – 160 с.

10. *Шапошникова Е.В.* Вычислительные методы трехмерной томографической реконструкции в конусе лучей: автореф. дис. … канд. техн. наук. – Новосибирск, 2006. – 18 с.

11. *Бурмин В.Ю.* Обратные кинематические задачи для неоднородных сред // Численные методы в сейсмических исследованиях. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 106–111.

12. *Бурмин В.Ю.* Методы численного решения обратных кинематических задач сейсмики для вертикально-неоднородных сред: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 1987.

13. *Брехорских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – М.: Наука, 2007. – 369 с.

14. *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 252 с.

15. *Berkovich L.M.* The method of an exact linearization of n-order ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 3 (3–4). – P. 341–350.

Зеркаль Сергей Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной техники, Новосибирский государственный технический университет. Основное направление научных исследований – численные методы и методы искусственного интеллекта в прикладных задачах физики, акустики, сейсмики и неразрушающего контроля. Имеет более 50 печатных работ. E-mail: zerkal@corp.nstu.ru

Путята Евгений Александрович, аспирант кафедры вычислительной техники, Новосибирский государственный технический университет. Основное направление научных исследований – методы искусственного интеллект для решения прикладных задач. E-mail: putyata.2018@stud.nstu.ru

Zerkal Sergey M., D.Sc. (Eng.), Professor at the Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. His main research interests focus on numerical methods and artificial intelligence techniques applied to problems in physics, acoustics, seismology, and non-destructive testing. He has authored more than 50 publications. E-mail: zerkal@corp.nstu.ru

Putyata Evgeny A., Ph.D. Student, Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. His main research interests focus on artificial intelligence methods for solving applied problems. E-mail: putyata.2018@stud.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-23-38

Numerical solution of the inverse kinematic problem in a linearized formulation for inhomogeneous media using refractive and scattered waves[*]

S.M. ZERKAL[a], *E.A. PUTYATA*[b]

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[a] *zerkal@corp.nstu.ru* [b] *putyata.2018@stud.nstu.ru*

Abstract

The inverse kinematic problem for vertically inhomogeneous media, in which wave propagation velocity depends only on depth, has been investigated using refracted and scattered wave signals. Unlike classical formulations of inverse kinematic problems, which primarily focus on direct or reflected waves, this study centers on scattered waves – those whose trajectories have been altered due to interaction with local medium inhomogeneities. This approach extends the applicability of the method to media exhibiting waveguide effects, where waves are "trapped" within a layer and propagate over long distances with minimal losses. A computational algorithm based on the linearization of the Fermat functional has been developed, enabling determination of the velocity distribution $V(z)$ in such media. For the direct problem, both analytical solutions (in the linear case $V(z) = 1 + Bz$) and numerical methods (for nonlinear cases), including the 4th-order Runge-Kutta method, have been applied. The implemented solution demonstrated the feasibility of reconstructing the medium velocity distribution from measured wave arrival times, while also revealing errors associated with the inaccuracy of linearization. The analysis showed that linearization error increases with depth, which, in turn, may be compensated by introducing additional regularization procedures – for example, noise smoothing using splines. The obtained results may be of interest for solving problems in seismology, acoustic sounding, and non-destructive testing. Prospects for further research are primarily associated with transitioning to more complex medium models, applying more advanced regularization techniques, and hybridizing this approach with artificial intelligence models – all of which open prospects for expanding the method's applicability and resolution capability.

Keywords: inverse kinematic problem, refractive waves, scattering, computer modeling, linearization of the Fermat functional, waveguide media, numerical methods, vertically inhomogeneous media

REFERENCES

1. Mashoshin A.I. Prakticheskie zadachi gidroakustiki, reshaemye s ispol'zovaniem algoritmov obrabotki signalov, soglasovannykh so sredoi ikh rasprostraneniya (obzor) [Underwater acoustics problems solving with using matched field processing]. *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika = Fundamental and Applied Hydrophysics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 37–48.

2. Kuznetsova A.V. [Determination of velocity characteristics of a near surface seismic section by diving waves method]. *Geofizicheskie metody issledovaniya Zemli i ee nedr* [Geophysical methods of survey the Earth and its subsoil]. Materials of the X International scientific and technical conference-competition of young specialists "Geophysics-2015", St. Petersburg, 2016, pp. 68–75. (In Russian).

3. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki*. T. 1 [A course of higher mathematics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 802 p.

4. Lavrentev M.M., Zerkal S.M., Trofimov O.E. *Computer modeling in tomography and ill-posed problems*. Utrecht, Boston, VSP, 2001. 128 p.

5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 286 p.

[*] *Received 10 March 2026.*

6. Belonosova A.V. Alekseev A.S. Ob odnoi postanovke obratnoi kinematicheskoi zadachi seismiki dlya dvumernoi nepreryvno-neodnorodnoi sredy [On one formulation of the inverse kinematic problem of seismology for a two-dimensional continuously inhomogeneous medium]. *Nekotorye metody i algoritmy interpretatsii geofizicheskikh dannykh* [Some methods and algorithms for interpretation of geophysical data]. Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 137–154.

7. Mashoshin A.I., Mel'kanovich V.S., Timofeev V.N. Algoritm opredeleniya glubiny pogruzheniya istochnika zvuka s ispol'zovaniem donnoi lineinoi antenny [Algorithm for determining the depth of a sound source using a bottom linear antenna]. *Giroskopiya i navigatsiya = Gyroscope and Navigation*, 2025, vol. 33, no.1 (128), pp. 146–158.

8. Trofimov O.E. On the problem of reconstruction of a function of three variables from its integrals along straight lines crossing a specified curve. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 1991, no. 5, pp. 56–62.

9. Belousova O.N., Zerkal S.M., Shaposhnikova E.V. *Vychislitel'naya tomografiya pri netraditsionnykh skhemakh nablyudenii* [Computational tomography under non-traditional observation schemes]. Novosibirsk, Sibstrin Publ., 2010. 160 p.

10. Shaposhnikova E.V. *Vychislitel'nye metody trekhmernoi tomograficheskoi rekonstruktsii v konuse luchei*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Computational methods of three-dimensional tomographic reconstruction in a cone of rays]. Novosibirsk, 2006. 18 p.

11. Burmin V.Yu. Obratnye kinematicheskie zadachi dlya neodnorodnykh sred [Inverse kinematic problems for inhomogeneous media]. *Chislennye metody v seismicheskikh issledovaniyakh* [Numerical methods in seismic research]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, pp. 106–111.

12. Burmin V.Yu. *Metody chislennogo resheniya obratnykh kinematicheskikh zadach seismiki dlya vertikal'no-neodnorodnykh sred*. Avtoref. diss. dokt. fiz.-mat. nauk [Methods of numerical solution of inverse kinematic problems of seismology for vertically inhomogeneous media. Author's abstract of Dr. phys. and math. sci. diss.]. Moscow, 1987.

13. Brekhorskikh L.M., Lysanov Yu.P. *Teoreticheskie osnovy akustiki okeana* [Theoretical foundations of ocean acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 369 p.

14. Romanov V.G. *Obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii* [Inverse problems for differential equations]. Novosibirsk, NSU Publ., 1973. 252 p.

15. Berkovich L.M. The method of an exact linearization of n-order ordinary differential equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1996, vol. 3 (3–4), pp. 341–350.

Для цитирования:

Зеркаль С.М., Путята Е.А. Численное решение обратной кинематической задачи в линеаризованной постановке для неоднородных сред с использованием рефрагированных и рассеянных волн // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 3 (103). – С. 23–38. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-23-38.

For citation:

Zerkal S.M., Putyata E.A. Chislennoe reshenie obratnoi kinematicheskoi zadachi v linearizovannoi postanovke dlya neodnorodnykh sred s ispol'zovaniem refragirovannykh i rasseyannykh voln [Numerical solution of the inverse kinematic problem in a linearized formulation for inhomogeneous media using refractive and scattered waves]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 3 (103), pp. 23–38. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-23-38.