ISSN 2782-2001
Системы анализа
и обработки данных
том 103, № 3, 2026, с. 57–74

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data
processing systems
Vol. 103, No. 3, 2026, pp. 57–74

ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

INFORMATION
TECHNOLOGIES
AND TELECOMMUNICATIONS

УДК 519.246.8

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-57-74

Последовательное применение метода Прони для повышения точности прогнозирования временных рядов*

И.А. КУЗЬМИНЫХ[1,a], А.Б. ГАВРИЛОВ[1,b], А.С. ТОЛСТИКОВ[2,c], В.М. ТИССЕН[2,d]

[1] *РФ, 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет*
[2] *РФ, 630004, г. Новосибирск, пр. Димитрова, 4, Западно-Сибирский филиал ФГУП ВНИИФТРИ*

[a] *i.kuzminyx.2019@stud.nstu.ru* [b] *a.gavrilov@corp.nstu.ru* [c] *tolstikov@sniim.ru*
[d] *tissen.ksn@yandex.ru*

Работа посвящена модификации метода Прони для повышения точности прогнозирования колебательных временных рядов. В основе предложенного алгоритма лежит многоэтапный подход: модель последовательно аппроксимирует остаточные компоненты ряда, которые затем интегрируются в итоговую функцию. Модификация была практически применена на задаче прогнозирования временных рядов, в структуре которых доминируют сложные колебательные процессы и гармонические составляющие: параметров вращения Земли, а именно отклонений оси вращения x_p и y_p, по архиву данных Международной службы вращения Земли и систем отсчета (IERS, International Earth Rotation Service) за 2025 год. Сравнительный анализ с исходным методом Прони, а также с прогнозами IERS и ЗСФ ВНИИФТРИ на интервалах 7 и 90 суток показал, что эффективность модификации существенно зависит от заданных условий. Предложенный подход не во всех случаях превосходит существующие решения IERS и ЗСФ ВНИИФТРИ, однако для определенных горизонтов прогнозирования последовательное уточнение модели обеспечивает локальное повышение точности и снижение погрешности прогнозов. Выявленная неоднородность результатов указывает на то, что эффективность последовательного применения метода Прони существенно зависит от заданных параметров модели. Полученные результаты открывают возможности для применения метода в системах автономной навигации спутников. Проведенный анализ позволил обозначить границы применимости текущей модели и сформулировать рекомендации по ее развитию. В частности, обосновывается необходимость перехода от использования статически заданных параметров к разработке механизмов их адаптивной настройки, что позволит стабилизировать результаты метода при изменении характера исходных данных.

* *Статья получена 25 января 2026 г.*

Ключевые слова: прогнозирование, временные ряды, цифровая обработка измерительной информации, авторегрессионные модели, метод Прони, оптимизация параметров алгоритма, гармонический анализ, параметры вращения Земли, отклонение оси вращения Земли, точность прогноза

ВВЕДЕНИЕ

Прогнозирование представляет собой методологическую основу для принятия обоснованных решений в условиях неопределенности. Использование методов прогнозирования в таких областях, как энергетика, транспорт, машиностроение или телекоммуникации, помогает своевременно выявлять потенциальные проблемы, строить производственные планы и рационально распределять ресурсы. Широкий спектр практических задач требует применения различных подходов к прогнозированию, чтобы обеспечить инструменты для работы в самых разных сферах. Во многих прикладных задачах исходные данные представлены в виде временных рядов (ВР), используемых для дальнейшего анализа и прогнозирования.

Для прогнозирования ВР применяется ряд методов: метод наилучшей прямой аппроксимации, метод авторегрессии и модели со скользящим средним (Autoregressive Integrated Moving Average, ARIMA) [1], метод моделей с изменением дисперсии [2], метод моделей с изменяющимся параметром и сезонными компонентами (Seasonal Auto-Regressive Integrated Moving Average, SARIMA) [3], метод сингулярного спектрального анализа (Singular Spectrum Analysis, SSA) [4], фильтрация Калмана, вейвлет-преобразование [5], каждый из которых имеет свои преимущества и ограничения. Несмотря на разнообразие доступных инструментов, выбор подходящего метода зависит от специфики исходных данных и поставленных задач, что делает изучение их особенностей особенно важным для достижения точных прогнозов.

В настоящей статье рассматривается возможность использования метода гармонического разложения Прони как альтернативный подход к прогнозированию. Этот метод предназначен для анализа ВР с колебательными явлениями и предполагает наличие в исходных данных экспоненциально затухающих гармоник и случайных компонент [6]. Реализация метода состоит в определении параметров модели Прони, наилучшим образом аппроксимирующей исходный ВР. После определения параметров модель Прони может быть использована для исследования спектральной структуры ВР, а также для прогнозирования его поведения в будущем. Также метод Прони предоставляет возможность получать и использовать информацию о составляющих ВР в частотной и временной областях.

Возможности подхода исследуются на примере прогнозирования параметров вращения Земли (ПВЗ). Наличие периодических составляющих в сочетании с нестационарным поведением делает задачу прогнозирования ПВЗ особенно сложной. Точные прогнозы ПВЗ критически важны для обеспечения работы спутниковых навигационных систем, преобразования координат между небесной и земной системами отсчета, а также управления орбитальными группировками в периоды отсутствия связи с наземными станциями.

1. ПАРАМЕТРЫ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Параметры вращения Земли представляют собой набор математических величин, определяющих ориентацию мгновенного положения оси вращения Земли в инерциальном звездном пространстве. К ним относятся всемирное время *UT1*, отклонения оси вращения Земли x_p и y_p, параметры прецессии и нутации. В случаях, когда прямые определения всемирного времени невозможны, вычисляется эксцесс длительности суток [7]. Следует отметить, что знание параметров отклонения оси вращения позволяет определить координаты полюса вращения на поверхности Земли. Совокупность данных ПВЗ обеспечивает точную связь между земной и небесной системами отсчета. Объектом исследования настоящей статьи являются ВР, вызываемые перемещениями углового положения северного полюса относительно Международного условного начала (МУН). Временные ряды отклонений оси вращения демонстрируют выраженные колебательные компоненты различной природы: от регулярных годового периода и группы Чандлеровских колебаний с наиболее значимым периодом порядка 1,18 года до высокочастотных суточных и лунных периодов [8].

Изменения ПВЗ, в том числе отклонения оси вращения, формируются под воздействием сложного комплекса геофизических процессов, включающих гравитационное влияние Луны и Солнца, атмосферно-океанические взаимодействия, тектонические движения и перераспределение масс внутри Земли. Существенный вклад также вносят климатические факторы, такие как таяние ледников и глобальный гидрологический цикл, что делает ВР ПВЗ сложными нестационарными сигналами с выраженными колебательными компонентами. Данные о ПВЗ собираются с помощью наземных и спутниковых наблюдений и аккумулируются Международной службой вращения Земли и систем отсчета (International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS) [9]. В базе данных IERS представлены значения полученных из обработки спутниковых и других средств измерений данных ПВЗ с 1962 года с шагом в один день, а также в ежедневном режиме прогнозы со сроками от недели до трех месяцев и до одного года, обновляемые раз в неделю.

Прогнозирование ПВЗ в зависимости от характера решаемых задач проводится на различные глубины. Краткосрочный прогноз с глубиной в 7 суток применяется для решения оперативных задач высокоточной навигации, в которых требуется корректное преобразование координат между небесной и земной системами отсчета. Среднесрочный прогноз, охватывающий период до 90 суток, направлен на обеспечение автономного функционирования космических аппаратов в условиях отсутствия связи с наземными станциями управления. Долгосрочные прогнозы от года и более используются при построении согласующих моделей изменений климата и динамики внутриземных геофизических процессов [10].

2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

В указанных выше источниках, а также в [1, 11] представлен широкий спектр методов прогнозирования, однако в контексте практического применения для ПВЗ целесообразно сосредоточиться на подходах, используемых

профильными организациями, прежде всего IERS [12]. Сравнительный анализ методов прогнозирования ПВЗ традиционно проводится в рамках международных кампаний, координируемых IERS. В ходе указанных кампаний методика, разработанная Западно-Сибирским филиалом Всероссийского научно-исследовательского института физико-технических и радиотехнических измерений (ЗСФ ВНИИФТРИ) [13], продемонстрировала конкурентоспособные результаты по сравнению с альтернативными подходами [14]. В связи с этим для обеспечения объективной оценки качества предлагаемых прогнозов в настоящей работе их результаты сопоставляются с данными, полученными IERS и ЗСФ ВНИИФТРИ.

2.1. МЕТОД АВТОРЕГРЕССИИ И МОДЕЛИ СО СКОЛЬЗЯЩИМ СРЕДНИМ

Для прогнозирования IERS использует комбинированные методы, основанные на статистических моделях авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС), а также на аналитических моделях вращения и полярного движения [12].

Метод авторегрессии скользящего среднего (АРСС) является одним из классических подходов к анализу и прогнозированию ВР. Он сочетает в себе две ключевые компоненты: авторегрессию и скользящее среднее. Математически модель АРСС (p, q) состоит из АР модели порядка p (т. е. количество предыдущих значений ВР, используемых для прогнозирования текущего значения). А также модель АРСС (p, q) представляет СС-модель порядка q (т. е. количество предыдущих ошибок прогнозирования, учитываемых в модели).

Объединяя эти две части, модель АРСС (p, q) принимает вид

$$x_t = c + a_1 x_{t-1} + \ \dots \ + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \ \dots \ + b_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (1)$$

где x_t – текущее значение ряда в момент времени t; c – константа смещения; $a_1, \dots, a_p$ – коэффициенты АР; $b_1, \dots, b_p$ – коэффициенты СС; ε_t – текущая ошибка.

Кроме того, IERS комбинируют модель АРСС с теоретическими моделями колебаний, океанических приливов, свободной нутации ядра и среднее положение ядра. На этой основе строится прогностическая модель IERS. Именно такой подход лежит в основе оперативных прогнозов ПВЗ, выполняемых центрами IERS.

2.2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ АДАПТИВНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ключевое отличие подхода заключается в том, что для построения прогностической модели используются временные интервалы разной протяженности, что позволяет учитывать как медленные, так и быстрые вариации исследуемого процесса. Для трендовых изменений параметры модели оцениваются по данным длиной до 100 лет, тогда как для быстропеременных и сезонных составляющих применяются интервалы от 6 до 40 лет [7]. Такое разделение делает модель адаптивной, поскольку каждая составляющая подстраивается под характер динамики соответствующего диапазона временных

масштабов. Оставшиеся после аппроксимации ВР тригонометрическими моделями остаточные колебания моделируются АР-моделью, что позволяет учитывать компоненты ВР, связанные с атмосферными и океаническими процессами. Модель авторегрессии выглядит следующим образом:

$$X_{pr,i} = X_{rel,0} - X_{pra,0} + X_{pra,i} + T_{pp,i} + T_{trn,i} + T_{sez,i}\,, \qquad (2)$$

где $X_{pr,i}$ – прогноз X на i-й момент времени; $X_{rel,0}$ и $X_{pra,0}$ – начальное наблюдение и его АР-аппроксимация для коррекции смещения; $X_{pra,i}$ – прогноз псевдослучайной составляющей (авторегрессия); $T_{pp,i}$, $T_{trn,i}$ и $T_{sez,i}$ – поправки на океанические приливы, тренд и сезонность соответственно.

Для учета псевдослучайных колебаний $X_{pra,i}$ используется авторегрессионный анализ.

3. МЕТОД ПРОНИ

Метод Прони – численный метод, предложенный французским математиком Гаспаром де Прони в 1795 году для аппроксимации сигнала суммой экспоненциальных функций по нескольким измерениям при решении практической задачи об испарении смеси жидкостей [15]. Важной особенностью исходной формулировки метода было равенство количества гармонических компонент числу доступных отсчетов сигнала, что существенно ограничивало его практическое применение при работе с реальными данными. В последнее время практическое использование метода развивается быстрыми темпами в связи с совершенствованием средств вычислительной техники [16]. Современные модификации этого подхода распространены на модель, в которой слагаемыми ряда являются затухающие синусоиды. Именно такая модель и рассмотрена в настоящей статье.

В основе метода лежит представление исходного сигнала как суммы экспоненциально затухающих синусоид с определенными параметрами: амплитудами, частотами, коэффициентами затухания и фазами:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} A_i \sin\left(f_i t + \theta_i\right) e^{\alpha_i t}\,, \qquad (3)$$

где временная последовательность $\hat{x}(t)$ характеризуется суммой компонент p (часто используется термин «порядок модели p»), параметров A_i, α_i, θ_i и f_i. В выражении (1) A_i – начальные амплитуды в тех же единицах измерения, что и $\hat{x}(t)$; α_i – коэффициенты затухания, с^{-1}; θ_i – начальные фазы, рад; f_i – частоты, Гц.

Аппроксимация отсчетов ВР происходит путем нахождения значений этих параметров. Применение метода основано на предположении, что многие ВР могут быть представлены в виде (3). Такой подход особенно полезен при обработке данных, имеющих выраженную периодическую структуру, в том числе ВР ПВЗ.

Метод Прони обладает высокой точностью при оптимальном задании его параметров. Это свойство особенно актуально в тех областях науки и техники, где требуется точное восстановление функций по экспериментальным данным.

В общем случае метод Прони представляет исходные данные в виде дискретной последовательности

$$x[n] \ \ (n = 1,..., \ N) \tag{4}$$

в виде (3), что является крайне важным свойством метода, состоящего в аппроксимации дискретного ряда непрерывной аналитической функцией. Для последующего анализа и прогнозирования (3) легко преобразуется в дискретную форму подстановкой шага дискретизации Δt:

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{\alpha_i (n-1)\Delta t} \sin\left(f_i (n-1)\Delta t + \theta_i\right). \tag{5}$$

Параметры модели Прони определяются последовательным применением математических приемов, включающих синтез АР-модели, определение корней полинома и решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Метод состоит из трех этапов:

1) определение параметров АР-модели путем решения системы линейных уравнений;

2) формирование из найденных коэффициентов характеристического полинома, определение его корней и расчет по ним частот и коэффициентов затухания соответствующих гармонических компонент;

3) оценка амплитуд и начальных фаз гармонических компонент на основе комплексного представления модели Прони.

В отличие от первоначальной формулировки метода Прони, где количество исходных точек данных лишь незначительно превышало порядок модели, современные реализации метода способны эффективно обрабатывать объемы данных, существенно превосходящие задаваемый порядок системы.

4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ ПРОНИ

Метод позволяет разложить сложные ВР на простые гармонические составляющие, что значительно упрощает процесс анализа физических процессов, а также их поведение в будущем. Основные этапы анализа.

1. ***Выбор исходных данных***. Определение источника данных и содержательные характеристики ВР (например, финансовые показатели, метеорологические данные и т. д.).

2. ***Выбор параметров метода Прони***. Определение ключевых параметров, которые будут использоваться: длина N исходного сигнала (выбор размера окна для анализа), порядок модели p Прони (определение числа гармонических составляющих, которые будут извлечены из ВР, так как это важно для

обеспечения баланса между точностью и сложностью модели), глубина прогноза M (длина прогнозируемого отрезка).

3. ***Применение метода***. После подготовки данных и выбора параметров можно переходить к непосредственному применению метода. Прогнозируемое значение в момент времени $N+M$ вычисляется как сумма значений гармонических компонент:

$$\hat{x}[N+M] = \sum_{i=1}^{p} A_i e^{\alpha_i (N+M)\Delta t} \sin\left(f_i (N+M)\Delta t + \theta_i\right). \quad (6)$$

Прогнозирование ВР методом Прони включает в себя решение задачи определения длины временной выборки исходной функции, подлежащей анализу. При отсутствии априорных данных об оптимальной длине выборки ее значение определяется опытным путем. Наилучший порядок модели также находится на основе вычислительных экспериментов.

5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОНИ

В стремлении повысить точность прогнозирования авторами был предложен подход, основанный на концепции последовательного применения метода Прони (ППМП). После выполнения стандартных этапов метода Прони с рекомендуемыми параметрами [17] в конце исходного ряда выделяются короткие сегменты и соответствующие участки модели. Затем определяется разница между этими фрагментами, и разностный ряд аппроксимируется новой моделью с помощью метода Прони. Полученная последовательность интегрируется в ранее построенную модель путем суммирования, что повышает качество приближения.

Эта процедура показана на рис. 1, где выделен короткий интервал $N1 - N2$ и соответствующая разность между исходным ВР и его аппроксимацией.

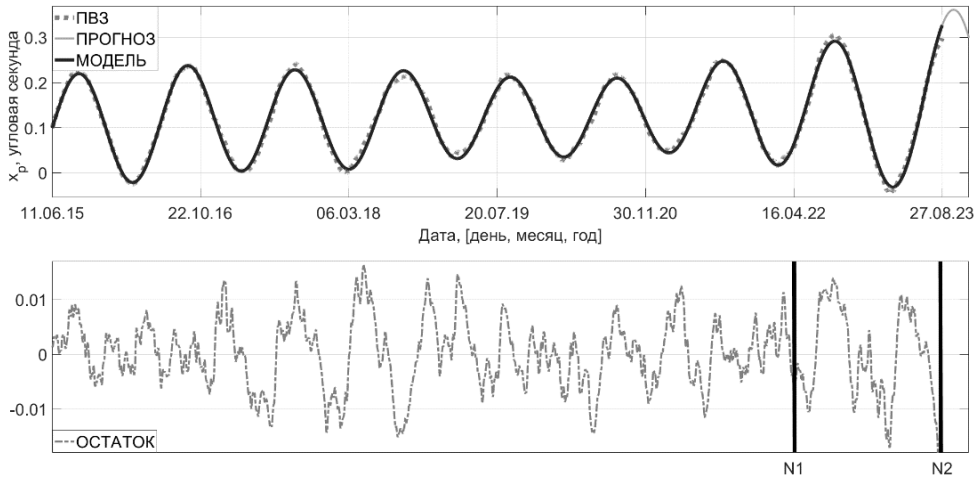


Рис. 1. Первичный этап обработки и выделение короткого фрагмента $N1 - N2$

Fig. 1. Primary stage of processing and selection of a short fragment $N1 - N2$

На рис. 2 показан остаток на интервале $N1 - N2$ и результат его аппроксимации, построенной повторным применением метода Прони для экстраполяции короткого сегмента.

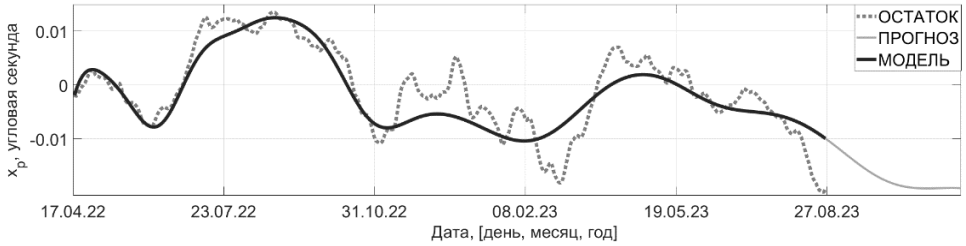


Рис. 2. Полученный остаток $N1 - N2$ и его аппроксимация

Fig. 2. Resulting remainder $N1 - N2$ and its approximation

Рисунок 3 отражает результат применения ППМП. На графике видно, что исходный прогноз, полученный методом Прони (см. рис. 1), уже в начале интервала прогнозирования демонстрирует заметное расхождение с фактическими значениями. С помощью ППМП удалось существенно увеличить точность прогноза по сравнению с результатами после выполнения стандартных этапов метода Прони.

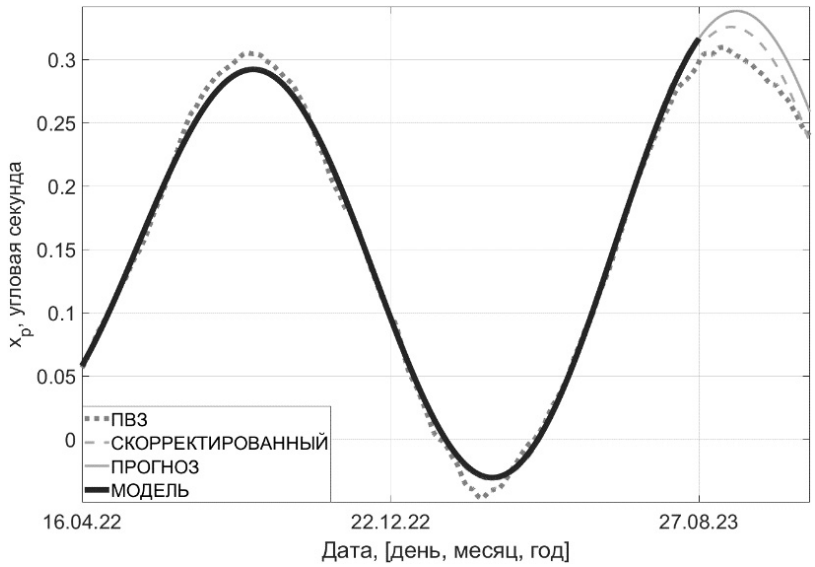


Рис. 3. Результат повторной обработки

Fig. 3. Result of repeated processing

Для подтверждения работоспособности метода ППМП необходимо убедиться в сохранении его свойств для разных временных отрезков на протяжении всего временного ряда, поведение которого в будущем представляет интерес.

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В исследовании использованы данные вариации отклонений оси вращения Земли x_p и y_p за период с 03.01.2025 по 27.06.2025. Прогноз проводился через каждые 7 дней. Параметры алгоритма были заданы в соответствии с рекомендациями на основе многочисленных экспериментов и исследований [17]. Порядок модели Прони (6) задается отдельно для каждого ВР: $p = 13$ для x_p и $p = 8$ для y_p. Размер исходной выборки $N = 3000$ суток. Длина разностного ряда $N_1 - N_2 = 500$ суток. Глубина прогнозирования $M = 7$ и 90 суток (краткосрочные и долгосрочные прогнозы).

В исследованиях по прогнозированию ВР применяются различные метрики точности [18], включая среднюю абсолютную ошибку (САО), среднюю абсолютную процентную ошибку (САПО), среднеквадратическую ошибку (СКО) и другие. Поскольку априори нет оснований для выбора какой-либо конкретной метрики, выбрана одна, которая широко использовалась предыдущими исследователями в этой области.

Среднеквадратическая погрешность (СКП) определяется как квадратный корень из среднего значения квадратов разностей между прогнозируемыми и фактическими значениями:

$$\text{СКП} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{x}_i\right)^2}\ , \tag{7}$$

где x_i – фактическое значение, $\hat{x}_i$ – прогнозируемое значение, n – количество прогнозируемых отсчетов.

7. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В табл. 1 и 2 представлены сравнительные характеристики точности прогнозирования ПВЗ классическим методом Прони, модифицированным методом Прони и методом авторегрессии – модели со скользящим средним (IERS). В табл. 1 представлены показатели СКП при среднесрочном прогнозировании. Оценка проводилась по всей длине прогноза: по отсчетам с 1-го по 90-й на основе формулы (7).

Таблица 1

Table 1

Глубина прогноза *M* = 90

Forecasting depth *M* = 90

№ п/п	Дата начала прогноза	Метод прогнозирования	x_p	y_p
			СКП, угловая миллисекунда	
1	03.01.25	Метод Прони	20,5	6,9
2		ППМП	20,5	4,9
3		IERS	0,3	6,6
4	10.01.25	Метод Прони	13,5	8,1
5		ППМП	13,1	6,2
6		IERS	19,0	6,6

Окончание табл. 1

End of the Tab. 1

№ п/п	Дата начала прогноза	Метод прогнозирования	x_p	y_p
			СКП, угловая миллисекунда	
7	17.01.25	Метод Прони	8,4	10,1
8		ППМП	7,7	8,2
9		IERS	16,2	7,2
10	24.01.25	Метод Прони	8,2	12,4
11		ППМП	7,4	10,2
12		IERS	20,0	11,6
13	31.01.25	Метод Прони	8,0	14,7
14		ППМП	7,0	12,3
15		IERS	16,6	10,9
…				
40	04.04.25	Метод Прони	62,4	6,2
41		ППМП	8,2	6,0
42		IERS	4,5	7,2
43	11.04.25	Метод Прони	70,6	4,2
44		ППМП	9,0	4,0
45		IERS	6,0	8,3
46	18.04.25	Метод Прони	83,3	3,2
47		ППМП	11,1	2,6
48		IERS	4,8	7,7
…				
64	30.05.25	Метод Прони	11,5	8,0
65		ППМП	9,9	4,9
66		IERS	11,6	3,9
67	06.06.25	Метод Прони	21,4	7,2
68	06.06.25	ППМП	15,4	4,7
69		IERS	12,6	2,4
70	13.06.25	Метод Прони	21,1	7,1
71		ППМП	17,9	5,0
72		IERS	13,4	2,9
73	20.06.25	Метод Прони	26,2	6,6
74		ППМП	20,9	4,4
75		IERS	13,7	4,0
76	27.06.25	Метод Прони	28,5	5,7
77		ППМП	23,0	2,8
78		IERS	14,7	5,3
	Среднее значение	Метод Прони	10,8	11,1
		ППМП	9,6	8,8
		IERS	9,3	8,6

В табл. 2 приводится сравнение СКП краткосрочных прогнозов и полученных ранее указанными способами. Оценка выполнялась по всей длине краткосрочного прогноза (по отсчетам с 1-го по 7-й прогноз).

Таблица 2

Table 2

Глубина прогноза $M = 7$

Forecasting depth $M = 7$

№ п/п	Дата начала прогноза	Метод прогнозирования	x_p	y_p
			СКП, угловая миллисекунда	
1	03.01.25	Метод Прони	7,3	2,2
2		ППМП	6,4	0,6
3		IERS	1,3	0,2
4		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,2	1,7
5	10.01.25	Метод Прони	6,8	1,4
6		ППМП	4,9	1,0
7		IERS	2,9	1,5
8		ЗСФ ВНИИФТРИ	4,3	2,5
9	17.01.25	Метод Прони	3,5	1,7
10		ППМП	2,9	1,3
11		IERS	3,8	0,8
12		ЗСФ ВНИИФТРИ	7,2	2,5
13	24.01.25	Метод Прони	3,6	1,0
14		ППМП	2,5	1,0
15		IERS	3,9	0,7
16		ЗСФ ВНИИФТРИ	8,1	0,3
17	31.01.25	Метод Прони	2,9	1,4
18		ППМП	2,2	1,4
19		IERS	3,6	2,1
20	31.01.25	ЗСФ ВНИИФТРИ	0,7	0,9
…				
65	25.04.25	Метод Прони	2,8	3,1
66		ППМП	1,0	2,0
67		IERS	0,6	0,9
68		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,4	1,2
69	02.05.25	Метод Прони	4,7	1,4
70		ППМП	3,2	0,4
71		IERS	0,7	0,8
72		ЗСФ ВНИИФТРИ	0,7	0,6
73	09.05.25	Метод Прони	4,7	3,0
74		ППМП	4,1	1,7
75		IERS	0,5	0,4
76		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,6	1,0
…				
89	06.06.25	Метод Прони	8,3	5,3
90		ППМП	6,1	2,4
91		IERS	0,8	0,5
92		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,2	1,0
93	13.06.25	Метод Прони	4,7	5,7
94		ППМП	2,2	3,3
95		IERS	2,0	0,8
96		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,9	1,5

Окончание табл. 2

End of the Tab. 2

№ п/п	Дата начала прогноза	Метод прогнозирования	x_p	y_p
			СКП, угловая миллисекунда	
97	20.06.25	Метод Прони	2,1	5,7
98		ППМП	1,7	4,2
99		IERS	1,1	0,8
100		ЗСФ ВНИИФТРИ	1,2	1,4
101	27.06.25	Метод Прони	5,1	3,9
102		ППМП	1,4	3,5
103		IERS	1,6	0,8
104		ЗСФ ВНИИФТРИ	0,5	1,6
	Среднее значение	Метод Прони	4,6	4,7
		ППМП	3,2	2,3
		IERS	1,5	0,8
		ЗСФ ВНИИФТРИ	2,0	1,3

Как следует из данных табл. 2, ППМП привело к снижению СКП относительно исходной реализации метода Прони. На рис. 4–7 визуализирована динамика прогнозирования отклонений оси вращения x_p и y_p, рассчитанных как разность между последними точками прогноза (90 и 7) и фактическими значениями, в соответствии с выражением

$$\delta x = \left| \hat{x} - x \right| . \tag{8}$$

Оценки выполнены для интервалов прогнозирования 7 и 90 суток за период с 03.01.25 по 27.06.25.

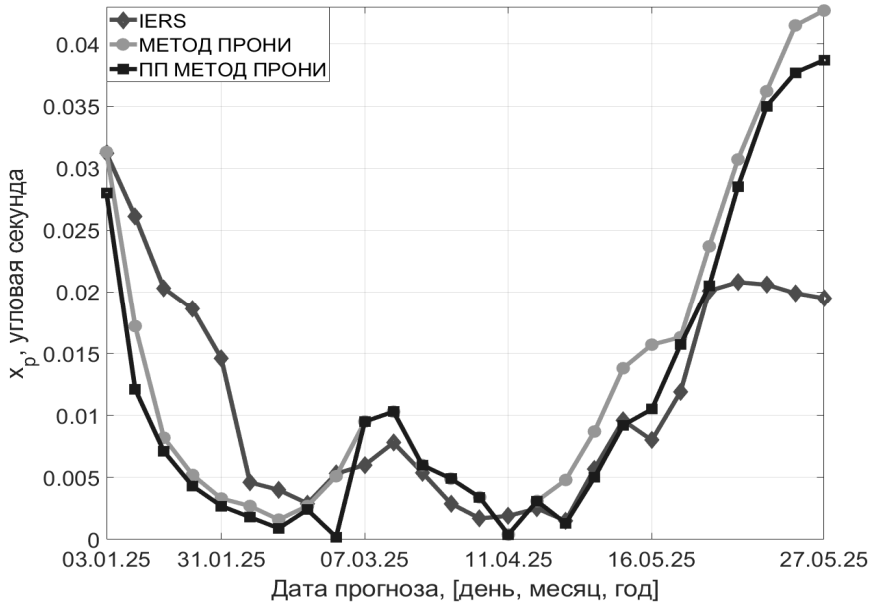


Рис. 4. Сравнение отклонений от истинных значений x_p при глубине $M = 90$

Fig. 4. Comparison of deviations from true values x_p depth $M = 90$

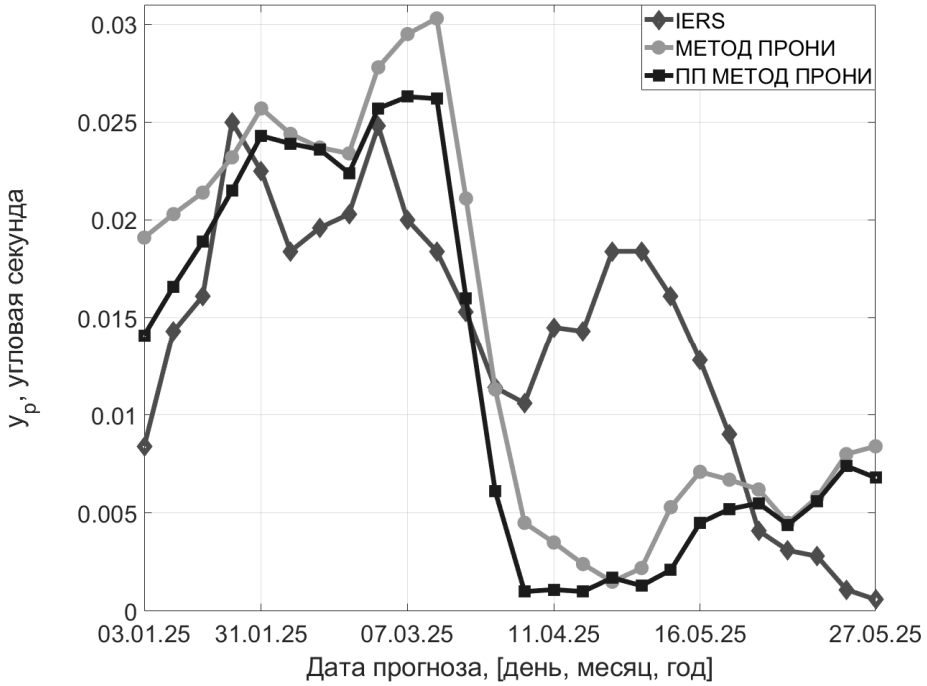


Рис. 5. Сравнение отклонений от истинных значений y_p при глубине $M = 90$

Fig. 5. Comparison of deviations from true values y_p depth $M = 90$

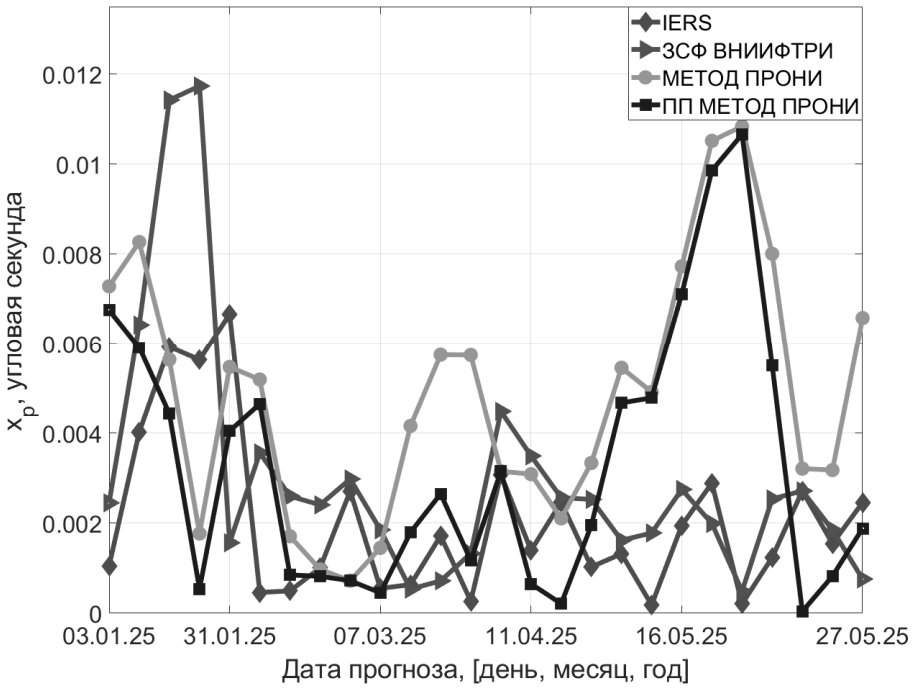


Рис. 6. Сравнение отклонений от истинных значений x_p при глубине $M = 7$

Fig. 6. Comparison of deviations from true values x_p depth $M = 7$

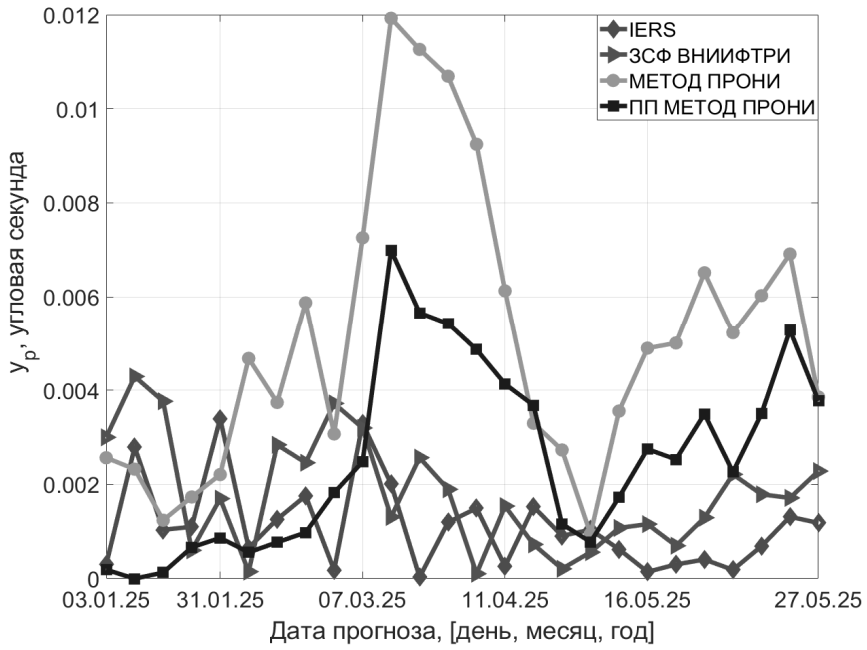


Рис. 7. Сравнение отклонений от истинных значений y_p при глубине $M = 7$

Fig. 7. Comparison of deviations from true values y_p depth $M = 7$

Результаты исследования подтверждают эффективность предложенной модификации метода: разработанный на ее основе алгоритм демонстрирует существенное повышение точности прогнозирования по сравнению с исходной реализацией метода Прони. Однако сравнение с прогнозами профильных организаций показывает нестабильность результатов применения метода ППМП на протяжении всего временного ряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования разработан и апробирован алгоритм последовательного применения метода Прони для прогнозирования временных рядов.

Экспериментальная проверка эффективности реализации представленного метода выполнена на временных рядах вариаций отклонений оси вращения x_p и y_p в сравнении с исходным методом Прони и прогнозами профильных организаций (IERS, ЗСФ ВНИИФТРИ). Установлено, что предложенная модификация позволяет достичь СКП на 50 % ниже по сравнению с классической реализацией метода Прони для x_p и на 30 % ниже для y_p при долгосрочных прогнозах (см. табл. 1, рис. 4, 5), а также на 60 % ниже по сравнению с классической реализацией метода Прони для x_p и на 30 % ниже для y_p при краткосрочных прогнозах (см. табл. 2, рис. 6). Однако проведенное сравнение выявило более высокую точность прогнозов, предоставляемых IERS, особенно при глубине прогноза $M = 7$, из чего можно сделать вывод, что долгосрочные прогнозы ППМП более конкурентоспособны, что важно для автономной

работы спутниковых группировок. Следует отметить, что в исходном временном ряду были выявлены отрезки, для которых наблюдается значительное снижение погрешности прогнозов ППМП отклонений оси вращения x_p (рис. 4) в интервале с 10.01.25 до 14.02.25, а для отклонений оси вращения y_p (рис. 5) в интервале с 04.04.25 до 16.05.25 в сравнении с другими методами.

Проведенное исследование раскрыло определенные ограничения применения статически заданных параметров алгоритма ППМП: на участках с выраженной сменой тенденций развития временного ряда, а именно при переходе от восходящего тренда к нисходящему и наоборот, наблюдается систематическое снижение точности прогнозов.

Предложенный подход может быть применен для анализа временных рядов различной физической природы, содержащих колебательные компоненты. Однако для каждого конкретного прогноза требуется отдельное исследование сочетания параметров алгоритма, включая порядок модели. Использование фиксированных параметров алгоритма не позволяет достичь оптимальных результатов прогнозирования на всех временных горизонтах. Наблюдаемые отклонения в точности прогнозов свидетельствуют о том, что текущие параметры модели не являются универсальными для всего спектра решаемых задач. Полученные результаты указывают на необходимость разработки адаптивных механизмов настройки параметров алгоритма. Дальнейшее развитие метода будет сосредоточено на разработке и апробации версий алгоритма, способных автоматически настраивать его параметры в соответствии с изменяющимся содержанием исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бокс Дж.*, *Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: прогноз и управление. Вып. 1. – М.: Мир, 1974. – 406 с.

2. *Буре В.М., Плахотник С.В.* Адаптивные методы прогнозирования временных рядов в среде MATLAB // Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB: труды Всероссийской научной конференции. – СПб., 2007. – С. 1363–1370.

3. SARIMA modelling approach for forecasting of traffic accidents / N. Deretić, D. Stanimirović, M.A. Awadh, N. Vujanović, A. Djukić // Sustainability. – 2022. – Vol. 14, N 8. – P. 4403.

4. *Wang C., Zhang H., Ma P.* Wind power forecasting based on singular spectrum analysis and a new hybrid Laguerre neural network // Applied Energy. – 2020. – Vol. 259. – P. 114139.

5. *Li X., Tang P.* Stock index prediction based on wavelet transform and FCD-MLGRU // Journal of Forecasting. – 2020. – Vol. 39 (8). – P. 1229–1237.

6. *Gong J., Liu S.* A harmonic and interharmonic detection method for power systems based on enhanced SVD and the Prony algorithm // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13 (13). – P. 7558.

7. High precision prediction of universal time based on 100-year data / V.M. Tissen, A.S. Tolstikov, A.Y. Balakhnenko, Z.M. Malkin // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52 (12). – P. 1249–1255.

8. Исследование основных составляющих в движении полюса Земли / М.В. Воротков, В.Л. Горшков, Н.О. Миллер, Е.Я. Прудникова // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. – 2002. – № 216. – С. 406–414.

9. International Earth Rotation and Reference Systems Service. – URL: http://www.iers.org/iers/products (accessed: 29.10.2025).

10. *Тиссен В.М.* Долгосрочное прогнозирование изменений климата по вариациям скорости вращения Земли // Метрология времени и пространства: материалы XI Международного симпозиума, Менделеево, 27–29 сентября 2023 г. – Менделеево, 2023. – С. 170–173.

11. *Montgomery D.C., Jennings C.L., Kulahci M.* Introduction to time series analysis and forecasting. – John Wiley & Sons, 2015.

12. IERS Annual Report 2018 / ed. by W.R. Dick, D. Thaller; International earth rotation and reference systems service, Central Bureau. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2020. – 207 p. – ISBN 978-3-86482-136-3.

13. *Тиссен В.М., Толстиков А.С., Симонова Г.В.* Прогнозирование параметров вращения Земли с помощью адаптивных гармонических моделей // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Т. 25, № 4. – С. 238–245.

14. *Petit G, Luzum B.* IERS conventions 2010. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. – 179 p. – (IERS Technical Note; 36).

15. *Марпл С.Л. (мл.).* Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

16. Advanced computational methods for modeling, prediction and optimization – a review / J. Krzywanski, M. Sosnowski, K. Grabowska, A. Zylka, L. Lasek, A. Kijo-Kleczkowska // Materials. – 2024. – Vol. 17 (14). – P. 3521.

17. *Gavrilov A.B., Ipatiev V.A., Kuzminykh I.A.* Application of Prony's method for predicting the earth rotation parameters // 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). – IEEE, 2024. – P. 1890–1893.

18. *Малкин З.М., Тиссен В.М.* Сравнение различных оценок точности прогноза параметров вращения земли // Астрономический журнал. – 2022. – Т. 99, № 1. – С. 70–74.

Кузьминых Илья Александрович, аспирант кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – анализ и прогнозирование временных рядов. E-mail: i.kuzminyx.2019@stud.nstu.ru

Гаврилов Алексей Борисович, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – метрология, навигация, анализ и прогнозирование временных рядов. E-mail: a.gavrilov@corp.nstu.ru

Толстиков Александр Сергеевич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник отдела «Государственная служба времени, частоты и определения параметров вращения Земли» Западно-Сибирского филиала ФГУП ВНИИФТРИ. Профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий. Профессор кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Имеет более 100 печатных работ. Основное направление научных исследований – метрология, навигация. E-mail: tolstikov@sniim.ru

Виктор Мартынович Тиссен, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Западно-Сибирского филиала ФГУП ВНИИФТРИ. Имеет более 70 печатных работ. Основное направление научных исследований – метрология, навигация. E-mail: tissen.ksn@yandex.ru

Kuzminykh Ilya A., postgraduate student at the Department of Automated Control Systems, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on analysis and forecasting of time series. E-mail: i.kuzminyx.2019@stud.nstu.ru

Gavrilov Alexey B., PhD (Eng.), assistant professor of the Department of Automation at Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on metrology, navigation, analysis and forecasting of time series. E-mail: a.gavrilov@corp.nstu.ru

Tolstikov Alexander S., D.Sc. (Eng.), leading researcher at the Department "State Service of Time, Frequency and Determination of the Parameters of the Earth's Rotation", West Siberian Branch of the Federal State Unitary Enterprise VNIIFTRI. Professor at the Department of Special Devices, Innovation and Metrology, Siberian State University of Geosystems and Technologies. Professor at the Department of Data Collection and Processing Systems, Novosibirsk State Technical University. He has more than 100 publications. His research interests are currently focused on metrology, satellite navigation. E-mail: tolstikov@sniim.ru

Tissen Viktor M., PhD (Eng.), Senior Researcher, West Siberian Branch of the Federal State Unitary Enterprise VNIIFTRI. He has more than 70 publications. His research interests are currently focused on metrology, satellite navigation. E-mail: tissen.ksn@yandex.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-57-74

Sequential application of the Prony's method for improved time series forecasting accuracy[*]

I.A. KUZMINYKH[1,a], *A.B. GAVRILOV*[1,b], *A.S. TOLSTIKOV*[2,c], *V.M. TISSEN*[2,d]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marks Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation*

[2] *West Siberian Branch of the Russian Metrological Institute of Technical Physics and Radio Engineering, 4 Dimitrova Prospekt, Novosibirsk, 630004, Russian Federation*

[a] *i.kuzminyx.2019@stud.nstu.ru* [b] *a.gavrilov@corp.nstu.ru* [c] *tolstikov@sniim.ru*
[d] *tissen.ksn@yandex.ru*

Abstract

This work is devoted to modifying the Prony's method to improve the accuracy of forecasting oscillatory time series. The proposed algorithm is based on a multi-stage approach: the model sequentially approximates the residual components of the series, which are then integrated into the final function. The modification was applied in practice to the task of forecasting time series dominated by complex oscillatory processes and harmonic components: Earth rotation parameters, namely the pole coordinates x_p and y_p, according to the International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) data archive for 2025. A comparative analysis with the original Prony's method, as well as with the forecasts of the IERS and the West Siberian branch FSUE VNIIFTRI at intervals of 7 and 90 days, showed that the effectiveness of the modification significantly depends on the specified conditions. The proposed approach does not always outperform the existing solutions of the IERS and VNIIFTRI, but for certain forecast horizons, sequential refinement of the model provides a local increase in accuracy and a reduction in forecast error. The identified heterogeneity of the results indicates that the effectiveness of the sequential application of the Prony's method significantly depends on the specified model parameters. The results obtained open up opportunities for applying the method in autonomous satellite navigation systems. The analysis allowed us to identify the limits of the current model's applicability and formulate recommendations for its development. In particular, it justifies the need to move from the use of statically specified parameters to the development of mechanisms for their adaptive adjustment, which will stabilize the results of the method when the nature of the initial data changes.

Keywords: forecasting, time series, digital processing of measurement data, autoregressive models, Prony's method, optimization of algorithm parameters, harmonic analysis, Earth rotation parameters, tilt of the Earth's axis, forecast accuracy

REFERENCES

1. Box G., Jenkins G. *Analiz vremennykh ryadov: prognoz i upravlenie*. Vyp. 1 [Time series analysis: forecasting and control]. Moscow, Mir Publ., 1974. 406 p. (In Russian).

2. Bure V.M., Plakhotnik S.V. [Adaptive methods of forecasting time series in the MATLAB environment]. *Proektirovanie nauchnykh i inzhenernykh prilozhenii v srede MATLAB* [Designing scientific and engineering applications in the MATLAB environment]. Proceedings of the All‑Russian scientific conference, St. Petersburg, 2007, pp. 1363–1370. (In Russian).

3. Deretić N., Stanimirović D., Awadh M.A., Vujanović N., Djukić A. SARIMA modelling approach for forecasting of traffic accidents. *Sustainability*, 2022, vol. 14 (8), p. 4403.

4. Wang C., Zhang H., Ma P. Wind power forecasting based on singular spectrum analysis and a new hybrid Laguerre neural network. *Applied Energy*, 2020, vol. 259, p. 114139.

[*] *Received 25 January 2026.*

5. Li X., Tang P. Stock index prediction based on wavelet transform and FCD-MLGRU. *Journal of Forecasting*, 2020, vol. 39 (8), p. 1229–1237.

6. Gong J., Liu S. A harmonic and interharmonic detection method for power systems based on enhanced SVD and the Prony algorithm. *Applied Sciences*, 2023, vol. 13 (13), p. 7558.

7. Tissen V.M., Tolstikov A.S., Balakhnenko A.Y., Malkin Z.M. High precision prediction of universal time based on 100-year data. *Measurement Techniques*, 2009, vol. 52 (12), pp. 1249–1255.

8. Vorotnikov M.V., Gorshkov V.L., Miller N.O., Prudnikova E.Ya. Issledovanie osnovnykh sostavlyayushchikh v dvizhenii polyusa Zemli [Research of the Basic Components in the Earth's Pole Motion]. *Izvestiya Glavnoi astronomicheskoi observatorii v Pulkove*, 2002, no. 216, pp. 406–414. (In Russian).

9. *International Earth Rotation and Reference Systems Service*. Available at: http://www.iers.org/iers/products (accessed 29.10.2025).

10. Tissen V.M. [Long-term forecasting of climate change based on variations in the speed of the Earth's rotation]. *Metrologiya vremeni i prostranstva* [Metrology of time and space]. Proceedings of the XI International symposium, Mendeleevo, 2023, pp. 170–173. (In Russian).

11. Montgomery D.C., Jennings C.L., Kulahci M. *Introduction to time series analysis and forecasting*. John Wiley & Sons, 2015.

12. Dick W.R., Thaller D., eds. *IERS Annual Report 2018*. International earth rotation and reference systems service, Central Bureau. Frankfurt am Main, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2020. 207 p. ISBN 978-3-86482-136-3.

13. Tissen V.M., Tolstikov A.S., Simonova G.V. Prognozirovanie parametrov vrashcheniya Zemli s pomoshch'yu adaptivnykh garmonicheskikh modelei [Prediction of Earth rotation parameters with using adaptive harmonic patterns]. *Vestnik SGUGiT = Vestnik SSUGiT*, 2020, vol. 25, no. 4, pp. 238–245.

14. Petit G, Luzum B. *IERS conventions 2010*. *IERS Technical Note*, 36. Frankfurt am Main, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 p.

15. Marple Jr S.L. *Tsifrovoi spektral'nyi analiz i ego prilozheniya* [Digital spectral analysis with applications]. Moscow, Mir Publ., 1990. 584 p. (In Russian).

16. Krzywanski J., Sosnowski M., Grabowska K., Zylka A., Lasek L., Kijo-Kleczkowska A. Advanced computational methods for modeling, prediction and optimization – a review. *Materials*, 2024, vol. 17 (14), p. 3521.

17. Gavrilov A.B., Ipatiev V.A., Kuzminykh I.A. Application of Prony's method for predicting the earth rotation parameters. *2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM)*. IEEE, 2024, pp. 1890–1893.

18. Malkin Z.M., Tissen V.M. Sravnenie razlichnykh otsenok tochnosti prognoza parametrov vrashcheniya zemli [Comparison of different estimates of the accuracy of smart earth parameter prediction]. *Astronomicheskii zhurnal = Astronomy Reports*, 2022, vol. 99, no. 1, pp. 70–74.

Для цитирования:

Последовательное применение метода Прони для повышения точности прогнозирования временных рядов / И.А. Кузьминых, А.Б. Гаврилов, А.С. Толстиков, В.М. Тиссен // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 3 (103). – С. 57–74. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-57-74.

For citation:

Kuzminykh I.A., Gavrilov A.B., Tolstikov A.S., Tissen V.M. Posledovatel'noe primenenie metoda Proni dlya povysheniya tochnosti prognozirovaniya vremennykh ryadov [Sequential application of the Prony's method for improved time series forecasting accuracy]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 3 (103), pp. 57–74. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-57-74.