ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 58, № 1, 2015, с. 40–61

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 58, No. 1, 2015, pp. 40–61

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL AND IDENTIFICATION

УДК 681.511.2

Локальные экстремумы квадратичного критерия оптимальности системы управления с характеристическим полиномом второй степени*

А.Н. КОРЮКИН[1], А.А. ВОЕВОДА[2]

[1] *630090, РФ, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, 4, Институт математики им. Соболева СО РАН, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. E-mail: koryukin@ngs.ru*
[2] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: ucit@ucit.ru*

Пусть система управления одноканальная, причем ее характеристическое уравнение имеет степень два и у него нет вещественных корней, пусть также регулятор имеет полный порядок.

Можно считать, что любой характеристический полином имеет старший коэффициент «1». Каждый допустимый регулятор задает характеристический полином. В данной ситуации эти полиномы задаются парами своих коэффициентов (при степенях 0, 1). Геометрически эти пары можно рассматривать как точки плоскости. Обозначим ее через *P*. Сопоставляя каждому допустимому регулятору его характеристический полином, получим отображение множества допустимых регуляторов на некоторое множество точек плоскости *P* (область допустимых точек плоскости *P*). В данной ситуации фазовое пространство (x, v, где x – регулируемая величина, v – скорость ее изменения) является двумерным и геометрически является плоскостью. В качестве критерия оптимальности рассматривается положительно определенная квадратичная форма x^2+v^2. Выбран также «финальный» момент времени. Значение квадратичной формы в финальный момент времени является функцией коэффициентов характеристического полинома.

С помощью Maple показано, что эта функция не имеет точек, подозрительных на экстремум (т. е. нет точек с нулевым градиентом), причем во всей плоскости *P*. Это позволяет при поиске регуляторов, имеющих ограничения и минимизирующих выбранный квадратичный критерий оптимальности, ограничиться регуляторами, для которых пара из *P* лежит на границе области допустимых точек плоскости *P* (по крайней мере для компактной области).

Ключевые слова: локальный экстремум, автоматическое управление, одноканальные системы, регуляторы полного порядка, задача стабилизации, Maple, матричная экспонента, характеристический полином

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-1-40-61

* *Статья получена 21 октября 2014 г.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ по государственному заданию № 2014/138. Тема проекта «Новые структуры, модели и алгоритмы для прорывных методов управления техническими системами на основе наукоемких результатов интеллектуальной деятельности».

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим произвольную одноканальную систему управления [12–19]. Запишем дифференциальное уравнение движения ее объекта управления:

$$D(p)\cdot x = N(p)\cdot u\,. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$ – регулируемая величина; t – время; $u = u(t)$ – управляющая величина; $D(p)$, $N(p)$ – полиномы от p с вещественными коэффициентами. Предполагаем, что полиномы $D(p)$, $N(p)$ взаимно простые.

При модальном управлении u выбирается как решение дифференциального уравнения $Y(p)\cdot u = X(p)\cdot(v-x)$. Здесь $v = v(t)$ – задание; $X(p)$, $Y(p)$ – полиномы от p с вещественными коэффициентами.

При v тождественно равном нулю, говорят о задаче стабилизации. Для нее $v = 0$. Поэтому u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y(p)\cdot u = -X(p)\cdot x\,. \tag{2}$$

Фиксируем степень полинома $Y(p)$: $\deg(Y(p)) = k$ для $k \geq 0$; введем обозначение для степени полинома $X(p)$: $\deg(X(p)) = m$ для $m \geq 0$; на коэффициенты полиномов введем только следующие ограничения: старший коэффициент полинома $Y(p)$ равен единице; полиномы $X(p)$, $Y(p)$ взаимно простые. Фиксированное таким образом множество регуляторов, определяемое числами k, m, назовем ***полным классом регуляторов***.

Исключим из рассмотрения старший коэффициент полинома $Y(p)$ (он не меняется и равен единице). Оставшиеся $k + m + 1$ коэффициентов будем называть ***параметрами регулятора***. Пронумеруем их и будем рассматривать геометрически – как точки пространства $\mathbb{R}^{k+m+1}$. Будем называть его ***пространством регуляторов***.

Не обязательно рассматривать все точки пространства регуляторов. Можно ограничиться каким-то множеством. Назовем его (***допустимым***) ***множеством регуляторов*** и обозначим через O_R.

В качестве допустимого множества регуляторов разумно рассматривать все $\mathbb{R}^{k+m+1}$, или же какое-то его компактное (т. е. замкнутое и ограниченное) подмножество. Разумно также предполагать, что компактная область регуляторов является замыканием открытого множества. В качестве таких областей регуляторов интересно рассматривать шары, прямоугольники и т. д.

Подействуем на обе части равенства (1) полиномом $Y(p)$; на обе части равенства (2) – полиномом $N(p)$. Получим $Y(p)\cdot D(p)\cdot x = Y(p)\cdot N(p)\cdot u$, $N(p)\cdot Y(p)\cdot u = -N(p)\cdot X(p)\cdot x$. Теперь правая часть первого из равенств совпадает с левой частью второго равенства. Значит, $Y(p)\cdot D(p)\cdot x = -N(p)\cdot X(p)\cdot x$, или $(Y(p)\cdot D(p) + N(p)\cdot X(p))x = 0$.

Напомним, что полином $Y(p)\cdot D(p) + N(p)\cdot X(p)$ называется характеристическим полиномом системы управления. Коэффициенты этого полинома являются полиномами первой степени от параметров регулятора.

Обозначим через n степень характеристического полинома. Обычно его старший коэффициент равен единице. Остальные n коэффициентов пронумерованы по степеням (последовательность n элементов). Геометрически их можно рассматривать как точки пространства $\mathbb{R}^n$. Это ***пространство характеристических полиномов***.

Выписывая для конкретного регулятора характеристический полином, тем самым задаем отображение $\varphi:\mathbb{R}^{k+m+1}\to\mathbb{R}^n$ пространства параметров регулятора в пространство коэффициентов характеристического полинома. «Пробегая» все допустимые регуляторы, при этом отображении получим ***область возможных характеристических полиномов*** $O_K=(O_r)$. Если регулятор полного порядка, то отображение $\varphi:\mathbb{R}^{k+m+1}\to\mathbb{R}^n$ сюрьективно («накрывает» все пространство $\mathbb{R}^n$).

На пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим произвольный непрерывный критерий оптимальности $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Задача 1. Пусть задан объект управления; выбран полный класс регуляторов; задана область $U\subseteq\mathbb{R}^n$ и непрерывная функция $F:U\to\mathbb{R}$ (критерий оптимальности). Нужно найти минимум (максимум) этой функции в области U (т. е. нужно подобрать характеристический полином так, чтобы функция F достигала минимума (максимума)).

Конечно, для компактной области регуляторов эта задача имеет решение. Можно рассматривать также $U=\mathbb{R}^n$ и искать локальные минимумы (максимумы). Конечно же, потом (после нахождения «оптимального» характеристического полинома) можно «вернуться» к регуляторам (т. е. найти соответствующий «оптимальный» регулятор).

В линейной теории критерий оптимальности – обычно квадратичная форма. В качестве этого критерия рассмотрим произвольную положительно определенную квадратичную форму $F:U\to\mathbb{R}$.

В данной работе поставленная задача решается в следующей наиболее простой ситуации: характеристический полином системы управления имеет степень два и не имеет вещественных корней; допустимое множество регуляторов «накрывает» всю плоскость $\mathbb{R}^2$ коэффициентов характеристического полинома; регуляторы полного порядка, т. е. за счет подбора регуляторов коэффициенты характеристического полинома можно сделать любыми; в качестве критерия оптимальности рассматривается положительно определенная квадратичная форма x^2+v^2, где x – регулируемая величина, v – скорость ее изменения; на фазовой плоскости выбирается точка, отличная от начала координат; для этой точки в плоскости коэффициентов характеристического полинома ищутся локальные экстремумы критерия оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу стабилизации произвольной одноканальной системы управления, т. е. предполагаем, что задание нулевое. Предполагаем также, что характеристическое уравнение этой системы имеет вторую степень. Уравнение движения системы выглядит так:

$$\ddot{x}+c_1\dot{x}+c_0x=0\,. \tag{3}$$

Здесь $x = x(t)$ – регулируемая величина. Выпишем характеристический полином системы:

$$p^2 + c_1 p + c_0 \,. \tag{4}$$

Следовательно, нормальная форма уравнения движения системы:

$$\dot{x} = v\,,\ \dot{v} = -c_0 x - c_1 v\,. \tag{5}$$

Здесь $v = v(t)$ – скорость изменения регулируемой величины. Запишем сопровождающую матрицу [9, с. 203] характеристического полинома системы и затем нормальную форму уравнения движения системы в матричном виде:

$$\dot{X} = MX \text{ , где } X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -c_0, & -c_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Хорошо известно, что решение уравнения (6) в матричном виде выглядит так:

$$X(t) = \exp(Mt) \cdot X_0 \,, \tag{7}$$

где $X_0 = (x_0,\ v_0)^T$ – начальная точка фазовой плоскости (здесь T – транспонирование); $x_0 = x(0)$, $v_0 = v(0)$ – регулируемая величина и скорость ее изменения в начальный момент времени $t = 0$.

Рассмотрим регулятор полного порядка. В этом случае коэффициенты c_1, c_0 за счет параметров регулятора можно сделать любыми.

Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму $F(X) = (X, X)$. Скобками обозначено скалярное произведение; $X = X(t)$ – решение уравнения (6).

Решение $X = X(t)$ уравнения (6) зависит от коэффициентов c_1, c_0 характеристического полинома. Цель работы – поиск локальных минимумов для формы $F(X) = (X, X)$, рассматриваемой как функция коэффициентов характеристического полинома (более общо – поиск точек, подозрительных на экстремум, т. е. точек с нулевым градиентом).

2. РЕГУЛЯТОРЫ, ДЛЯ КОТОРЫХ КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИМЕЕТ НУЛЕВОЙ ГРАДИЕНТ

Из вида матрицы M в равенствах (6) найдем след матрицы M: $\mathrm{Sp}(M) = -c_1$. Запишем матрицу M как сумму скалярной матрицы и матрицы с нулевым следом: $M = qE + A$, где q – некоторое вещественное число; E – единичная матрица; A – матрица с нулевым следом. Тогда $\mathrm{Sp}(M) = q\mathrm{Sp}(E) + \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(M) = 2q$, $-c_1 = 2q$,

$$q = -c_1/2\,. \tag{8}$$

Значит, $M = \begin{pmatrix} 0 \ , \ 1 \\ -c_0, \ 2q \end{pmatrix}$, $A = M - qE = \begin{pmatrix} 0 \ , \ 1 \\ -c_0, \ 2q \end{pmatrix} - qE = \begin{pmatrix} -q \ , \ 1 \\ -c_0, \ q \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} -q \ , \ 1 \\ -c_0, \ q \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Теперь

$$e^{Mt} = \exp(qtE + At) = \exp(qtE)\exp(At) = e^{qt} E \exp(At) = e^{qt} \cdot \exp(At),$$

$$\exp(Mt) = \exp(qt)\exp(At). \tag{10}$$

Разложим экспоненту от матрицы At в ряд Тейлора:

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots = \left(E + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^4t^4}{4!} \ldots \right) + \left(E + \frac{A^2t^2}{3!} + \frac{A^4t^4}{5!} \ldots \right) At. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что для произвольной матрицы (2×2) с нулевым следом ее квадрат является скалярной матрицей. Вычислим квадрат матрицы A:

$$A^2 = (q^2 - c_0)E.$$

Чтобы понять, что такое число $q^2 - c_0$, вычислим дискриминант D характеристического полинома из формулы (4): $D = c_1^2 - 4c_0 = 4(q^2 - c_0)$. Значит,

$$q^2 - c_0 = \frac{D}{4}, \quad A^2 = \frac{D}{4}E. \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда характеристический полином не имеет вещественных корней (корни характеристического полинома образуют комплексную пару), т. е. $D < 0$. Рассмотрим вещественное число d такое, что $d > 0$, $d^2 = -D/4$. Теперь равенства (12) можно записать так:

$$c_0 = q^2 + d^2, \quad A^2 = -d^2E. \tag{13}$$

Из равенства (8) следует: q – полусумма корней характеристического полинома. Отсюда и из первого равенства (13) получим: $d > 0$ – мнимая часть комплексной пары корней характеристического полинома. Используя первое из равенств (13), матрицу A из равенства (9) можно записать через параметры q, d:

$$A = \begin{pmatrix} -q & , \ 1 \\ -(q^2 + d^2), & q \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из (11) и из второго равенства (13) получим:

$$\exp\left(At\right)=\left(E+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^4t^4}{4!}...\right)+\left(E+\frac{A^2t^2}{3!}+\frac{A^4t^4}{5!}...\right)At=$$

$$=\left(1-\frac{(dt)^2}{2!}+\frac{(dt)^4}{4!}...\right)E+\left(E-\frac{(dt)^2}{3!}+\frac{(dt)^4}{5!}...\right)At=\cos(dt)E+\frac{\sin(dt)}{dt}At,$$

$$\exp(At)=d^{-1}(d\cos(dt)E+\sin(dt)A)\,. \qquad (15)$$

Из равенств (10) и (15) следует

$$\exp(Mt)=\exp(qt)\exp(At)=d^{-1}\exp(qt)\left(d\cos(dt)E+\sin(dt)A\right).$$

Теперь используем равенство (7) и перепишем решение $X(t)$ уравнения (6):

$$X(t)=\exp(Mt)X_0=e^{qt}\exp(At)X_0=$$
$$=d^{-1}\cdot e^{qt}(d\cos(dt)E+\sin(dt)A)X_0.$$

Далее, учитывая (14), получим

$$X(t)=\frac{e^{qt}}{d}\begin{pmatrix}\left(d\cos(dt)-\sin(dt)q\right)x_0+\sin(dt)v_0\\ -\sin(dt)(d^2+q^2)x_0+(d\cos(dt)+\sin(dt)q)v_0\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Выпишем теперь скалярное произведение (X, X):

$$(X,\,X)=\frac{e^{2qt}}{d^2}\left(((dc-sq)x_0+sv_0)^2+\left(-s(d^2+q^2)x_0+(dc+sq)v_0\right)^2\right),$$

где
$$c=\cos(dt)\,,\quad s=\sin(dt)\,. \qquad (17)$$

Рассмотрим скалярное произведение (X, X) как функцию от параметров управления q, d. В точках экстремума частные производные этой функции по q, d равны нулю. Выпишем частную производную от (X, X) по q; умножим ее на ненулевое d^2 и поделим на ненулевое $\exp(2qt)$; синусы и косинусы от dt приведем к двойному углу; соберем слагаемые с x_0 , v_0 , с синусами и косинусами от $2dt$; приравняем к нулю:

$$((((d^2+q^2)^2+q^2)t+2q(d^2+q^2)+q)(1-C)+d^2t(1+C)+$$
$$-d(2qt+1)S)x_0^2+((2tq(d^2+q^2+1)+d^2+3q^2+1)(C-1)+ \qquad (18)$$
$$+2d(-(d^2+q^2)t-q+t)S)v_0x_0+$$

$$+(((d^2-q^2)t-q-t)C+d\,(2qt+1)S+(d^2+q^2)t+q+t)v_0^2=0\,,$$

где

$$C = \cos(2t)\,,\ S = \sin(2dt)\,. \tag{19}$$

Выпишем теперь частную производную от (X, X) по d; умножим ее на ненулевое d^3 и поделим на ненулевое exp(2qt)); синусы и косинусы от dt приведем к двойному углу; соберем слагаемые с x_0, v_0, с синусами и косинусами от 2dt; приравняем к нулю:

$$\begin{gathered}((-d^4 - 2d^2qt + q^4 + q^2)C + (((d^2+q^2)^2 - d^2 + q^2)t + q)dS + \\ +d^4 - q^4 - q^2)x_0^2 + (2((-d^2 - q^2 + 1)d^2t - (q^2+1)q)C + \\ +(-2qt(d^2+q^2+1) - d^2 + q^2 - 1)dS + 2q(q^2+1))v_0x_0 + \\ +((2d^2qt + q^2 + 1)C + ((-d^2+q^2+1)t - q)dS - q^2 - 1)v_0^2 = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

В последнем равенстве C, S также означают косинус и синус от 2dt.

Замечание 1. $\cos(2dt) \neq 1$ для решений уравнения (18) при $d \neq 0$, $t \neq 0$, если дополнительно $x_0 \neq 0$ или $v_0 \neq 0$. Поэтому cos(2dt) < 1 (ведь косинус не превосходит единицы).

Действительно, при cos(2dt) = 1 имеем sin(2dt) = 0. Подставим эти значения в равенство (18) и получим $2d^2t(v_0^2 + x_0^2) = 0$.

3. НУЛЕВОЕ НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ x_0

Рассмотрим сначала случай $x_0 = 0$. Выпишем для него формулы (18), (20):

$$(-C+1)tq^2 + (2Sdt - C + 1)q + ((d^2-1)C + d^2 + 1)t + Sd = 0\,,$$

$$(Sdt + C - 1)q^2 + (2Cd^2t - Sd)q + (-d^3 + d)St + C - 1 = 0\,. \tag{21}$$

Рассмотрим левые части равенств (21) как полиномы от q. Они второй степени. Чтобы оба равенства (21) были выполнены, необходимо, чтобы результант этих двух полиномов от q был равен нулю. Вычислим этот результант.

Вспомним, что $C = \cos(2dt)$ и $S = \sin(2dt)$. Введем обозначение $z = \exp(2dt \cdot I)$ (здесь и далее I – это мнимая единица). Выразим C, S через z:

$$C = \frac{z + z^{-1}}{2}\,,\ S = \frac{z - z^{-1}}{2I}\,.$$

Выразим в результанте C, S через z и разложим получившийся полином на множители. Приравняем к нулю и получим равенство

$$\frac{(z-1)^4}{16}\frac{(4d^2t^2z + z^2 - 2z + 1)^2}{z^4} = 0\,. \tag{22}$$

Имеем $z \neq 1$ (ведь $C \neq 1$ согласно замечанию 1 и $z = C + SI$). Значит,

$$g(z) = 0\text{, где } g(z) = z^2 + 2(2d^2t^2 - 1)z + 1. \qquad (23)$$

Далее, комплексное число, сопряженное к z, совпадает с обратным; числа t, d вещественные. Поэтому

$$\overline{g(z)} = z^{-2} + 2(2d^2t^2 - 1)z^{-1} + 1$$

(чертой над $g(z)$ обозначено сопряжение). Поделим полином $g(z)$ на сопряженный и разложим на множители. Получим $g(z)/\overline{g(z)} = z^2$, или $g(z)\cdot z^{-1} = \overline{g(z)}\cdot z$, т. е. $g(z)\cdot z^{-1} = \overline{g(z)\cdot z^{-1}}$. Последнее равенство означает, что число $g(z)\cdot z^{-1}$ вещественное.

Сделаем в $g(z)\cdot z^{-1}$ подстановку $z = C + IS$, $z^{-1} = C - IS$. Получим: $g(z)\cdot z^{-1} = 2(dt)^2 + C - 1$. Поэтому равенство $g(z) = 0$ равносильно

$$2(dt)^2 + \cos(2dt) - 1 = 0. \qquad (24)$$

Так как $2\sin(dt)^2 = 1 - \cos(2dt)$, то равенство (24) равносильно

$$2(dt)^2 - 2\sin(dt)^2 = 0,$$

или

$$\pm dt = \sin(dt). \qquad (25)$$

Но уравнение $\pm y = \sin(y)$ имеет только одно вещественное решение: $y = 0$. Поэтому равенство (25) выполнено только при $dt = 0$, но $t > 0$, $d > 0$.

Замечание 2. При $td \neq 0$ уравнение (24) не имеет вещественных решений.

Поэтому уравнение $g(z) = 0$ не имеет решений таких, что $|z| = 1$. Значит, уравнение (22) не имеет решений таких, что $|z| = 1$. Поэтому уравнения (21) совместно не решаются (ведь их результант по q не может обратиться в 0).

Итак, для совместных решений уравнений (18) и (20) получим $x_0 \neq 0$.

4. РЕЗУЛЬТАНТ

Обозначим через F_1, F_2 левые части равенств (18) и (20). Рассмотрим их как функции от x_0, v_0: $F_i = F_i(x_0, v_0)$, где i = 1, 2. Это однородные полиномы второй степени. При этом $x_0 \neq 0$. Значит,

$$F_i(x_0,\ v_0) = x_0^2 F_i(1,\ v_0/x_0)\text{, где } i = 1, 2.$$

Уравнения (18) и (20) имеют вид $F_i(x_0,\ v_0) = 0$; поэтому они равносильны

$$F_i(1,\ V) = 0\text{, где } V = v_0/x_0,\ i = 1, 2. \qquad (26)$$

Левые части в (26) являются полиномами второй степени от V. Обозначим результант этих полиномов через Res. Выпишем его:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}/2 = (8d^8t^4 - 8\sin(2dt)\,d^7t^3 + (-2\sin(4dt)\,d^5 + 4\sin(2dt)\,d^5)\,t - \\
&-d^4\cos(4dt) + 4\cos(2dt)\,d^4 - 3d^4)\,q^4 + ((-16\cos(2dt)\,d^8 + 16d^8)\,t^3 + \\
&+(-4d^6\cos(4dt) + 16\cos(2dt)\,d^6 - 12d^6)\,t)\,q^3 + \\
&((16d^{10} + 16d^8)\,t^4 - 16\sin(2dt)\,d^7t^3 + (-4\sin(4dt)\,d^5 + 8\sin(2dt)\,d^5)\,t + \\
&+(-2d^6 - 2d^4)\cos(4dt) + (8d^6 + 8d^4)\cos(2dt) - 6d^6 - 6d^4)\,q^2 + \\
&+(((-16d^{10} - 16d^8)\cos(2dt) + 16d^{10} + 16d^8)\,t^3 + \\
&+((-4d^8 - 4d^6)\cos(4dt) + (16d^8 + 16d^6)\cos(2dt) - 12d^8 - 12d^6)\,t)\,q + \\
&+(8d^{12} - 16d^{10} + 8d^8)\,t^4 + (8d^{11} - 8d^7)\sin(2dt)\,t^3 + \\
&+(-16\cos(2dt)d^8 + 16d^8)\,t^2 + ((2d^9 - 2d^5)\sin(4dt) + (-4d^9 + 4d^5)\sin(2dt))\,t + \\
&+(-d^8 - 2d^6 - d^4)\cos(4dt) + (4d^8 + 8d^6 + 4d^4)\cos(2dt) - 3d^8 - 6d^6 - 3d^4.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Уравнение $\mathrm{Res} = 0$ является необходимым условием разрешимости равенств (26) (т. е. из уравнений (26) следует уравнение $\mathrm{Res} = 0$). Для лучшей читаемости в правой части равенства (27) произведения синусов и косинусов выражены через синусы и косинусы большего аргумента; слагаемые сгруппированы по степеням q, t, по синусам и косинусам.

Опять воспользуемся обозначением $z = \exp(2dtI)$; выразим синусы и косинусы, участвующие в записи Res, через z:

$$\cos(2ndt) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin(2ndt) = \frac{z^n - z^{-n}}{2I}$$

(эти формулы верны для любого целого n). Выразим в Res синусы и косинусы по этим формулам через z. Полученный элемент обозначим через $\mathrm{Res}\,z$. Это элемент алгебры $\mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}]$. Это алгебра полиномов с комплексными коэффициентами от q, d, t, z, расширенная элементом z^{-1}:

$$\mathbb{R}[q,d,t,z] \subset \mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}] \subset \mathbb{R}(q,d,t,z),$$

где $\mathbb{R}(q,d,t,z)$ – поле частных алгебры полиномов $\mathbb{R}[q,d,t,z]$.

Ассоциативные коммутативные кольца с единицей и без делителей нуля, в которых выполнена теорема о единственности разложения на простые множители, называются факториальными; любая алгебра полиномов над произвольным полем является факториальной [10, 11]. Поэтому алгебра полиномов $\mathbb{R}[q,d,t,z]$ факториальная. Любой отличный от нуля элемент ее поля частных однозначно представляется в виде дроби (с точностью до умножения числителя и знаменателя дроби на отличное от нуля комплексное число). Поэтому в алгебре $\mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}]$ выполнена теорема об единственности разложения на простые множители. Разложим элемент $\operatorname{Res} z$ алгебры $\mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}]$ на простые множители:

$$\operatorname{Res} z = -d^4\, g_1\, g_2\, g_3 / z^2 \,, \tag{28}$$

где

$$g_1 = ((2dt+I)q^2 + 4Id^2qt - 2td^3 + Id^2 + 2dt + I)z - Id^2 - Iq^2 - I \,,$$

$$g_2 = (-Id^2 - Iq^2 - I)z + (-2dt+I)q^2 + 4Id^2qt + 2td^3 + Id^2 - 2dt + I \,,$$

$$g_3 = 1 + z^2 + (4d^2t^2 - 2)z \,. \tag{29}$$

Вспомним, что переменные *q*, *d*, *t* принимают вещественные значения; при любых вещественных значениях переменных *q*, *d*, *t* элемент Res также принимает только вещественные значения (это гарантирует равенство (27)).

Рассмотрим сопряжение как автоморфизм алгебры $\mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}]$ такой, что $\overline{q} = q$, $\overline{d} = d$, $\overline{t} = t$, $\overline{z} = z^{-1}$, $\overline{z^{-1}} = z$. Тогда $\operatorname{Res} z = \overline{\operatorname{Res} z} = -\overline{d^4}\, \overline{g}_1\, \overline{g}_2\, \overline{g}_3 / \overline{z^2} = -d^4\, \overline{g}_1\, \overline{g}_2\, \overline{g}_3\, z^2$. В частности, элементы g_i (i = 1, 2, 3) алгебры $\mathbb{R}[q,d,t,z,z^{-1}]$ являются делителями элемента Res *z*.

Элементы $\overline{g}_i$ можно получить из формул (29) заменой *I* на –*I*, *z* на z^{-1}. После этого, разлагая на множители, можно убедиться, что

$$g_1/\overline{g}_2 = -z \,,\ g_3/\overline{g}_3 = z^2 \,. \tag{30}$$

Значит, $g_3 = z^2\overline{g}_3$, $z^{-1}g_3 = z\overline{g}_3$, $z^{-1}g_3 = \overline{z^{-1}g_3}$, $g_1 = -z\cdot\overline{g}_2$, а поэтому $g_1g_2 = -z\,g_2\,\overline{g}_2$. Отсюда и из равенства (28) получим $\operatorname{Res} z = -d^4 g_1g_2g_3/z^2 = -d^4\,\dfrac{g_1g_2}{z}\,\dfrac{g_3}{z} = -d^4\,\dfrac{-zg_2\overline{g}_2}{z}\,\dfrac{g_3}{z}$. Отсюда справедлива

Лемма 1. $\operatorname{Res} z = d^4 g_2\overline{g}_2 g_3 z^{-1}$, где $g_2\overline{g}_2$, g_3z^{-1} вещественные.

Введем обозначение: *T* = 2*dt*. Тогда

$$z = \cos(T) + I\sin(T)\,,\ z^{-1} = \cos(T) - I\sin(T)\,.$$

Пользуясь этими формулами, легко убедиться, что

$$g_3z^{-1} = 2(2d^2t^2 + \cos(T) - 1)\,. \tag{31}$$

Имеем Res = 0. Поэтому Res *z* = 0. При этом $d \neq 0$. Поэтому по лемме 1

$$g_2\,\overline{g}_2\,g_3\,z^{-1} = 0\,. \tag{32}$$

Из замечания 2 и равенства (31) получим $g_3 z^{-1} \neq 0$. Отсюда и из (32) следует

Лемма 2. $g_2 \cdot \bar{g}_2 = 0$.

Рассмотрим второе из равенств (29) (формула полинома g_2). Сделаем в ней замену: $z = C + I\,S$, где $C = \cos(T)$, $S = \sin(T)$. Получим

$$g_2 = (d^2 + q^2 + 1)(S - IC) + (-2dt + I)q^2 + I(4d^2qt + d^2 + 1) + 2dt(d^2 - 1).$$

Вспомним, что I – это мнимая единица, а числа d, q, t, S, C – вещественные; найдем вещественную и мнимую части для g_2:

$$\Re(g_2) = (d^2 + q^2 + 1)S + 2dt(d^2 - q^2 - 1),$$
$$\Im(g_2) = (d^2 + q^2 + 1)(1 - C) + 4d^2qt.$$

Так как $g_2\bar{g}_2$ есть сумма квадратов вещественных и мнимых частей элемента g_2, то теперь из леммы 2 получим: вещественная и мнимая часть элемента g_2 равны нулю, т. е.

$$(d^2 + q^2 + 1)\,S + 2dt(d^2 - q^2 - 1) = 0,\ (d^2 + q^2 + 1)(1 - C) + 4d^2qt = 0.$$

В этих двух равенствах сделаем замену: $t = T/(2d)$. Получим

$$(d^2 + q^2 + 1)S + T(d^2 - q^2 - 1) = 0,\ (d^2 + q^2 + 1)(1 - C) + 2dqT = 0. \quad (33)$$

5. КВАДРАТИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНИМОЙ И ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЕЙ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Замечание 3. В уравнениях (33) имеем $1 - C > 0$, $d > 0$, $T > 0$, $q < 0$.

Действительно, $C = \cos(T)$, $T = 2dt$. При этом $1 - C > 0$ согласно замечанию 1. Отсюда и из второго из равенств (33) получим $2dqT < 0$. При этом $d > 0$ (это мнимая часть комплексной пары); $T > 0$, ведь $T = 2dt$, $d > 0$, $t > 0$ (контролируем ситуацию после начального момента времени $t = 0$). Значит, $q < 0$.

Далее, $T \neq 0$, ведь $T > 0$. При этом $d^2 + q^2 + 1 \neq 0$. Это позволяет собрать в равенствах (33), с одной стороны, d, q, а с другой – T; $C = \cos(T)$, $S = \sin(T)$:

$$\frac{1 + q^2 - d^2}{1 + q^2 + d^2} = \frac{\sin(T)}{T},\quad -\frac{2qd}{1 + q^2 + d^2} = \frac{1 - \cos(T)}{T}. \quad (34)$$

Фиксируем параметр $T > 0$ и рассмотрим равенства (34) как уравнения относительно параметров управления q, d.

Замечание 4. $\sin(T) < T$ при $T > 0$.

Действительно, $|\sin(T)| \leq |T|$ при любом вещественном T; равенство достигается только при $T = 0$. Поэтому $\sin(T) < T$ при $T > 0$.

Относительно параметров $q < 0$, $d > 0$ рассмотрим более общие уравнения:

$$\frac{1+q^2-d^2}{1+q^2+d^2}=a\,,\quad -\frac{2qd}{1+q^2+d^2}=b \tag{35}$$

(числа a, b произвольные, но фиксированы). Понятно, что уравнения (34) являются частным случаем уравнений (35) при

$$a=\sin(T)/T\,,\ b=(1-\cos(T))/T. \tag{36}$$

Замечание 5. Если уравнения (35) имеют решения $q < 0$, $d > 0$, то $a < 1$, $b > 0$.

Действительно, из первого равенства (35) видим, что $a < 1$; так как $q < 0$, $d > 0$, то из второго из равенств (35) получим $b > 0$.

Замечание 6. $d/q=-(1-a)/b$.

Действительно, из первого равенства (35) видно, что $1-a= =2d^2\big/(1+q^2+d^2)$. Отсюда и из второго равенства (35) получим $(1-a)\big/b=2d^2\big/(-2qd)=-d/q$.

Лемма 3. $a^2+b^2<1,\ q=-b\Big/\sqrt{1-a^2-b^2}$.

Действительно, $1-a^2=1-\dfrac{(1+q^2-d^2)^2}{(1+q^2+d^2)^2}=\dfrac{(1+q^2+d^2)^2-(1+q^2-d^2)^2}{(1+q^2+d^2)^2}$.

При этом $(1+q^2+d^2)^2-(1+q^2-d^2)^2=((1+q^2)+d^2)^2-((1+q^2)-d^2)^2= =4(1+q^2)d^2$.

Поэтому $1-a^2=4(1+q^2)d^2/(1+q^2+d^2)^2$. Значит,

$$1-a^2-b^2=4d^2\big/(1+q^2+d^2)^2. \tag{37}$$

При этом $d\neq 0$. Поэтому $1-a^2-b^2>0$, или $a^2+b^2<1$.

Из второго равенства (35) и из (37) получим $\dfrac{b^2}{1-a^2-b^2}=\dfrac{(2qd)^2}{4d^2}=q^2$.

При этом $b > 0$, $1-a^2-b^2>0$, $q < 0$. Поэтому $q=-b\Big/\sqrt{1-a^2-b^2}$. Лемма доказана.

Следствие 1. $d=(1-a)\Big/\sqrt{1-a^2-b^2}$.

В самом деле, $d=-(1-a)q/b$ согласно замечанию 6. При этом $-q/b=1\Big/\sqrt{1-a^2-b^2}$ согласно лемме 3. Поэтому $d=(1-a)\Big/\sqrt{1-a^2-b^2}$.

6. ДИСКРИМИНАНТ УРАВНЕНИЯ $F_1(1,\ V)=0$

Вернемся к уравнению (26) $F_1(1,\ V)=0$. Напомним, что F_1 – это левая части равенства (18) (частная производная по q исходной квадратичной формы); F_1 является полиномом от V второй степени. Обозначим его дискриминант через Dis и вычислим его:

$$2\mathrm{Dis}=(-4q^4+(8d^2-8)q^2-4d^4-8d^2-4)\cos(T)+$$
$$+(q^4+(-6d^2+2)q^2+d^4-2d^2+1)\cos(2T)+(8dq^3+(-8d^3+8d)q)\sin(T)+$$
$$+(-4dq^3+(4d^3-4d)q)\sin(2T)+3q^4+(-2d^2+6)q^2+3+3d^4+(-8T^2+10)d^2.$$

Подставим в Dis вместо q, d их выражение через a, b (лемма 3 и следствие 1); разложим получившееся выражение на множители. Получим

$$\mathrm{Dis}=\frac{(1-a)^2}{(1-a^2-b^2)^2}H,$$

где

$$H=(4b^2-4)\cos(T)+(a^2-b^2)\cos(2T)-4\sin(T)ab+$$
$$+2\sin(2T)ab+(2T^2-1)a^2+(2T^2-3)b^2-2T^2+4.$$

Подставим в H вместо a, b их выражение через T (равенства (36)). Получим

$$H=-2(T^2+2\cos(T)-2)^2/T^2.$$

Итак, справедлива

Лемма 4. $\mathrm{Dis}=-2\dfrac{(1-a)^2}{(1-a^2-b^2)^2}\dfrac{(T^2+2\cos(T)-2)^2}{T^2}.$

Вспомним, что $T=2dt$; из замечания 2 следует, что уравнение $T^2+2\cos(T)-2=0$ имеет только одно вещественное решение: $T=0$, а оно нас не интересует. Отсюда вытекает

Лемма 5. Dis < 0.

Следствие 2. Частная производная по q исходной квадратичной формы (уравнение (18)) при $q=-b\big/\sqrt{1-a^2-b^2}$, $d=(1-a)\big/\sqrt{1-a^2-b^2}$, $a=\sin(T)/T$, $b=(1-\cos(T))/T$ не может обращаться в ноль.

Следствие 3. В любой момент времени $t > 0$, для любой исходной точки фазовой плоскости $(x_0,v_0)\neq(0,0)$, частные производные исходной квадратичной формы по q, d, не могут одновременно обращаться в ноль.

Теорема 1. Рассмотрим произвольную одноканальную систему управления. Предположим, что ее характеристический полином имеет степень два, его корни не являются вещественными, а регулятор имеет полный порядок. В качестве фазового пространства рассмотрим плоскость (x,v), где x – регулируемая величина; v – скорость ее изменения. В качестве критерия оптимальности выбрана положительно определенная квадратичная форма x^2+v^2. Тогда значение этой формы в любой отличной от начала координат точке фазовой плоскости, как функция коэффициентов характеристического полинома, не имеет точек, подозрительных на экстремум (т. е. точек с нулевым градиентом).

7. ОДНОМАССОВАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим одномассовую систему – материальную точку на пружинке. На пружинке жесткости k закреплена масса m. Материальная точка осуществляет одномерные колебания. При отсутствии управляющего воздействия объект движется согласно следующему закону:

$$m\ddot{y}+ky=0\,.$$

Здесь y – отклонение массы от положения равновесия. Введем обозначения: w – скорость изменения регулируемой величины; $(y,w)^T$ – вектор-столбец с координатами y, w. Векторы $(y,w)^T$ образуют фазовую плоскость $\mathbb{R}^2$.

При этом движении в этой фазовой плоскости сохраняется энергия. Обозначим через E удвоенную энергию:

$$E(Y)=ky^2+mw^2\,.$$

Энергия является положительно определенной квадратичной формой от векторов $Y=(y,w)^T$ из фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим энергию как критерий оптимальности.

По формуле $(Y_1,Y_2)_E=(E(Y_1+Y_2)-E(Y_1)-E(Y_2))/2$ выпишем линеаризацию этой квадратичной формы:

$$(Y_1,Y_2)_E=ky_1y_2+mw_1w_2\,. \tag{38}$$

Здесь $Y_i=(y_i,w_i)^T$ для i = 1, 2. Линеаризацию будем рассматривать как скалярное произведение. Будем называть его ***энергетическим***.

Фазовая плоскость $\mathbb{R}^2$ вместе с энергетическим скалярным произведением будет евклидовым пространством. Для вычислений в этом пространстве нужно выбрать какой-нибудь ортонормированный базис. Обозначим через $\|Y\|_E$ длину вектора при энергетическом скалярном произведении.

Выберем сначала произвольный ненулевой вектор, например $e_1=(1,0)^T$. Для него $\|e_1\|_E^2=(e_1,e_1)_E=k$. Значит, $\|e_1\|_E=\sqrt{k}$. Нормируем его: $\left\|e_1/\sqrt{k}\right\|_E=1$.

Пользуясь формулой (38), выпишем подпространство $e_1^{\perp}$ векторов, ортогональных к вектору e_1: $e_1^{\perp}=(0,1)^T\cdot\mathbb{R}$. Это одномерное подпространство, порожденное вектором $e_2=(0,1)^T$. Вычислим длину этого вектора (при энергетическом скалярном произведении): $\|e_2\|_E^2=(e_2,e_2)_E=m$. Значит,

$$\|e_2\|_E=\sqrt{m}\,,\ \left\|e_2/\sqrt{m}\right\|_E=1\,.$$

Итак, векторы $\bar{e}_1=\left(1/\sqrt{k},0\right)^T$, $\bar{e}_2/\sqrt{k}=\left(0,1/\sqrt{m}\right)^T$ являются ортонормированным базисом фазовой плоскости с энергетическим скалярным произведением.

Для вектора $Y=(y,w)^T$ введем обозначения: x, v – его координаты в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$; $(x,v)_E^T$ – запись этого вектора в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Тогда $(y,w)^T=y\cdot e_1+w\cdot e_2=y\sqrt{k}\cdot\bar{e}_1+w\sqrt{m}\cdot\bar{e}_2=x\cdot\bar{e}_1+v\cdot\bar{e}_2$. Значит,

$$x=y\sqrt{k}\,,\ v=w\sqrt{m}\,. \tag{39}$$

Поэтому $(Y,Y)_E=x^2+v^2$, ведь $(Y,Y)_E=ky^2+mv^2=\left(y\sqrt{k}\right)^2+\left(v\sqrt{m}\right)^2=$ $=x^2+v^2$.

Запишем уравнение движения объекта при наличии управляющего воздействия: $m\ddot{y}+ky=u$. Здесь u – управляющее воздействие. В качестве управляющего воздействия рассмотрим ПД-регулятор: $u=(a+bp)e$, где p – дифференцирование по времени; e – ошибка. Рассмотрим задачу стабилизации: $e=-y$ (при нулевом задании). Тогда $u=-(a+bp)y$, $m\ddot{y}+b\dot{y}+(a+k)y=0$, $\ddot{y}+(b\dot{y}+(a+k)y)/m=0$. Запишем последнее уравнение в нормальной форме:

$$\dot{y}=w,\ \dot{w}=-((a+k)y+bw)/m\,. \tag{40}$$

Запишем формулы, обратные к (39): $y=x/\sqrt{k}$, $w=v/\sqrt{m}$. Используя их, перейдем в уравнениях (40) к параметрам x, v:

$$\frac{dx}{dt}=v\sqrt{\frac{k}{m}}\,,\ \frac{dv}{dt}=-\frac{a+k}{\sqrt{km}}x-\frac{b}{m}v\,. \tag{41}$$

Размерность жесткости k пружины есть масса, деленная на квадрат времени. Поэтому размерность параметра k/m обратна квадрату времени. Значит, размерность параметра $\sqrt{k/m}$ обратна времени. Поэтому величина

$$\tau=t\sqrt{k/m} \tag{42}$$

безразмерна. Это безразмерное время (время, отмеряемое в единицах $\sqrt{m/k}$).

Исключим из уравнений (41) время t по формуле $t=\tau\sqrt{m/k}$. Получим

$$\frac{dx}{d\tau}=v\,,\ \frac{dv}{d\tau}=-\frac{a+k}{k}x-\frac{b}{\sqrt{km}}v\,.$$

Сравнивая с формулами (6), видим

$$c_0 = (a+k)/k\,,\ c_1 = b\big/\sqrt{km}\,. \tag{43}$$

Вычислим теперь дискриминант D характеристического полинома из формулы (4): $D = c_1^2 - 4c_0 = \dfrac{b^2}{km} - 4\dfrac{a+k}{k} = \dfrac{b^2 - 4(a+k)m}{km}$. Тогда $D < 0$ равносильно

$$b^2 < 4(a+k)m\,. \tag{44}$$

Из формулы (8) и из второй формулы (43) получим

$$q = -b\Big/\left(2\sqrt{km}\right). \tag{45}$$

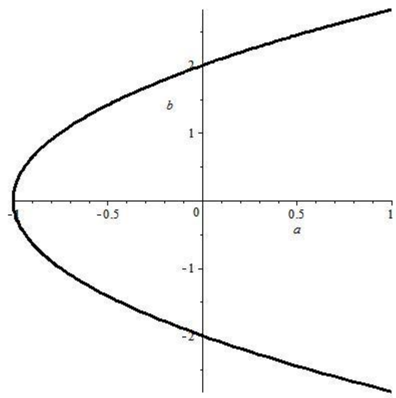
Теперь из первых равенств (13), (43) и из равенства (45) следует

$$d^2 = c_0 - q^2 = \frac{a+k}{k} - \frac{b^2}{4km} = \frac{4m(a+k) - b^2}{4km}\,.$$ При этом $d > 0$.

Поэтому

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m(a+k) - b^2}{km}}\,. \tag{46}$$

8. ПРИМЕР



Рассмотрим конкретную одномассовую систему. Например, $k = 1$, $m = 1$. Чтобы воспользоваться теоремой 1, должно быть выполнено неравенство (44). Сейчас это

$$b^2 < 4(a+1)\,. \tag{47}$$

Из последнего равенства следует $a > -1$. Для наглядности нарисуем параболу $b^2 = 4(a+1)$. Неравенство (47) равносильно тому, что точка (a, b) лежит внутри параболы (правее кривой). Выберем какой-нибудь прямоугольник, точки которого удовлетворяют этим условиям. Например,

$$0 \le a \le 1\,,\ -1 \le b \le 1\,. \tag{48}$$

Задача 2. Одномассовая система имеет массу $m = 1$ и жесткость $k = 1$; ее начальное отклонение $y_0 = 1$; начальная скорость изменения отклонения $w_0 = 1$. Найти параметры ПД-регулятора a, b из прямоугольной области (48), обеспечивающие минимум энергии в момент времени $t_1 = 1$.

Решение. Шаг 1. Подставим $m = 1$, $k = 1$ в формулу (39). Получим $x = y$, $v = w$. Эти равенства при $t = 0$ дают $x_0 = y_0$, $v_0 = w_0$.Вспомним о начальном состоянии объекта: $y_0 = 1$, $w_0 = 1$. Получим $x_0 = 1$, $v_0 = 1$.

Шаг 2. Подставим $m = 1$, $k = 1$ в формулу (42). Получим $\tau = t$. Отсюда в «финальный» момент времени $t_1 = 1$ получим «финальное» «безразмерное время» $\tau_1 = 1$.

Шаг 3. Чтобы в данной задаче применить теорему 1, нужно в формуле (17) для критерия оптимальности (X, X) вместо времени t рассматривать безразмерное время τ. При этом нужно рассматривать финальное время. В итоге в формулу (17) нужно подставить $t = 1$ (сначала вместо t подставить τ, вместо τ подставить τ_1; наконец вспомним, что $\tau_1 = 1$).

Подставим также в формулу (17) $x_0 = 1$, $v_0 = 1$. Получим

$$E = \exp(2q)((dc - sq + s)^2 + (-s(d^2 + q^2) + dc + sq)^2)/d^2 ,$$

где
$$c = \cos(d), \quad s = \sin(d). \tag{49}$$

Здесь E – критерий оптимальности (удвоенная энергия объекта) в финальный момент времени.

Шаг 4. Подставим $m = 1$, $k = 1$ в формулы (45) и (46). Получим

$$q = -\frac{b}{2}, \quad d = \frac{1}{2}\sqrt{4(a+1) - b^2} \, . \tag{50}$$

Шаг 5. Подставим в формулы (49) вместо q, d их выражение через a, b:

$$E = \frac{e^{-b}\left(\left(c\sqrt{4(a+1)-b^2} + sb + 2s\right)^2 + \left(-2s(a+1) + c\sqrt{4(a+1)-b^2} - sb\right)^2\right)}{4(a+1) - b^2},$$

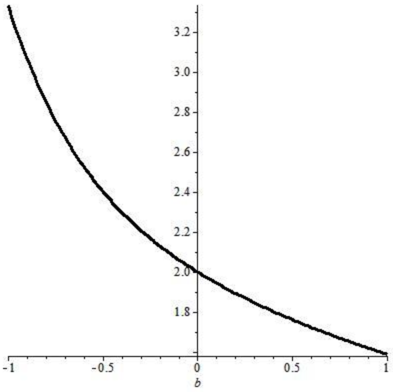
где
$$c = \cos\left(2^{-1}\sqrt{4(a+1)-b^2}\right), \quad s = \sin\left(2^{-1}\sqrt{4(a+1)-b^2}\right). \tag{51}$$

Шаг 6. Вычислим значение функции $E(a, b)$ на границе $a = 0$ прямоугольной области (48). Для этого подставим $a = 0$ в формулы (51). Получим

$$c = \cos\left(\sqrt{1 - b^2/4}\right), \quad s = \sin\left(\sqrt{1 - b^2/4}\right),$$

$$E(0,b) = e^{-b}\left(\left(c\sqrt{4-b^2} + s(b+2)\right)^2 + \left(-2s + c\sqrt{4-b^2} - sb\right)^2\right)\Big/(4-b^2) \, . \tag{52}$$

Рассмотрим $E(0,\, b)$ как функцию параметра b. Нарисуем ее на интервале $-1 \le b \le 1$.



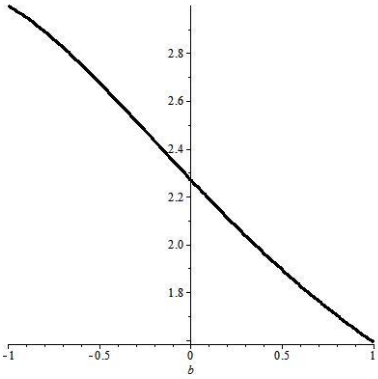
Как видим, на этом интервале функция $E(0,b)$ монотонно убывает и достигает наименьшего значения при $b = 1$. Вычислим его:

$$E(0,1) \approx 1{,}59.$$

Шаг 7. Вычислим значение функции $E(a,\, b)$ на границе $a = 1$ прямоугольной области (48). Для этого подставим $a = 1$ в формулы (51). Получим

$$c = \cos\left(2^{-1}\sqrt{8-b^2}\right),\; s = \sin\left(2^{-1}\sqrt{8-b^2}\right),$$

$$E(1,\, b) = e^{-b}\left(\left(c\sqrt{8-b^2} + sb + 2s\right)^2 + \left(-4s + c\sqrt{8-b^2} - sb\right)^2\right)\Big/(8-b^2). \quad (53)$$



$E(1,\, b)$ есть функция параметра b. Нарисуем ее на интервале $-1 \le b \le 1$.

Как видим, на этом интервале функция $E(1,\, b)$ монотонно убывает и достигает наименьшего значения при $b = 1$. Вычислим его:

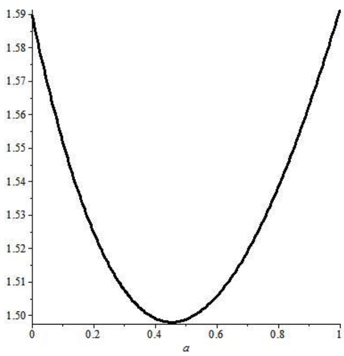
$$E(1,1) \approx 1{,}591.$$

Шаг 8. Вычислим значение функции $E(a,\, b)$ на границе $b = 1$ прямоугольной области (48). Для этого подставим $b = 1$ в формулы (51). Получим

$$c = \cos\left(2^{-1}\sqrt{4a+3}\right),\; s = \sin\left(2^{-1}\sqrt{4a+3}\right),$$

$$E(a,1) = e^{-1}\left(\left(c\sqrt{4a+3} + 3s\right)^2 + \left(-2s(a+1) + c\sqrt{4a+3} - s\right)^2\right)\Big/(4a+3). \quad (54)$$

$E(a,\, 1)$ есть функция параметра a. Нарисуем ее на интервале $0 \le a \le 1$.



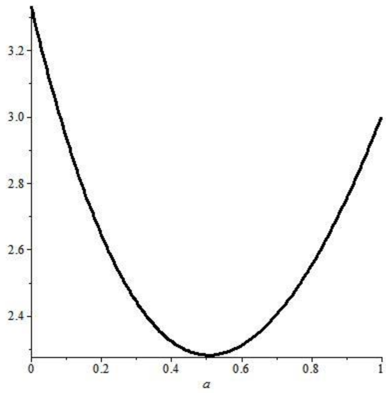
Как видим, на этом интервале функция $E(a,\, 1)$ достигает минимума не на концах отрезка, а в точке локального минимума. Вычислим эту точку:

$$E(a,1) \approx 1{,}498 \text{ при } a \approx 0{,}45. \quad (55)$$

Шаг 9. Вычислим значение функции $E(a,\, b)$ на границе $b = -1$ прямоугольной области (48). Для этого подставим $b = -1$ в формулы (51). Получим

$$c=\cos\left(2^{-1}\sqrt{4a+3}\right),\ s=\sin\left(2^{-1}\sqrt{4a+3}\right),$$

$$E(a,-1)=e\left(\left(c\sqrt{4a+3}+s\right)^2+\left(-2s(a+1)+c\sqrt{4a+3}+s\right)^2\right)\Big/(4a+3) \quad (56)$$



$E(a,-1)$ есть функция параметра a. Нарисуем ее на интервале $0\le a\le 1$.

Как видим, на этом интервале функция $E(a,-1)$ достигает минимума не на концах отрезка, а в точке локального минимума. Вычислим эту точку: $E(a,-1)\approx 2,282$ при $a\approx 0,51$.

Шаг 10. Сравним наименьшие значения функции $E(a,b)$ на границах прямоугольной области (48) (предыдущие четыре шага).

Вывод. На границе прямоугольника наименьшее значение достигается при $b=1$ (формула (55)). Значит, это наименьшее значение во всей прямоугольной области (по теореме 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема 1 позволяет находить минимумы критерия оптимальности (положительно определенной квадратичной формы) на границе допустимой области коэффициентов характеристического полинома (по крайней мере, при условии компактности этой области).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 392 с.

2. *Корюкин А.Н.* Предел устойчивости двухмассовой системы с обобщенным ПИД-регулятором // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 3 (48). – С. 178–184.

3. *Корюкин А.Н.* Наибольший запас устойчивости для одноканальной двухмассовой системы с обобщенным ПИД-регулятором // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 4 (49). – С. 178–185.

4. *Корюкин А.Н.* Обобщенный ПИД-регулятор двухмассовой системы с наибольшим запасом устойчивости // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3 (52). – С. 10–17.

5. *Корюкин А.Н., Воевода А.А.* Наибольшая степень устойчивости двухмассовой системы для регуляторов пониженного порядка // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2014. – № 1 (31). – С. 229–237.

6. *Корюкин А.Н.* Степень устойчивости ПИД-регулируемой двухмассовой системы с двукратным вещественным корнем и комплексной парой на одной вертикали // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. –2014. – № 3 (43). – С. 120–126.

7. *Корюкин А.Н.* Разложение на простые множители невырожденных полиномиальных матриц // Научный вестник НГТУ. – 2014. – № 3 (56). – С. 23–36.

1. *Корюкин А.Н., Воевода А.А.* Наибольшая степень устойчивости трехмассовой системы с регулятором пониженного порядка // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 5: Информационные технологии. – С. 52–59.
9. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. – СПб.: М.: Краснодар: Лань, 2009. – 470 с.
102. *Бурбаки Н.* Алгебра. Т. 3. Модули, кольца, формы: пер. с фр. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 554 с.
11. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971. – 706 с.
12. *Anthaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. – Boston: Birkhauser, 2006. – 670 p.
13. *Wang Q.-G.* Decoupling control. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. – 356 p.
14. *Vidyasagar M.* Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 1. – San Rafael, California: Morgan & Claypool, 2011. – 184 p.
15. *Vidyasagar M.* Control system synthesis: a factorization approach. Pt. 2. – San Rafael, California: Morgan & Claypool, 2011. – 227 p.
16. *Kailath T.* Linear systems. – Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1980. – 704 p.
17. *Wolovich W.* Linear multivariable systems. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1974. – 372 p.
18. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (основные понятия): учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.
19. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (синтез): конспект лекций. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1995. – 94 с.

Корюкин Анатолий Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. Соболева СО РАН. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления. Имеет около 50 публикаций. E-mail: koryukin@ngs.ru

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – многоканальные системы в теории автоматического управления. Имеет более 300 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Local extrema of the quadratic criterion of control system optimality with a characteristic polynomial of degree *

A.N. KORYUKIN[1], *A.A. VOEVODA*[2]

[1] *Sobolev Mathematical Institute, 4, Academician Koptyg Prospekt, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, PhD (Phys&Math), senior research worker. E-mail: koryukin@ngs.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt. Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru*

Let the control system be a single-channel systeml, and its characteristic equation have degree two and no material roots. Let the regulator also have a full order.

It is possible to consider that any characteristic polynomial has a unity senior coefficient. Each admissible regulator sets a characteristic polynomial. In this situation, these polynomials are set by pairs of their coefficients (degrees 0, 1). Geometrically these pairs can be considered as a plane point. Let's designate it by *P*. Comparing each admissible regulator with its characteristic polynomial, we obtain the mapping of a set of admissible regulators on some set of

* *Received 21 October 2014.*

Work is executed at financial support of the Minobrnauka Russia state job № 2014/138, the theme of the project “New patterns, models and algorithms for breakthrough methods of control of technical systems based on high results intellectuality activity”.

points of the plane *P* (area of admissible points of the plane *P*). In this situation the phase space (*x*,*v*) (where *x* is an adjustable size, *v* is a speed of its change) is two-dimensional and geometrically is a plane. A positively defined quadratic form is considered as an optimality criterion. Also, a "final" time point is chosen. The value of a quadratic form at a final time point is a function of characteristic polynomial coefficients.

By means of Maple it is shown that this function has no points, suspicious at the extremum point (that is, there are no points with a zero gradient), and on the whole plane *P*. It makes it possible to limit the search of the regulators having restrictions and minimizing the chosen optimality quadratic criterion to regulators for which a pair from P lies on the border of the admissible points area of the plane *P* (at least for a compact domain).

Keywords: local extremum, automatic control, single-channel systems, full order, problem of stabilization, Maple, matrix exhibitor, characteristic polynomial

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-1-40-61

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1976. 392 p.

2. Koryukin A.N. Predel ustojchivosti dvuhmassovoj sistemy s obobschennym PID-regulyatorom [Stability limit of the two-mass system for the generalized PID-controller]. *Nauchnyj vestnik NGTU – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 3 (48), pp. 178–184.

3. Koryukin A.N. Naibol'shii zapas ustoichivosti dlya odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy s obobshchennym PID-regulyatorom [Maximum stability degree for two-mass SISO system with generalized PID-controller]. *Nauchnyj vestnik NGTU – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 4 (49), pp. 178–185.

4. Koryukin A.N. Obobshchennyi PID-regulyator dvukhmassovoi sistemy s naibol'shim zapasom ustoichivosti [The generalized PID-regulator of the two-mass system with the greatest stock of stability]. *Nauchnyj vestnik NGTU – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 3 (52), pp. 10–17.

5. Koryukin A.N., Voevoda A.A. Naibol'shaya stepen' ustoichivosti dvukhmassovoi sistemy dlya regulyatorov ponizhennogo poryadka [The greatest degree of the stability of a two-mass system for regulators of the lowered order]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki – Proceedings of Tomsk state university of control systems and radioelectronics*, 2014, no. 1 (31), pp. 229–237.

6. Koryukin A.N. Stepen' ustoichivosti PID-reguliruemoi dvukhmassovoi sistemy s dvukratnym veshchestvennym kornem i kompleksnoi paroi na odnoi vertikali [The stability degree of a PID-control two-mass system with the double real root and complex pair on the right vertical both]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System analysis. Modeling*, 2014, no. 3 (43), pp. 120–126.

7. Koryukin A.N. Razlozhenie na prostye mnozhiteli nevyrozhdennykh polinomial'nykh matrits [The decomposition on simple multipliers of nondegenerate polinomialny matrixes]. *Nauchnyj vestnik NGTU – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 3 (56), pp. 23–36.

8. Koryukin A.N., Voevoda A.A. Naibol'shaya stepen' ustoichivosti trekhmassovoi sistemy s regulyatorom ponizhennogo poryadka [Maximum stability degree of a threemass system with a lower-order controller]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Informatsionnye tekhnologii – Bulletin of the Tomsk polytechnic university. IT Technologies*, 2014, vol. 325, no. 5, pp. 52–59.

9. Mal'tsev A.I. *Osnovy lineinoi algebry* [Foundations of linear algebra]. St.-Petersburg, Moscow, Krasnodar, Lan' Publ., 2009. 470 p.

10. Bourbaki N. *Elements de mathematique. Premiere partie. Les structures fondamentales de L'analyse. Livre II. Algebre* [Elements of mathematics. Algebra II]. Paris, Hermann et Cie., 1964 (Russ. ed.: Burbaki N. *Algebra. Moduli, kol'tsa, formy*. *T. 3*. Translated from French. Moscow, Nauka Publ., Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1966. 554 p.).

11. Bourbaki N. *Elements de mathematique. Livre VII. Algebre commutative* [Elements of mathematics. Commutative algebra]. Paris, Hermann, 1961 (Russ. ed.: Burbaki N. *Kommutativnaya algebra*. Translated from French. Moscow, Mir Publ., 1971. 706 p.).

12. Anthaklis P.J., Michel A.N. *Linear systems*. Boston, Birkhauser, 2006. 670 p.

13. Wang Q.-G. *Decoupling control*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2003. 356 p.

14. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 1. San Rafael, California, Morgan & Claypool, 2011. 184 p.

15. Vidyasagar M. *Control system synthesis: a factorization approach*. Pt. 2. San Rafael, California, Morgan & Claypool, 2011. 227 p.

16. Kailath T. *Linear systems*. Englewood Cliffs, New Jork, Prentice-Hall, 1980. 704 p.

17. Wolovich W. *Linear multivariable systems*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1974. 372 p.

18. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii (osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions (the main concepts)]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

19. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii (sintez)* [Matrix transfer functions (synthesis)]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1995. 94 p.

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 58, No.1, 2015, pp. 40–61