ISSN 2782-2001
Системы анализа и обработки данных
том 103, № 3, 2026, с. 151–168

http://journals.nstu.ru/vestnik
Analysis and data processing systems
Vol. 103, No. 3, 2026, pp. 151–168

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

COMPUTER SCIENCE AND INFORMATION SCIENCE

УДК 519.872

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-151-168

Характеристики потока обработанных задач модели вычислительного узла при конкуренции за ресурс*

И.Л. ЛАПАТИН [a], **А.А. НАЗАРОВ** [b], **С.В. ПАУЛЬ**[c], **Д.Д. САЛИМЗЯНОВА**[d]

РФ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Национальный исследовательский Томский государственный университет

[a] *ilapatin@mail.ru* [b] *nazarov.tsu@gmail.com* [c] *paulsv82@mail.ru*
[d] *darya2001@inbox.ru*

Постоянный рост популярности удаленных и облачных вычислений порождает необходимость строить математические модели функционирования таких систем или отдельных ее элементов. Математическая модель позволяет рассчитывать определенные характеристики системы при различных параметрах ее функционирования. Расчет характеристик необходим на этапе проектирования вычислительного узла или оптимизации работы уже существующего. Теория массового обслуживания широко применяется для моделирования процессов, имеющих стохастическую природу. В работе рассматривается модель вычислительного узла в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Поступление задач на узел описывается точечным процессом Пуассона. Отличительной особенностью является зависимость скорости обслуживания (обработки) поступающих задач от общего числа задач на вычислительном узле. Чем больше задач одновременно обрабатывается, тем ниже скорость обработки каждой отдельной задачи. Этот эффект возникает при конкуренции за общий ресурс вычислительного узла. В настоящей работе объектом исследования модели является выходящий поток – моменты завершения обработки задач на вычислительном узле. Информация о характеристиках выходящего потока очень важна, так как после обработки задач (запросов) они должны быть переданы по некоторым телекоммуникационным каналам связи. Именно вероятностные характеристики потока решенных задач будут влиять на расчет ширины канала передачи данных для обеспечения заданных характеристик качества обслуживания. Для анализа выходящего потока модели вычислительного узла в работе применялся метод асимптотического анализа систем массового обслуживания. В результате были получены асимптотические характеристики выходящего потока рассматриваемой модели. Важно, что предложенный асимптотический подход в дальнейшем может быть применен для моделей с непуассоновским законом поступления запросов на узел.

Ключевые слова: передача данных, вычислительные системы, моделирование вычислительного узла, конкуренция за ресурс, теория массового обслуживания, выходящий поток, метод асимптотического анализа, простейший поток

* *Статья получена 03 февраля 2026 г.*

ВВЕДЕНИЕ

С развитием вычислительных технологий и ростом их популярности среди широкого круга пользователей постоянно растет потребность в использовании вычислительных мощностей различной конфигурации и способа доступа к ним. Это могут быть как обычные персональные устройства, так и огромные серверы или кластеры, доступ к которым пользователь может получить только удаленно.

Со стороны пользователей всё более актуальными становятся облачные центры обработки данных и хранилища [1, 2]. Их использование позволяет снизить финансовые затраты на покупку и обслуживание собственного оборудования необходимой мощности, которое требуется для обработки запрашиваемого объема данных.

Со стороны поставщиков облачных услуг существует проблема баланса как технического оснащения, так и эффективного распределения запросов клиентов по физическим ресурсам системы. Для того чтобы обеспечить определенное качество обслуживания своих клиентов, но при этом не покупать и не обслуживать избыточное оборудование, провайдерам необходимо прогнозировать производительность сервера при изменении характера и интенсивности нагрузки.

Проблеме прогнозирования производительности отдельного компьютера или сервера уделялось внимание еще при росте использования вычислительной техники во второй половине XX века. В работе [3] приведен достаточно подробный и систематизированный обзор работ по оценке производительности компьютеров. В ней авторы выделяют три основных подхода: измерение, аналитическое моделирование и имитационное моделирования. Каждый из этих подходов имеет свои сильные и слабые стороны. Подход, который предлагают авторы, относится к аналитическому моделированию функционирования вычислительных узлов. Под термином «вычислительный узел» будем понимать как обычный персональный компьютер, так и удаленный облачный сервер или его элемент.

Работа вычислительного узла не может быть описана детерминированными моделями, и изменение его состояний зависит от множества факторов. Для моделирования работы облачных узлов необходимо применение стохастических методов и моделей. Для этих целей прекрасно подходит математический аппарат теории массового обслуживания [4–6].

Первой особенностью функционирования вычислительного узла является стохастический характер поступления задач или запросов. Спонтанная нагрузка на узел требует выделять больше ресурсов для того, чтобы справиться с пиковой нагрузкой, хотя большую часть времени общая нагрузка может быть значительно ниже пиковой. Стохастические свойства поступления задач определяются моделью входящего потока [7] и его параметрами.

Второй особенностью работы вычислительного узла является ограниченность ресурсов. Следовательно, при росте одновременно выполняемых задач на узле начинается конкуренция за ресурсы. Это приводит к снижению производительности, снижению скорости обработки каждой отдельной задачи. Такой эффект называется деградацией скорости облуживания [8, 9]. Для моделирования такого эффекта необходимо использовать модели со специфи-

ческими дисциплинами обслуживания поступающих задач, такими как разделение процессора (Processor Sharing) и его обобщения.

Модели с разделением процессора (Processor Sharing, PS) стали известны благодаря работе [10]. Дисциплина PS подразумевает, что заявки на обслуживание принимаются одновременно, но скорость обслуживания каждой падает с увеличением заявок в системе, при этом общая скорость обработки пропорционально делится между всеми i заявками ($1/i$). В это же время появляются работы [11] с применением более общей дисциплины – «обобщенного совместного использования процессора» (Generalized Processor Sharing, GPS). В этом случае скорость обслуживания заявок может меняться не согласно последовательности $1/i$, а согласно произвольной заданной неотрицательной последовательности.

Исследование моделей с дисциплиной GPS на узлах представлено в основополагающей статье [12]. В ней рассмотрены как закрытые, так и открытые сети массового обслуживания и формулы для их характеристик.

В последние десятилетия необходимо отметить работы [13, 14] голландского ученого B. Zwart, которые посвящены моделям с зависимостью от состояния (state-dependent). Модели с дисциплинами PS и GPS являются примерами таких систем.

Кроме того, в последние годы уделяется большое внимание проблеме конкуренции за ресурсы в туманных и граничных вычислениях (Fog/Edge Computing), в которых эта проблема стоит более остро, чем в классических облачных вычислениях. Для решения этой задачи применяют как методы ИИ [15], так и комбинированные подходы с использованием аппарата теории массового обслуживания, например [16].

Школа Томского государственного университета по теории массового обслуживания занимается исследованием подобных моделей с зависимостью скорости обработки от состояния системы различной структуры [17, 18]. Прежде всего это модели с неограниченным числом приборов на одной или нескольких фазах и деградацией скорости обслуживания. Основной особенностью исследований является разработка и применение асимптотических методов исследования [19–21]. Такой подход позволяет получать приближенные аналитические результаты для моделей, допредельное аналитическое исследование которых затруднительно или невозможно. В частности, предлагаемые асимптотические подходы в ближайшее время дадут возможность получать результаты для моделей с непуассоновским входящим потоком, что позволит значительно обобщить и расширить границы применимости полученных ранее результатов для таких моделей.

В большинстве вышеуказанных работ объектом исследования является случайный процесс изменения числа одновременно обрабатываемых задач на узле. Именно этот процесс и его вероятностно-временные характеристики определяют характеристики скорости обработки поступающих задач.

В текущей же работе объектом исследования является выходящий поток [22, 23] системы, т. е. поток обработанных задач на вычислительном узле. Мотивация изучения свойств выходящих потоков обусловлена тем, что выходящий поток одного узла может являться входящим для другого. Задачи, которые прошли обработку на процессоре, могут требовать отправления результатов своей обработки по каналам передачи данных на другой узел или

конечному потребителю. А для определения необходимой пропускной способности канала передачи данных необходимо знать стохастические свойства поступления пакетов для передачи. Поэтому исследование свойств выходящего потока безусловно является актуальной задачей.

В работе предлагается исследование выходящего потока системы с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с учетом зависимости скорости их обслуживания от общего числа заявок в системе.

Аналитические результаты для такой марковской модели без учета деградации скорости обслуживания были получены еще в середине XX века. В работе [24] было показано, что поток обслуженных заявок в системе является простейшим. Немного позже этот результат был обобщен для случая, когда время обслуживания заявок задано произвольной функцией распределения [25]. Это позволяет сделать вывод о том, что в системе с неограниченным числом приборов и простейшим входящим потоком выходящий поток является простейшим независимо от закона распределения времени обслуживания.

В предложенной работе ставится задача определения влияния зависимости скорости обслуживания от числа заявок в системе на свойства выходящего потока. Целью настоящей работы является адаптация и применение метода асимптотического анализа [17] для исследования выходящих потоков в таких моделях. Предложенный подход асимптотического исследования выходящего потока в дальнейшем планируется применять к системе с более общей моделью входящего потока, например MAP (Markovian Arrival Process) [26].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания функционирования вычислительного узла будем применять аппарат теории массового обслуживания [27]. Поэтому обратим внимание на некоторые особенности использования терминов. Запросы и задачи, которые поступают на вычислительный узел, будем называть заявками. Моменты времени поступления или обращения заявок образуют входящий поток. Заметим, что входящий поток является случайным и может быть описан одной из моделей случайного потока событий. Модель входящего потока определяет интенсивность нагрузки на узел и ее характер (равномерный или более «скачкообразный»). Каждая заявка входящего потока поступает на обработку, которую будем называть обслуживанием. Моменты окончания обслуживания образуют события выходящего потока. Описания того, каким образом происходит обслуживание, будет дано ниже.

Предлагается рассмотреть функционирование некоторого вычислительного узла в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов [27]. Неограниченное число приборов означает, что заявки (задачи) могут обслуживаться параллельно. В теоретической модели предполагается, что возможности принятия к параллельному обслуживанию не ограничены, но всегда можно оценить вероятность превышения некоторого заданного уровня параллельного обслуживания.

Задание времени обслуживания поступающих заявок будет отличаться от классического подхода, в котором задается закон распределения величины случайного времени обслуживания каждой заявки. В предлагаемой модели скорость обслуживания каждой заявки будет определяться двумя факторами: объемом (размером) поступающей заявки и скоростью (интенсивностью) ее обслуживания. Заметим, что в нашей модели скорость обслуживания не является постоянной величиной и изменяется в зависимости от числа одновременно обслуживаемых задач.

Для целей аналитического исследования модели будем полагать, что объем поступающих заявок будет иметь экспоненциальное распределение с параметром γ. Получается, что средний объем заявки равен γ^{-1} единиц объема. Базовой скоростью обслуживания заявок будем называть скорость обработки заявки в системе. Заявка в системе одна и поэтому не конкурирует с другими заявками за ресурс. Базовую скорость будем обозначать через μ единиц объема за единицу времени. Для снижения громоздкости выкладок будем полагать $\gamma = 1$, что соответствует нормировке единицы измерения объема на средний объем поступающих заявок.

Текущая скорость обслуживания определяется количеством заявок в системе: чем больше заявок одновременно обслуживается, тем выше конкуренция за ресурс и ниже скорость обслуживания. Обозначим случайный процесс $i(t)$ как число заявок в системе в момент времени t. Этот процесс может принимать значения $i = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ Каждому значению процесса $i(t)$ будет соответствовать своя скорость обслуживания $\mu(i)$, которая определяется равенством

$$\mu(i) = \mu f(i),$$

где μ – базовая скорость обслуживания, а $f(i)$ – безразмерная функция, которая при целочисленных значениях аргумента определяет коэффициент снижения базовой скорости обслуживания. Функцию $f(i)$ будем называть функцией деградации скорости обслуживания.

В модели предполагается, что моменты обращения заявок к системе формируют стационарный пуассоновский поток (простейший поток) событий, который определяется параметром λ [28]. Эта модель потока обладает полезным свойством – независимостью длин интервалов между моментами наступления событий (поступления заявок), которые распределены по экспоненциальному закону с заданным параметром λ.

Для стабильного функционирования системы необходимо выполнение условия

$$\lambda < \lim_{i \to \infty} \mu i f(i),$$

чтобы при росте числа запросов система не переполнялась.

Теперь логика функционирования модели и все ее параметры определены. Перейдем к формальному описанию объекта исследования и приведем схему предложенной модели.

Объектом исследования является выходящий поток системы, то есть моменты завершения обслуживания заявок. Поскольку поступление заявок и их объем являются случайными, то и моменты окончания обслуживания тоже будут случайными. Соответственно, выходящий поток будет являться случайным

потоком событий. Для задания, анализа таких потоков и вычисления их характеристик используют два подхода: через длины интервалов между моментами наступления событий и через число событий, наступивших в потоке за некоторое время.

В работе используется второй подход описания потока. Для этого вводится стационарный случайный процесс $m(t)$ – число событий выходящего потока рассматриваемой системы за некоторое время t. Целью исследования является нахождение распределения вероятностей этого процесса или его числовых характеристик.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА В СИСТЕМЕ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ДЕГРАДАЦИЕЙ СКОРОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Моменты наступления событий в выходящем потоке определяются текущим состоянием системы. Поэтому для исследования числа событий выходящего потока применяется метод расширения фазового пространства, при котором вводится дополнительный случайный процесс, определяющий текущее состояние системы.

Обозначим $P(i,\ m,\ t) = P\{i(t) = i,\ m(t) = m\}$ – вероятность того, что в момент времени t в системе будет занято i приборов, а в выходящем потоке произойдет m событий к моменту времени t. Здесь предполагается, что в момент начала наблюдения $t = 0$ система функционировала в стационарном режиме. Двумерный процесс $\{i(t),\ m(t)\}$ является марковским, для распределения вероятностей его состояний составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(i,\ m,\ t)}{\partial t} = -\big(\lambda + i\mu(i)\big)P(i,\ m,\ t) +$$
$$+ \lambda P(i-1,\ m,\ t) + (i+1)\mu(i+1)P(i+1,\ m-1,\ t).$$

Полученная система является дифференциально-конечноразностной системой уравнений с переменными коэффициентами. Для ее решения предлагается реализовать метод асимптотического анализа и найти предельное решение системы.

Необходимо сделать переход от распределения вероятностей к характеристическим функциям по переменной m:

$$H(i,\ u,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(i,\ m,\ t), \text{ где } j = \sqrt{-1}.$$

При подстановке последнего равенства в систему уравнений Колмогорова и последующем суммировании получим уравнение для функций $H(i,\ u,\ t)$:

$$\frac{\partial H(i,\ u,\ t)}{\partial t} = -\big(\lambda + i\mu(i)\big)H(i,\ u,\ t) + \lambda H(i-1,\ u,\ t) +$$
$$+ e^{ju}(i+1)\mu(i+1)H(i+1,\ u,\ t). \qquad (1)$$

Определим полную характеристическую функцию путем суммирования частичных $H(i,\ u,\ t)$ по всем состояниям i:

$$H(u,\ t) = \sum_{i=0}^{\infty} H(i,\ u,\ t).$$

Просуммировав уравнение (1) по всем i от 0 до ∞, получим уравнение для полной характеристической функции:

$$\frac{\partial H(u,\ t)}{\partial t} = (e^{ju} - 1) \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i) H(i,\ u,\ t). \tag{2}$$

Система уравнений (1) – (2) будет основной в дальнейших исследованиях.

2.1. АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для решения системы (1) – (2) вводим предельное условие растущего времени наблюдения за выходящим потоком при определении бесконечно большого параметра T. Вводим следующие замены:

$$T = \frac{1}{\varepsilon},\ \ \tau = \varepsilon t,\ \ u = \varepsilon w,\ \ H(i,\ u,\ t) = F(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon),$$

где ε – малый параметр. Условие $T \to \infty$ будем называть предельным условием растущего времени наблюдения за выходящим потоком. Параметр T определяет зависимость времени t от «медленного времени» τ. Предполагается, что для любого фиксированного значения $\tau > 0$ значение t неограниченно возрастает. Используя введенные замены, уравнения (1) и (2) перепишем в следующем виде:

$$\varepsilon \frac{\partial F(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial \tau} = -\big(\lambda + i\mu(i)\big) F(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) + \lambda F(i-1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) +$$

$$+ e^{j\varepsilon w}(i+1)\mu(i+1) F(i+1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon), \tag{3}$$

$$\varepsilon \frac{\partial F(w,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial \tau} = (e^{j\varepsilon w} - 1) \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i) F(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon), \tag{4}$$

Устремляя в (3) и (4) $\varepsilon \to 0$, получим

$$\lambda F(i-1,\ w,\ \tau) - \big(\lambda + i\mu(i)\big) F(i,\ w,\ \tau) + (i+1)\mu(i+1) F(i+1,\ w,\ \tau) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F(w,\ \tau)}{\partial \tau} = jw \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i) F(i,\ w,\ \tau). \tag{6}$$

Найдем решение уравнения (5) в виде произведения двух функций:

$$F(i,\ w,\ \tau) = R(i)\Phi(w,\ \tau), \tag{7}$$

где $R(i)$ – стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе, а функция $\Phi(w, \tau)$ определяет предельное число событий, наступивших в выходящем потоке. При подстановке решения (7) в (5) получим

$$\Phi(w, \tau)\left[\lambda R(i-1) - (\lambda + i\mu(i))R(i) + (i+1)\mu(i+1)R(i+1)\right] = 0.$$

Так как функция $\Phi(w, \tau)$ тождественно не равна нулю, выражение в квадратных скобках должно обращаться в ноль для всех i. Это дает уравнение для стационарного распределения числа заявок $R(i)$ в системе:

$$\lambda R(i-1) - (\lambda + i\mu(i))R(i) + (i+1)\mu(i+1)R(i+1) = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) можно выразить $R(i)$ через $R(i-1)$. Перенесем часть слагаемых:

$$\lambda R(i-1) - i\mu(i)R(i) = \lambda R(i) - (i+1)\mu(i+1)R(i+1).$$

Разности $\lambda R(i-1) - i\mu(i)R(i)$ должны быть равны между собой для всех i, что означает постоянство величины $C_1 = \lambda R(i-1) - i\mu(i)R(i)$. При $C_1 = 0$ получим

$$\lambda R(i-1) = i\mu(i)R(i), \ i \geq 1, \quad (9)$$

отсюда выразим $R(i)$:

$$R(i) = \frac{\lambda}{i\mu(i)} R(i-1).$$

Применяя эту формулу последовательно, можно записать явное выражение

$$R(i) = R(0)\prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda}{n\mu(n)}.$$

Константа $R(0)$ – вероятность того, что в системе нет заявок, – находится из условия нормировки.

После подстановки (7) в (6) получим

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = jw \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)R(i)\Phi(w, \tau),$$

Обозначим сумму в правой части как производную некоторой функции $x(\tau)$:

$$x'(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)R(i).$$

Вычислим эту сумму, используя явный вид $R(i)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)R(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\mu(i)\frac{\lambda}{i\mu(i)}R(i-1) = \lambda\sum_{i=1}^{\infty} R(i-1) = \lambda, \quad (10)$$

отсюда имеем $x'(\tau) = \lambda,$ следовательно, $x(\tau) = \lambda\tau.$

Таким образом, решение для характеристической функции имеет вид

$$F(i,w,\tau) = R(i)\Phi(w,\tau) = R(i)e^{jwx(\tau)} = R(i)e^{jw\lambda\tau},$$

Вернемся к исходным переменным через обратную замену:

$$H(i,u,t) \approx R(i)e^{ju\lambda t}. \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что среднее число событий в выходящем потоке, наступивших за время t, равно λt. Формулу (11) будем называть асимптотикой первого порядка.

2.2. АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для уточнения характеристик выходящего потока рассмотрим асимптотику второго порядка. Она позволяет определить предельный закон распределения числа событий выходящего потока.

Введем следующую замену:

$$H(i,\ u,\ t) = H_2(i,\ u,\ t)e^{ju\lambda t}.$$

При подстановке ее в исходные уравнения (1) и (2) получим уравнения для $H_2(i,\ u,\ t)$:

$$\frac{\partial H_2(i,\ u,\ t)}{\partial t} + ju\lambda H_2(i,\ u,\ t) = -\big(\lambda + i\mu(i)\big)H_2(i,\ u,\ t) +$$

$$+ \lambda H_2(i-1,\ u,\ t) + e^{ju}(i+1)\mu(i+1)H_2(i+1,\ u,\ t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial H_2(u,\ t)}{\partial t} + ju\lambda H_2(u,\ t) = (e^{ju}-1)\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)H_2(i,\ u,\ t). \tag{13}$$

Перейдем к предельному условию растущего времени наблюдения за выходящим потоком и введем следующие замены:

$$T = \frac{1}{\varepsilon^2},\ \ \tau = \varepsilon^2 t,\ \ u = \varepsilon w,\ \ H_2(i,\ u,\ t) = F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon).$$

Перепишем уравнения (12) и (13) с учетом замены:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w\lambda F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) = -\big(\lambda + i\mu(i)\big)F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) +$$

$$+ \lambda F_2(i-1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) + e^{j\varepsilon w}(i+1)\mu(i+1)F_2(i+1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon), \tag{14}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w\lambda F_2(w,\ \tau,\ \varepsilon) = (e^{j\varepsilon w}-1)\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon).$$

Запишем первое уравнение системы (14) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$j\varepsilon w\lambda F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) = -(\lambda + i\mu(i))F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) + \lambda F_2(i-1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) +$$

$$+ (1 + j\varepsilon w)(i+1)\mu(i+1)F_2(i+1,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

Решение $F(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon)$ будем искать в виде разложения:

$$F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) = \Phi_2(w,\ \tau)\{R(i) + j\varepsilon w g(i)\} + O(\varepsilon^2). \qquad (16)$$

Перепишем уравнение (15) с учетом равенства (16):

$$j\varepsilon w\lambda R(i) = -(\lambda + i\mu(i))\{R(i) + j\varepsilon w g(i)\} + \lambda\{R(i-1) + j\varepsilon w g(i-1)\} +$$

$$+ (i+1)\mu(i+1)\{R(i+1) + j\varepsilon w g(i+1)\} + j\varepsilon w(i+1)\mu(i+1)R(i+1) + O(\varepsilon^2), \qquad (17)$$

Разделим уравнение (17) на $jw\varepsilon$ и устремим $\varepsilon \to 0$:

$$\lambda R(i) = -(\lambda + i\mu(i))g(i) + \lambda f(i-1) + (i+1)\mu(i+1)g(i+1) + (i+1)\mu(i+1)R(i+1),$$

Выполняя преобразования с учетом (9), запишем

$$\lambda g(i-1) - (\lambda + i\mu(i))g(i) + (i+1)\mu(i+1)g(i+1) = 0. \qquad (18)$$

Анализируя уравнение (18), можно заметить, что его структура совпадает с общим видом уравнений, описывающих стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системах массового обслуживания. Из этого следует, что распределение вероятностей числа занятых приборов выступает в качестве мультипликативного сомножителя в исследуемой модели, то есть отделяется от остальных компонент системы и входит в итоговое выражение в виде независимого коэффициента:

$$g(i) = C_2 R(i), \qquad (19)$$

где C_2 – константа.

Запишем согласованное уравнение системы (14) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w\lambda F_2(w,\ \tau,\ \varepsilon) =$$

$$= \left[j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right] \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)F_2(i,\ w,\ \tau,\ \varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Решение будем искать в виде (16):

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w,\ \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w\lambda \Phi_2(w,\ \tau)\left\{1 + j\varepsilon w \sum_{i=0}^{\infty} g(i)\right\} =$$

$$= j\varepsilon w\Phi_2(w,\ \tau)\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)\{R(i) + j\varepsilon w g(i)\} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)\Phi_2(w,\ \tau)R(i) + O(\varepsilon^2).$$

Разделим уравнение на ε^2 и устремим $\varepsilon \to 0$. Учитывая (10), запишем

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\ \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \lambda \Phi_2(w,\ \tau) \sum_{i=0}^{\infty} g(i) =$$

$$= (jw)^2 \Phi_2(w,\ \tau) \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)\, g(i) + \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w,\ \tau) \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i) R(i). \qquad (20)$$

Используя замену (19) и подставив ее в (20), получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\ \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \lambda \Phi_2(w,\ \tau) C_2 =$$

$$= (jw)^2 \Phi_2(w,\ \tau) C_2 \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)\, R(i) + \frac{(jw)^2}{2} \lambda \Phi_2(w,\ \tau).$$

Применим преобразования и получим дифференциальное уравнение для $\Phi_2(w,\ \tau)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\ \tau)}{\partial \tau} = \frac{(jw)^2}{2} \lambda \Phi_2(w,\ \tau).$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$\Phi_2(w,\ \tau) = \exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2} \lambda \tau \right\}.$$

Выполним обратный переход к исходным функциям:

$$H_2(u,\ t) = \exp\left\{ \frac{(ju)^2}{2} \lambda t \right\}.$$

Вернемся к замене для $H(i,\ u,\ t)$:

$$H(i,\ u,\ t) = H_2(i,\ u,\ t) e^{ju\lambda t}.$$

Для $H(u,\ t)$ запишем

$$H(u,\ t) = \sum_{i=0}^{\infty} H(i,\ u,\ t) = e^{iu\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} H_2(i,\ u,\ t) =$$

$$= e^{iu\lambda t} H(u,\ t) = \exp\left\{ ju\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} \lambda t \right\}. \qquad (21)$$

Равенство (21) – это формула характеристической функции нормального распределения $N(m, \sigma^2)$, где

$$m = \lambda t, \quad \sigma = \sqrt{\lambda t}.$$

Полученное решение (21) показывает, что распределение числа обслуженных заявок за некоторое время в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и интенсивностью обслуживания, зависящей от числа заявок в системе, является асимптотически нормальным, среднее и дисперсия которого совпадают и пропорциональны интенсивности входящего потока. Заметим, что таким же свойством обладает поток Пуассона, поэтому полученный асимптотический выходящий поток будем называть квазипуассоновским.

2.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем несколько иллюстрационных численных примеров, которые были сделаны на основе результатов имитационного моделирования.

Сначала сравним полученные результаты асимптотического анализа (*asim*) и имитационного моделирования (*simul*) при помощи расстояния Колмогорова для функций распределения:

$$\Delta = \max \left| F(x)_{asimp} - F(x)_{simul} \right|.$$

Результаты сравнения для двух видов функции деградации и разных значений времени наблюдения T представлены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Расстояние Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределением вероятностей числа событий в выходящем потоке ($\lambda = 0{,}7$; $\mu = 1$)

Kolmogorov distance between simulated and asymptotic probability distributions of the number of requests in the outgoing flow ($\lambda = 0{,}7$; $\mu = 1$)

Вид функции деградации	$T = 2$	$T = 4$	$T = 6$	$T = 8$	$T = 10$
$f(i) = \frac{1}{\sqrt{1+i}}$	0,078	0,051	0,035	0,030	0,024
$f(i) = \frac{1}{i}$	0,074	0,052	0,033	0,031	0,023

Заметим, что большие отклонения при небольших значениях T наблюдались именно в начале распределения, что частично объясняется смещением моды распределения ближе к нулю. В этом случае усеченное нормальное распределение не очень хорошо аппроксимирует допредельное распределение, даже если оно является пуассоновским.

Из таблицы видно, что гауссовским распределением с равными математическим ожиданием и дисперсией можно аппроксимировать распределение

числа событий в выходящем потоке рассматриваемой модели, когда среднее число событий за интервал 5 или более.

Дополнительно были проведены эксперименты, когда в имитационной модели рассматривалось не только экспоненциальное распределение для объема заявок, но также равномерное и гамма-распределение.

Таблица 2

Table 2

Расстояние Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределением вероятностей числа событий в выходящем потоке для разных функций деградации и закона распределения объема заявок ($\lambda = 0{,}7$; $\mu = 1$; $T = 10$)

Kolmogorov distance between the simulated and asymptotic probability distributions of the number of requests in the outgoing flow for different degradation functions and request volume distributions ($\lambda = 0{,}7$; $\mu = 1$; $T = 10$)

Распределение объема заявок	$f(i) = \frac{1}{\sqrt{1+i}}$	$f(i) = \frac{1}{i}$
Экспоненциальное ($\mu = 1$)	0,024	0,023
Равномерное ($a = 0$, $b = 2$)	0,025	0,018
Гамма ($\alpha = \beta = 0{,}5$)	0,024	0,015

По результатам численных экспериментов, представленных в табл. 2, можно наблюдать отсутствие чувствительности результата к виду распределения объема заявок. Такой результат наблюдался для случая экспоненциального, равномерного и гамма-распределения с одинаковыми средними, равными единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель вычислительного узла в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и зависимостью скорости обслуживания от общего числа заявок в системе. Объект исследования – выходящий поток системы. В результате применения метода асимптотического анализа получены характеристики распределения числа событий, закончивших обслуживание за некоторое время t, которые и образуют события выходящего потока. Для предложенной модели удалось показать, что математическое ожидание и дисперсия числа совпадают. В этом случае выходящий поток можно называть квазипуассоновским.

С практической точки зрения это означает, что, несмотря на зависимость скорости обработки запросов от общего числа запросов в системе, характеристики потока обработанных запросов близки к характеристикам потока поступления запросов. Также важно отметить, что характеристики выходящего потока рассматриваемой системы не зависят от типа зависимости скорости обслуживания $f(i)$, что видно из итоговой формулы (21).

Проведенные численные эксперименты показали, что предложенную гауссовскую аппроксимацию можно применять, когда среднее число событий

в выходящем потоке за интервал T равно пяти или более. При равномерном и гамма-распределении объема заявок распределение числа событий в выходящем потоке почти не отличается от случая экспоненциального распределения объема заявок.

Предложенный в работе подход для исследования выходящих потоков систем с неограниченным числом приборов и деградацией скорости обслуживания может быть применен для исследования моделей с более сложными моделями входящего потока (MMPP, MAP, рекуррентный), который характеризует поступление запросов на вычислительный узел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Analysis of the performance of a cloud computing processing queue with correlated reneging of tasks and resubmission / G.S. Kuaban, B.S. Soodan, R. Kumar, P. Czekalski // 2021 International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET). – IEEE, 2021. – P. 1–8.

2. *Hanini M.*, *Kafhali S.E.*, *Salah K.* Dynamic VM allocation and traffic control to manage QoS and energy consumption in cloud computing environment // International Journal of Computer Applications in Technology. – 2019. – Vol. 60 (4). – P. 307–316.

3. *Heidelberger P.*, *Lavenberg S.S.* Computer performance evaluation methodology // IEEE Transactions on Computers. – 1984. – Vol. 100 (12). – P. 1195–1220.

4. *Vetha S.*, *Devi K.V.* Dynamic resource allocation in cloud using queuing model // Journal of Industrial Pollution Control. – 2017. – Vol. 33 (2). – P. 1547–1554.

5. A queuing theory model for cloud computing / J. Vilaplana, F. Solsona, I. Teixidó, J. Mateo, F. Abella, J. Rius // The Journal of Supercomputing. – 2014. – Vol. 69 (1). – P. 492–507.

6. *Liu X.*, *Li S.*, *Tong W.* A queuing model considering resources sharing for cloud service performance // The Journal of Supercomputing. – 2015. – Vol. 71 (11). – P. 4042–4055.

7. *Вишневский В.М.*, *Дудин А.Н.*, *Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками: теория и применение в телекоммуникационных сетях. – М.: Техносфера, 2018. – 564 с.

8. Queueing system with two phases of service and service rate degradation / E. Fedorova, I. Lapatin, O. Lizyura, A. Moiseev, A. Nazarov, S. Paul // Axioms. – 2023. – Vol. 12 (2). – P. 104.

9. *Bermejo B.*, *Juiz C.* A general method for evaluating the overhead when consolidating servers: performance degradation in virtual machines and containers // The Journal of Supercomputing. – 2022. – Vol. 78. – P. 11345–11372.

10. *Kleinrock L.* Queueing systems. Vol. 1. – New York: Wiley, 1975.

11. *Kelly F.P.* Networks of queues // Advances in Applied Probability. – 1976. – Vol. 8 (2). – P. 416–432.

12. *Cohen J.W.* The multiple phase service network with generalized processor sharing // Acta Informatica. – 1979. – Vol. 12. – P. 245–284.

13. *Guillemin F.*, *Robert P.*, *Zwart B.* Tail asymptotics for processor-sharing queues // Advances in Applied Probability. – 2004. – Vol. 36 (2). – P. 525–543.

14. *Zwart A.P.*, *Boxma O.J.* Sojourn time asymptotics in the M/G/1 processor sharing queue. – Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1998. – 27 p. – (CWI report: Probability, Networks and Algorithms; vol. 9802).

15. *Alsadie D*. A comprehensive review of AI Techniques for resource management in fog computing: Trends, challenges, and future directions // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 118007–118059.

16. *Ibrahim A.S., Al-Mahdi H., Nassar H.* Characterization of task response time in a fog-enabled IoT network using queueing models with general service times. Journal of King Saud University // Computer and Information Sciences. – 2022. – Vol. 34 (9). – P. 7089–7100.

17. Asymptotic analysis of two-phase queueing system with service rate degradation and heterogeneous customers / E.A. Fedorova, I.L. Lapatin, O.D. Lizyura, A.N. Moiseev, A. Nazarov, S. Paul // 2023 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI), 28–30 august 2023. – IEEE, 2023. – P. 1–5.

18. Mathematical model of cloud node using closed queueing system with service rate degradation / A.A. Nazarov, A.N. Moiseev, S.V. Paul, I.L. Lapatin, E. Fedorova, O. Lizyura, R. Salimzyanov,

D. Salimzyanova // 21st International Asian School-Seminar on Optimization Problems of Complex Systems (OPCS). – IEEE, 2025. – P. 11219374.

19. *Fedorova E.A.*, *Nazarov A.A.*, *Nikolaeva D.I.* Asymptotic analysis of sojourn time in retrial queueing system with non-persistent customers and feedback // Communications in Computer and Information Science. – 2025. – Vol. 2472. – P. 98–107.

20. *Nazarov A.A., Fedorova E.A.* Method of the marginal asymptotic-diffusion analysis for multiclass retrial queue Mn/GIn/1 // Automation and Remote Control. – 2025. – Vol. 86 (3). – P. 235–248.

21. Performance modeling of cloud systems by an infinite-server queue operating in rarely changing random environment / S. Moiseeva, E. Polin, A. Moiseev, J. Sztrik // Future Internet. – 2025. – Vol. 17 (10). – P. 462.

22. *Daley D.J.* Notes on queueing output processes // Mathematical methods in queueing theory / ed. by A.B. Clarke. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1974. – (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems; vol. 98). – P. 211–262.

23. *Daley D.J.* Queueing output processes // Advances in Applied Probability. – 1976. – Vol. 8 (2). – P. 395–415.

24. *Burke P.J.* The output of a queuing system // Operations Research. – 1956. – Vol. 4 (6). – P. 699–704.

25. *Mirasol N.M.* Letter to the editor – The output of an M / G /(infinity) queuing system is Poisson // Operations Research. – 1963. – Vol. 11 (2). – P. 282–284.

26. Matrix and analytical methods for performance analysis of telecommunication systems / V. Naumov, Y. Gaidamaka, N. Yarkina, K. Samouylov. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2021. – 305 p. – DOI: 10.1007/978-3-030-83132-5.

27. *Моисеев А.Н.*, *Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.

28. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

Лапатин Иван Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. Основное направление научных исследований – теория массового обслуживания, теория случайных процессов, математическая теория телетрафика. Имеет более 50 печатных работ. E-mail: ilapatin@mail.ru

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. Основное направление научных исследований – теория массового обслуживания, теория случайных процессов, математическая теория телетрафика. Имеет более 700 печатных работ. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Пауль Светлана Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. Основное направление научных исследований – теория массового обслуживания, теория случайных процессов, математическая теория телетрафика. Имеет более 100 печатных работ. E-mail: paulsv82@mail.ru

Салимзянова Дарья Дмитриевна, ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование, теория массового обслуживания, теория случайных процессов, математическая теория телетрафика. Имеет более 10 печатных работ. E-mail: darya2001@inbox.ru

Lapatin Ivan L., PhD (Phys.-Math.), associate professor at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University. His research interests are currently focused on the queueing theory, the theory of stochastic processes, and the mathematical teletraffic theory. He has more than 50 publications. E-mail: ilapatin@mail.ru

Nazarov Anatoly A., D. Sc. (Eng.), professor at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University. His research interests are currently focused on the queueing theory, the theory of stochastic processes, and the mathematical teletraffic theory. He has more than 700 publications. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Paul Svetlana V., D. Sc. (Phys.&Math.), professor at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University. Her research interests are currently focused on the queueing theory, the theory of stochastic processes, and the mathematical teletraffic theory. She has more than 100 publications. E-mail: paulsv82@mail.ru

Salimzyanova Daria D., assistant lecturer at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, National Research Tomsk State University. Her research interests are currently focused on mathematical modeling, the queueing theory, the theory of stochastic processes, and the mathematical teletraffic theory. She has more than 10 publications. E-mail: darya2001@inbox.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-151-168

Characteristics of the output flow of processed tasks in a computational node model under resource competition[*]

I.L. LAPATIN [a], A.A. NAZAROV [b], S.V. PAUL [c], D.D. SALIMZYANOVA [d]

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation

[a] ilapatin@mail.ru [b] nazarov.tsu@gmail.com [c] paulsv82@mail.ru [d] darya2001@inbox.ru

Abstract

The continuous growth in the popularity of remote and cloud computing creates the need for developing mathematical models describing the operation of such systems or their individual components. Mathematical models make it possible to evaluate various performance characteristics of a system under different operating parameters. The calculation of these characteristics is required at the design stage of a computational node or for optimizing the operation of an existing one. The queueing theory is widely used to model processes of a stochastic nature.

This paper considers a computational node model represented as a queueing system with an unlimited number of servers. The arrival of tasks to the node is described by a Poisson point process. A distinctive feature of the proposed model compared to the classical one is the dependence of the service (processing) rate of incoming tasks on the total number of tasks present at the computational node. The greater the number of tasks being processed simultaneously, the lower the processing rate of each individual task. This effect arises due to competition for a shared resource of the computational node.

In this study, the object of investigation is the output flow of the model, i.e., the moments when task is completed on the computational node. Information about the characteristics of the output flow is of great importance since after processing, tasks (requests) must be transmitted via telecommunication channels. It is the probabilistic characteristics of the serviced task flow that affect the calculation of the required data transmission bandwidth to ensure specified quality-of-service parameters.

To analyze the output flow of the computational node model, asymptotic methods of queueing theory are employed. As a result, asymptotic characteristics of the output flow of the proposed model are obtained. It is important to note that the proposed asymptotic approach can potentially be extended to models with non-Poisson task arrival processes.

Keywords: data transmission, computing systems, computational node modeling, resource competition, queueing theory, output flow, asymptotic analysis method, Poisson flow

[*] *Received 03 February 2026.*

REFERENCES

1. Kuaban G.S., Soodan B.S., Kumar R., Czekalski P. Analysis of the performance of a cloud computing processing queue with correlated reneging of tasks and resubmission. *2021 International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET)*. IEEE, 2021, pp. 1–8.

2. Hanini M., Kafhali S.E., Salah K. Dynamic VM allocation and traffic control to manage QoS and energy consumption in cloud computing environment. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 2019, vol. 60 (4), pp. 307–316.

3. Heidelberger P., Lavenberg S.S. Computer performance evaluation methodology. *IEEE Transactions on Computers*, 1984, vol. 100 (12), pp. 1195–1220.

4. Vetha S., Devi K.V. Dynamic resource allocation in cloud using queuing model. *Journal of Industrial Pollution Control*, 2017, vol. 33 (2), pp. 1547–1554.

5. Vilaplana J., Solsona F., Teixidó I., Mateo J., Abella F., Rius J. A queuing theory model for cloud computing. *The Journal of Supercomputing*, 2014, vol. 69 (1), pp. 492–507.

6. Liu X., Li S., Tong W. A queuing model considering resources sharing for cloud service performance. *The Journal of Supercomputing*, 2015, vol. 71 (11), pp. 4042–4055.

7. Vishnevskii V.M., Dudin A.N., Klimenok V.I. *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami: teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows: Theory and application in telecommunication networks]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2018. 564 p.

8. Fedorova E., Lapatin I., Lizyura O., Moiseev A., Nazarov A., Pau S. Queueing system with two phases of service and service rate degradation. *Axioms*, 2023, vol. 12 (2), p. 104.

9. Bermejo B., Juiz C. A general method for evaluating the overhead when consolidating servers: performance degradation in virtual machines and containers. *The Journal of Supercomputing*, 2022, vol. 78, pp. 11345–11372.

10. Kleinrock L. *Queueing systems*. Vol. 1. New York, Wiley, 1975.

11. Kelly F.P. Networks of queues. *Advances in Applied Probability*, 1976, vol. 8 (2), pp. 416–432.

12. Cohen J.W. The multiple phase service network with generalized processor sharing. *Acta Informatica*, 1979, vol. 12, pp. 245–284.

13. Guillemin F., Robert P., Zwart B. Tail asymptotics for processor-sharing queues. *Advances in Applied Probability*, 2004, vol. 36 (2), pp. 525–543.

14. Zwart A.P., Boxma O.J. *Sojourn time asymptotics in the M/G/1 processor sharing queue*. *CWI report: Probability, Networks and Algorithms*, vol. 9802. Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1998. 27 p.

15. Alsadie D. A comprehensive review of AI Techniques for resource management in fog computing: Trends, challenges, and future directions. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 118007–118059.

16. Ibrahim A.S., Al-Mahdi H., Nassar H. Characterization of task response time in a fog-enabled IoT network using queueing models with general service times. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 2022, vol. 34 (9), pp. 7089–7100.

17. Fedorova E.A., Lapatin I.L., Lizyura O.D., Moiseev A.N., Nazarov A., Paul S. Asymptotic analysis of two-phase queueing system with service rate degradation and heterogeneous customers. *2023 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI)*, 28–30 august 2023, pp. 1–5.

18. Nazarov A., Moiseev A., Paul S., Lapatin I., Fedorova E., Lizyura O., Salimzyanov R., Salimzyanova D. Mathematical model of cloud node using closed queueing system with service rate degradation. *21st International Asian School-Seminar on Optimization Problems of Complex Systems (OPCS)*. IEEE, 2025, p. 11219374.

19. Fedorova E.A., Nazarov A.A., Nikolaeva D.I. Asymptotic analysis of sojourn time in retrial queueing system with non-persistent customers and feedback. *Communications in Computer and Information Science*, 2025, vol. 2472, pp. 98–107.

20. Nazarov A.A., Fedorova E.A. Method of the marginal asymptotic-diffusion analysis for multiclass retrial queue Mn/GIn/1. *Automation and Remote Control*, 2025, vol. 86 (3), pp. 235–248.

21. Moiseeva S., Polin E., Moiseev A., Sztrik J. Performance modeling of cloud systems by an infinite-server queue operating in rarely changing random environment. *Future Internet*, 2025, vol. 17 (10), p. 462.

22. Daley D.J. Notes on queueing output processes. *Mathematical methods in queueing theory*. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 98. Ed. by A.B. Clarke. Berlin, Heidelberg, Springer, 1974, pp. 211–262.

23. Daley D.J. Queueing output processes. *Advances in Applied Probability*, 1976, vol. 8 (2), pp. 395–415.

24. Burke P.J. The output of a queuing system. *Operations Research*, 1956, vol. 4 (6), pp. 699–704.

25. Mirasol N.M. Letter to the editor – The output of an M / G /(infinity) queuing system is Poisson. *Operations Research*, 1963, vol. 11 (2), pp. 282–284.

26. Naumov V., Gaidamaka Y., Yarkina N., Samouylov K. *Matrix and analytical methods for performance analysis of telecommunication systems*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2021. 305 p. DOI: 10.1007/978-3-030-83132-5.

27. Moiseev A.N., Nazarov A.A. *Beskonechnolineinye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Infinite linear systems and queuing networks]. Tomsk, NTL Publ., 2015. 240 p.

28. Nazarov A.A., Terpugov A.F. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. 2nd ed., rev. Tomsk, NTL Publ., 2010. 228 p.

Для цитирования:

Характеристики потока обработанных задач модели вычислительного узла при конкуренции за ресурс / И.Л. Лапатин, А.А. Назаров, С.В. Пауль, Д.Д. Салимзянова // Системы анализа и обработки данных. – 2026. – № 3 (103). – С. 151–168. – DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-151-168.

For citation:

Lapatin I.L., Nazarov A.A., Paul S.V., Salimzyanova D.D. Kharakteristiki potoka obrabotannykh zadach modeli vychislitel'nogo uzla pri konkurentsii za resurs [Characteristics of the output flow of processed tasks in a computational node model under resource competition]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2026, no. 3 (103), pp. 151–168. DOI: 10.17212/2782-2001-2026-3-151-168.