ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 58, № 1, 2015, с. 62–75

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 58, No. 1, 2015, pp. 62–75

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL
AND IDENTIFICATION

УДК 517.98

Метод идентификации линейных динамических систем по входному синусоидальному воздействию*

А.Д. МИЖИДОН[1], Е.А. МАДАЕВА[2]

[1] *670013, РФ, г. Улан-Удэ, Ключевская ул., 40В, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, доктор технических наук, профессор. E-mail: miarsdu@esstu.ru*
[2] *670013, РФ, г. Улан-Удэ, Ключевская ул., 40В, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, аспирант. E-mail: elenamadaeva@gmail.com*

В данной работе рассматривается обобщение подхода к идентификации линейных стационарных динамических систем по результатам измерений координат фазового вектора на некотором промежутке времени, предложенного авторами ранее, на случай идентификации модели объекта по реакции на некоторый синусоидальный сигнал. Согласно этому подходу идентификация матрицы системы сводится к построению и решению матричного линейного алгебраического уравнения. Построение уравнения основано на сопоставлении представления решений задачи Коши в виде экспоненциального матричного ряда и результатов решения задачи интерполяции исходных таблично заданных решений. Для реализации численных экспериментов было составлено программное обеспечение. Результаты численных экспериментов показали, что идентификация системы используемым подходом позволяет по точным решениям задачи Коши восстановить систему полностью. В общем случае, производя идентификацию по табличным данным некоторой задачи Коши, получили отклонения, связанные с точностью табличных данных и выбранного метода интерполяции полиномами Лагранжа, использование которых предложено для наглядности рассматриваемого подхода. Дальнейшее исследование предполагает как повышение вычислительных возможностей подхода, используя и другие методы интерполирования и аппроксимации табличных данных измерений фазовых координат системы на заданном промежутке времени, так и развитие самого подхода и применение подхода к другим системам.

Ключевые слова: идентификация, активная идентификация, линейная система, задача Коши, фундаментальная матрица, матричная экспонента, система линейных алгебраических уравнений, интерполирование

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-1-62-75

* *Статья получена 03 декабря 2014 г.*
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-08-00309-а

ВВЕДЕНИЕ

Появление вычислительной техники вызвало широкий интерес к проведению исследований, связанных с разработкой технологий математического моделирования различных объектов, процессов современной науки и техники. Одним из основных этапов, реализующих технологии математического моделирования, является создание и идентификация математической модели, исследуемого объекта. При этом различают идентификацию в широком смысле – структурная идентификация и в узком смысле – параметрическая идентификация.

В настоящее время предложенная Н. Винером идеология проведения эксперимента с «черным ящиком» (опытного отождествления модели «черного ящика» с объектом-оригиналом) лежит в основе многочисленных разработанных методов идентификации. При этом на начальном этапе эксперимента «черный ящик» представляет собой некоторую систему, о структуре и внутренних свойствах которой ничего не известно. Однако внешние факторы, воздействующие на этот объект (входы), и выходы, представляющие собой реакции на входные воздействия, доступны для наблюдений (измерений) в течение некоторого времени. В широком смысле задача идентификации заключается в том, чтобы по наблюдаемым данным о входах и выходах построить математическую модель функционирования рассматриваемой системы. При рассмотрении задачи идентификации в узком смысле предполагают, что известны структура и класс моделей, описывающих реальную систему. В этом случае задача идентификации сводится к определению параметров математической модели (параметрическая идентификация).

Проблема идентификации, связанная с построением математических моделей динамических систем по экспериментальным данным, относится к одной из основных проблем теории и практики автоматического управления. Формирование теории идентификации систем в значительной мере было стимулировано основополагающими работами Аоки М., Гропа Д., Дейча А.М., Медича Дж., Мелса Дж., Райбмана Р.С., Сейджа Э., Цыпкина Я.З., Эйкхоффа П. [1–8] и других. Первоначально методология построения динамических моделей развивалась в рамках пассивного подхода, при котором идентификация проводится в режиме нормальной эксплуатации исследуемой системы. Современная теория включает в себя также методы активной идентификации, предполагающие подачу на вход исследуемой системы определенным образом синтезированных управляющих сигналов.

Несмотря на то что в теории идентификации систем класс стационарных линейных динамических систем является достаточно изученным, продолжается исследование этих систем, реализация синтезов как уже имеющихся методов, так и разработка новых. Это связано по ряду причин с широким применением линейных зависимостей во многих областях. Так, в работе [9] был предложен подход к идентификации линейных стационарных динамических систем по результатам проведенных измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени. В работе рассматривается задача идентификации системы как обратная задача к задаче Коши. Данная статья является обобщением подхода, изложенного в работе [9], для разработки активного метода идентификации, предполагающего подачу на вход объекта специально сформированных синусоидальных воздействий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача идентификации линейных стационарных динамических систем по результатам проведенных измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени. Пусть в результате проведения некоторых экспериментов над объектом замерены его входные (начальное состояние объекта) $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)^T$ и выходные (состояние объекта в моменты времени t) переменные $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ как функция времени. Требуется определить структуру и параметры некоторого оператора, ставящего в соответствие входным переменным x^0 выходные переменные $x(t)$ в моменты времени t.

Будем считать, что состояние объекта $x(t)$ (выход) в моменты времени t по начальному состоянию x^0 (вход) является решением некоторой задачи Коши

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x^0.$$

В данном случае под структурной идентификацией модели следует понимать определение структуры правых частей $f(x)$ системы. Отметим, в настоящее время для решения данной задачи в общем случае не существует универсальных методов. В связи с этим при решении практических задач структура правых частей $f(x)$ системы, как правило, задается.

Во многих случаях достаточно адекватным является предположение о линейности. При этом линейные системы позволяют достаточно полно отразить качественные взаимовлияния переменных, характеризующих состояние объекта. Например, при рассмотрении виброзащитных систем имеет место предположение о малости отклонений фазовых координат от положения равновесия, что позволяет ограничиваться линейными моделями [10–12].

Будем считать, что состояние $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)^T$ некоторого объекта (процесса) описывается стационарной системой линейных дифференциальных уравнений [9]

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ – начальное состояние объекта,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – n-мерная квадратная матрица.

Задача параметрической идентификации сводится к отысканию матрицы A, которая обеспечивает в некотором смысле близость решений задачи (1) и экспериментальных данных.

Пусть в результате проведенного эксперимента при начальном состоянии объекта x^0 определены в моменты времени $t_1,..., t_k$ значения фазового вектора $x(t)$, определяющего состояние объекта. Можно считать, что в результате эксперимента задана таблично n-мерная вектор-функция $x(t)$ (табл. 1) с компонентами $(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))^T$ на промежутке $[t_0, t_k]$. При этом будем полагать количество измерений не меньше чем размерность фазового вектора $k \geq n$.

Таблица 1

t	t_0	t_1	…	t_k
$x_1(t)$	x_1^0	x_1^1	…	x_1^k
$x_2(t)$	x_2^0	x_2^1		x_2^k
$x_n(t)$	x_n^0	x_n^1		x_n^k

Предположим, что данный набор функций $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, заданный таблично, является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений (1).

Таким образом, поставим задачу поиска матрицы A системы (1) по таблично заданным значениям функций $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ в точках $t_0, t_1,..., t_k$, являющихся решением задачи Коши (1).

2. ПОДХОД К ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Решение задачи (1), согласно формуле Коши, можно записать в виде $x(t) = F(t, t_0)x^0$.

Таким образом, решение задачи Коши (1) можно записать в виде матричного ряда

$$x(t) = x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i x^0 (t - t_0)^i}{i!}. \tag{2}$$

С другой стороны, разложение решений системы (1) $x(t)$ в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки t_0 имеет вид

$$x(t) = x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{(i)}(t_0)(t - t_0)^i}{i!}. \tag{3}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в (2) и (3):

$$\begin{cases} Ax^0 = x^{(1)}(t_0), \\ A^2x^0 = A(Ax^0) = x^{(2)}(t_0) \ , \\ \qquad \dots \\ A^nx^0 = A(A^{n-1}x^0) = x^{(n)}(t_0). \end{cases}$$

Отсюда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax^0 = x^{(1)}(t_0), \\ Ax^{(1)}(t_0) = x^{(2)}(t_0), \\ \qquad \dots \\ Ax^{(n-1)}(t_0) = x^{(n)}(t_0). \end{cases}$$

Таким образом, для нахождения матрицы получили матричное алгебраическое уравнение относительно матрицы A

$$AX^0 = X^1, \tag{4}$$

где матрицы X^0 и X^1 определяются следующим образом:

$$X^0 = \left(x(t_0), x^{(1)}(t_0) \dots, x^{(n-1)}(t_0)\right), \ X^1 = \left(x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)\right). \tag{5}$$

Решив матричное алгебраическое уравнение (4), найдем

$$A = X^1\left(X^0\right)^{-1}. \tag{6}$$

Здесь матрицы X^0 и X^1 были получены по (5) из точных представлений решений задачи Коши (1). При идентификации по экспериментальным данным (табл. 1) будем использовать значения производных интерполяционных полиномов, вычисленные в точке $t = t_0$ [1].

В целом идентификация системы сводится к следующему:

1) проводится интерполирование входных данных;

2) строятся матрицы X^0 и X^1 с использованием производных интерполяционных представлений, найденных на шаге 1;

3) решается уравнение $AX^0 = X^1$.

В качестве примера рассмотрим задачу идентификации системы по заданным дискретным данным (табл. 2) согласно изложенному подходу.

Таблица 2

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	2.75	2	1.5	1
0.1	2.989804	2.211009	1.768273	1.215688
0.2	3.263544	2.448160	2.076385	1.465683
0.3	3.578014	2.717880	2.429746	1.754817
0.4	3.940495	3.027003	2.834467	2.088555
0.5	4.358871	3.382878	3.297442	2.473082
0.6	4.841751	3.793489	3.826450	2.915390

Используя табличные данные (табл. 2), найдем интерполяционные полиномы Лагранжа и их производные согласно изложенному в [9]. В табл. 3 приведены производные до 4-го порядка интерполяционных полиномов при $t=0$.

Таблица 3

j	$P_j(0)$	$P_j^{(1)}(0)$	$P_j^{(2)}(0)$	$P_j^{(3)}(0)$	$P_j^{(4)}(0)$
1	2.75	2.24996	2.75023	6.24433	2.84321
2	2	2.00005	1.99940	6.00985	1.89430
3	1.5	2.49992	3.50034	4.49297	5.59892
4	1	1.99996	3.00015	3.99662	5.05349

Здесь $P_j^{(i)}(0)$ обозначает производную i-го порядка полинома Лагранжа, составленного по табличным значениям $x_j(t)$ (табл. 2), при $t=0$ для всех $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$.

В соответствии с табл. 3 значения матриц X^0 и X^1 представляются следующим образом:

$$X^0=\begin{pmatrix} 2.75 & 2.249996 & 2.750213 & 6.244333 \\ 2 & 2.000015 & 1.999480 & 6.009805 \\ 1.5 & 2.499992 & 3.500324 & 4.492917 \\ 1 & 1.999996 & 3.000145 & 3.996622 \end{pmatrix},$$

$$X^1=\begin{pmatrix} 2.249996 & 2.750213 & 6.244333 & 2.843211 \\ 2.000015 & 1.999480 & 6.009805 & 1.894330 \\ 2.499992 & 3.500324 & 4.492917 & 5.598932 \\ 1.999996 & 3.000145 & 3.996622 & 5.053469 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, согласно формуле (6) получим матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} 2.990789 & -3.949929 & -0.141009 & 2.136699 \\ 4.007276 & -5.017346 & -1.976991 & 3.980184 \\ -0.008410 & -0.038409 & 2.900320 & -1.904179 \\ -0.004176 & -0.021052 & 1.942604 & -0.944531 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A решения системы (1), представленные с точностью 10^{-6}, приведены в табл. 4.

Таблица 4

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
0.0	2.75	2	1.5	1
0.1	2.989804	2.211009	1.768274	1.215688
0.2	3.263549	2.448161	2.076388	1.465685
0.3	3.578044	2.717887	2.429764	1.754828
0.4	3.940614	3.027032	2.834537	2.088599
0.5	4.359211	3.382967	3.297644	2.473209
0.6	4.842561	3.793721	3.826925	2.915692

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМЫ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ, ПОЛУЧЕННЫМ В РЕЗУЛЬТАТЕ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ НА СИНУСОИДАЛЬНЫЙ СИГНАЛ

Будем предполагать подачу на вход исследуемой системы некоторого тестового сигнала. В качестве тестового воздействия рассматривается некоторый синусоидальный сигнал $B\sin(\omega t)$, где $B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ – матрица амплитудных значений; $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)^T$ – вектор частотных значений, накладываемый на вход $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ исследуемого объекта (про-цесса). При замерах реакции объекта на возмущение в момент времени t были получены значения состояния системы в момент t, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$, являющиеся функциями времени. Предполагается, что выходные переменные $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ являются решением стационарной динамической линейной неоднородной задачи

$$\dot{x} = Ax + B\sin(\omega t), \quad x(0) = x^0. \tag{7}$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ – начальное состояние объекта,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – n-мерная квадратная матрица.

Согласно описываемому подходу, для идентификации системы (7) будем сравнивать разложения решения системы в матричный ряд согласно формуле Коши и теореме Тейлора. Решение задачи (7), согласно формуле Коши [13], можно записать в виде

$$x(t)=F(t,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B\sin(\omega\tau)d\tau, \qquad (8)$$

где фундаментальная матрица $F(t,\tau)$ представима в виде матричной экспоненты $F(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}$, которая, в свою очередь, представима в виде матричного ряда [13]:

$$F(t,\tau)=e^{A(t-\tau)}=E+A(t-\tau)+\frac{1}{2!}A^2(t-\tau)^2+...+\frac{1}{k!}A^k(t-\tau)^k+... \qquad (9)$$

и обладает свойством [14]:

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-F(t,\tau)A. \qquad (10)$$

Проинтегрировав правую часть уравнения (8), используя (10) и особенности данного интеграла, получим

$$\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B\sin(\omega\tau)d\tau=-F(t,\tau)\Big[CBW^{-1}\cos(\omega\tau)+ACBW^{-2}\sin(\omega\tau)\Big]\Big|_{t_0}^{t},$$

здесь $W=\mathrm{diag}\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$, а матрица C удовлетворяет уравнению $A^2CW^{-2}+C=E$.

Таким образом, решение задачи (7) можно расписать так:

$$x(t)=F(t,t_0)x^0+F(t,t_0)\Big[CBW^{-1}\cos(\omega t_0)+ACBW^{-2}\sin(\omega t_0)\Big]-$$
$$-\Big[CBW^{-1}\cos(\omega t)+ACBW^{-2}\sin(\omega t)\Big].$$

Используя разложения фундаментальной матрицы $F(t,\tau)$ в виде матричного ряда (9) и функций $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ в ряд Тейлора

$$\cos(\omega t)=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}W^{2m-1}\omega t^{2m},$$

$$\sin(\omega t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}W^{2m}\omega t^{2m+1},$$

получим следующее итоговое выражение для решения неоднородной системы вида (7):

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^i}{i!}\left[x^0+CW^{-1}b\right]-\left[CW^{-1}b+CBW^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}W^{2m-1}\omega t^{2m}+\right.$$

$$\left.+ACBW^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}W^{2m}\omega t^{2m+1}\right]=x^0+Ax^0t+\frac{(A^2x^0+A^2CW^{-1}b+CWb)}{2!}t^2+$$

$$+\frac{(A^3x^0+A^3CW^{-1}b+ACWb)}{3!}t^3+\ldots+\frac{(A^{2m}x^0+A^{2m}CW^{-1}b+(-1)^{m+1}CW^{2m-1}b)}{(2m)!}t^{2m}+$$

$$+\frac{(A^{2m+1}x^0+A^{2m+1}CW^{-1}b+(-1)^{m+1}ACW^{2m-1}b)}{(2m+1)!}t^{2m+1}+\ldots \qquad (11)$$

Здесь вводится вектор-столбец $b=(b_1,....,b_n)^T$.

С другой стороны, разложение решений системы (7) $x(t)$ в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки t_0 имеет вид

$$x(t)=x^0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^{(i)}(t_0)(t-t_0)^i}{i!}. \qquad (12)$$

Сравним полученное выражение (11) с разложением решения неоднородной системы (7) $x(t)$ в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки $t_0=0$ (12). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в (11) и (12):

$$\begin{cases} x^{(1)}(0)=Ax^0, \\ x^{(2)}(0)=A^2x^0+Wb\ , \\ x^{(3)}(0)=A^3x^0+A^3CW^{-1}b+ACWb=A^3x^0+AWb=Ax^{(2)}(0)\ , \\ \qquad\ldots \\ x^{(2m)}(0)=A^{2m}x^0+A^{2m}CW^{-1}b+(-1)^{m+1}CW^{2m-1}b, \\ x^{(2m+1)}(0)=A^{2m+1}x^0+A^{2m+1}CW^{-1}b+(-1)^{m+1}ACW^{2m-1}b=Ax^{(2m)}(0). \end{cases} \qquad (13)$$

Отсюда получим следующую систему уравнений для нахождения матрицы A:

$$\begin{cases} Ax^0=x^{(1)}(0), \\ Ax^{(2)}(0)=x^{(3)}(0), \\ \qquad\ldots \\ Ax^{(2m)}(0)=x^{(2m+1)}(0). \end{cases} \qquad (14)$$

Таким образом, для нахождения матрицы получили матричное алгебраическое уравнение относительно матрицы A:

$$AX^{2m} = X^{2m+1}, \tag{15}$$

где матрицы X^{2m} и X^{2m+1} определяются следующим образом:

$$X^{2m} = \left(x(0), x^{(2)}(0)..., x^{(2n-2)}(0)\right), \quad X^{2m+1} = \left(x^{(1)}(0), x^{(3)}(0),..., x^{(2n-1)}(0)\right).$$

Решив матричное алгебраическое уравнение (15), найдем

$$A = X^{2m+1}(X^{2m})^{-1}. \tag{16}$$

Заметим, для построения матриц X^{2m} и X^{2m+1} будем использовать значения производных интерполяционных полиномов [1], вычисленные в точке $t = 0$.

Используя оставшиеся уравнения системы (13) и найденную по (16) матрицу A, найдем диагональную матрицу W и вектор-столбец b, соответствующие вектору ω и диагональной матрице B, определяющие полностью неоднородную часть системы (7):

$$\begin{cases} Wb = x^{(2)}(0) - A^2x^0 \ , \\ (A^2 - W^2)Wb = x^{(4)}(0) - A^4x^0. \end{cases} \tag{17}$$

4. ПРИМЕР

Рассмотрим идентификацию линейной системы по заданному точному значению решений. Для этого в качестве идентифицируемой системы вида (7) рассмотрим систему, которая в реальном представлении описывается следующей системой дифференциальных уравнений с заданным начальным условием:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \\ 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4.97 \\ 4.32 \\ 1.86 \\ 1.56 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Для задачи Коши (18) решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1.5+t)e^t + (1.25+t)e^{-t} \\ (1+t)e^t + (1+t)e^{-t} \\ (1.5+t)e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 & 3.5 & 0 & -1.28 \\ 0 & 4 & -0.6 & -1.68 \\ -1 & 1 & 0.48 & -0.64 \\ 0 & 2 & 0.08 & -1.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Используя точное аналитическое представление решения (19), вычислим производные до 7-го порядка включительно. Значение функции и производные при $t = 0$ представлены в табл. 5.

Таблица 5

j	$x_j(0)$	$x_j^{(1)}(0)$	$x_j^{(2)}(0)$	$x_j^{(3)}(0)$	$x_j^{(4)}(0)$	$x_j^{(5)}(0)$	$x_j^{(6)}(0)$	$x_j^{(7)}(0)$
1	4.97	0.75	4.37	7.75	–14.23	8.75	81.17	15.75
2	4.32	0.8	4.72	10.8	–20.88	–9.2	105.52	90.8
3	1.86	2.46	5.06	1.66	–3.74	20.86	47.46	–51.94
4	1.56	2.16	6.76	3.36	–16.04	8.56	97.16	–2.24

Из табл. 5 можем записать значения матриц X^{2m} и X^{2m+1}:

$$X^{2m} = \begin{pmatrix} 4.97 & 4.37 & -14.23 & 81.17 \\ 4.32 & 4.72 & -20.88 & 105.52 \\ 1.86 & 5.06 & -3.74 & 47.46 \\ 1.56 & 6.76 & -16.04 & 97.16 \end{pmatrix}, \quad X^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0.75 & 7.75 & 8.75 & 15.75 \\ 0.8 & 10.8 & -9.2 & 90.8 \\ 2.46 & 1.66 & 20.86 & -51.94 \\ 2.16 & 3.36 & 8.56 & -2.24 \end{pmatrix}.$$

Используя (16), получим матрицу A вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.999999 & -3.999999 & -0.000001 & 1.999999 \\ 3.999997 & -4.999997 & -1.999998 & 3.999998 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0.000002 & -0.000002 & 1.999998 & -0.999998 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица полностью совпадает с исходной матрицей системы (18) с точностью до машинной погрешности, так как для идентификации использовались производные до 7-го порядка, найденные из точных аналитических решений (19) (табл. 5).

По формуле (17), используя найденную матрицу $\tilde{A}$ системы и производные точных решений (табл. 5), находим значения вектора частот ω и вектора амплитуд b:

$$\omega = (1.000010,\ 2.000005,\ 1.000001,\ 1.999999)^T,$$

$$b = (0.9999783,\ 0.9999936,\ 1.999997,\ 2.000002)^T.$$

Тогда неоднородную часть системы получим в виде

$$B\sin(\omega t)=\begin{pmatrix} 0.9999783\sin(1.00001t) \\ 0.9999936\sin(2.000005t) \\ 1.999997\sin(1.000001t) \\ 2.000002\sin(1.999999t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, неоднородная часть также совпадает с неоднородностью системы (18) с точностью до машинной погрешности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход для активной и пассивной идентификации линейных стационарных динамических систем по результатам проведенных измерений фазовых координат системы на некотором промежутке времени. Идентификация матрицы системы согласно предлагаемому подходу сводится к построению и решению матричного линейного алгебраического уравнения (6). Построение уравнений (6) и (16) основано на сопоставлении представления решений задачи Коши в виде экспоненциального матричного ряда (2) и (11) и, соответственно, результатов решения задачи интерполяции исходных таблично заданных решений. Результаты численных расчетов показывают, что идентификация согласно изложенному подходу позволяет восстановить исходную систему по заданным решениям некоторой задачи Коши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем: перевод с английского. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
2. *Гроп Д.* Методы идентификации систем: перевод с английского. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
3. *Дейч А.М.* Методы идентификации динамических объектов. – М.: Энергия, 1979. – 240 с.
4. *Медич Дж.* Статистически оптимальные оценки и управление: перевод с английского. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
5. *Райбман Н.С.* Что такое идентификация. – М.: Наука, 1970. – 118 с.
6. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л.* Идентификация систем управления: перевод с английского. – М.: Наука, 1974. – 340 с.
7. *Цыпкин Я.З.* Основа информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
8. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния: перевод с английского. – М.: Мир, 1975. – 680 с.
9. *Мижидон А.Д., Мадаева Е.А.* Об одном подходе к идентификации линейных динамических систем // Вестник ВСГТУ. – 2014. – № 3 (48). – С. 5–12.
10. *Мижидон А.Д.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов при постоянно действующих стохастических возмущениях в приложении к синтезу виброзащитных систем // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 81–93.
11. *Мижидон А.Д.* Об оценке предельных возможностей виброзащитных систем // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 4. – С. 149–162.
12. *Мижидон А.Д., Елтошкина Е.В., Имыхелова М.Б.* Типовые задачи автоматизации проектирования и их алгоритмическое обеспечение // Вестник ВСГТУ. – 2012. – № 4. – С. 6–12.
13. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
14. *Бородакий Ю.В., Лободинский Ю.Г.* Основы теории систем управления. – М.: Радио и связь, 2004. – 256 с.

Мижидон Арсалан Дугарович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. Основное направление научных исследований – системный анализ, оптимизация, теория автоматического управления. Имеет более 150 публикаций. E-mail: miarsdu*@eestu.ru*

Мадаева Елена Андреевна, аспирант кафедры прикладной математики Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. Основное направление научных исследований – идентификация систем. E-mail: elenamadaeva@gmail.com

Method of linear dynamic system identification by input sinusoidal action *

A.D. MIZHIDON [1], *E.A. MADAEVA* [2]

[1] *East Siberian State University of Technology and Management, 40V Klyuchevskaya street, Ulan-Ude, 670013, Russian Federation, D. Sc.(Eng.), professor. E-mail: miarsdu@esstu.ru*
[2] *East Siberian State University of Technology and Management, 40V Klyuchevskaya street, Ulan-Ude, 670013, Russian Federation, post-graduate student. E-mail: elenamadaeva@gmail.com*

This paper consider a generalized approach to the identification of linear stationary dynamical systems based on results of phase coordinates measurements of the system at a certain time interval, which can also be used for the case of the object model identification by reactions of some sinusoidal signal. This approach was proposed by the authors earlier. The identification of a system matrix according to the proposed approach is reduced to constructing and solving the matrix linear algebraic equation. Constructing the equation is found by comparing the representation of Cauchy problem solution in the form of an exponential matrix series and the results of solving the problem of interpolation of initial solutions given in tabular. To carry out numerical experiments software was developed. The results of numerical experiments show that the identification system using the proposed approach makes it possible to reconstruct the system completely by exact solutions of the Cauchy problem. In the general case, in carrying out identification of a Cauchy problem by the tabulated data deviations occurred These were because of the precision of tabular data and the chosen method of the Lagrange polynomial interpolation which was used to visualize the approach. Further research supposes both an increase in the approach computational capabilities by using other methods of interpolation and approximation of tabular data measurement of the system phase coordinate at a given time interval, and further development of the approach and its application to other systems.

Keywords: identification, active identification, linear system, Cauchy problem, fundamental matrix, matrix exponential, system of linear algebraic equations, interpolation

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-1-62-75

REFERENCES

1. Aoki M. *Optimization of stochastic systems: topics in dickrete-time systems*. New York, London, Academic Press, 1967. 353 p. (Russ. ed.: Aoki M. *Optimizatsiya stokhasticheskikh sistem*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1971. 426 p.).

2. Graupe D. *Identification of systems*. Huntington, New York, Robert E. Krieger Publ., 1976. 287 p. (Russ. ed.: Grop D. *Metody identifikatsii sistem*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1979. 302 p.).

3. Deich A.M. *Metody identifikatsii dinamicheskikh ob"ektov* [Methods for identification of dynamic objects]. Moscow, Energiya Publ., 1979. 240 p.

* *Received 3 December 2014.*
This work was supported by the Russian Fund for Basic Research (project No. 12-08-00309-a)

4. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*. New York, McGraw-Hill, 1969. 384 p. (Russ. ed.: Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye otsenki i upravlenie.* Translated from English. Moscow, Energia Publ., 1973. 440 p.).

5. Raibman N.S. *Chto takoe identifikatsiya* [What is identification]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 118 p.

6. Sage A.P., Melsa J.L. System identification. Academic Press, New York, London, 1971 (Russ. ed.: *Seidzh E.P., Melsa Dzh.L. Identifikatsiya sistem upravleniya.* Translated from English. Moscow, Nauka. Publ., 1974. 340 p.).

7. Tsypkin Ya.Z. *Osnova informatsionnoi teorii identifikatsii* [Fundamental of information theory identification]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.

8. Eykhoff P. *System identification: Parameter and state estimation*. John Wiley & Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).

9. Mizhidon A.D., Madaeva E.A. Ob odnom podkhode k identifikatsii lineinykh dinamicheskikh sistem [An approach to the linear dynamic systems identification]. *Vestnik VSGTU – ESSUTM Bulletin,* 2014, no. 3 (48), pp. 5–12.

10. Mizhidon A.D. Analiticheskoe konstruirovanie optimal'nykh regulyatorov pri postoyanno deistvuyushchikh stokhasticheskikh vozmushcheniyakh v prilozhenii k sintezu vibrozashchitnykh sistem [Analytical design of optimal controllers under permanent stochastic disturbances as applied to the design of vibration isolation systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 2008, no. 4, pp. 81–93. (In Russian)

11. Mizhidon A.D. Ob otsenke predel'nykh vozmozhnostei vibrozashchitnykh sistem [Estimation of the limit possibilities of vibration isolation systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 2009, no. 4, pp. 149–162. (In Russian)

12. Mizhidon A.D., Eltoshkina E.V., Imyhelova M.B. Typical tasks for computer aided design of vibration protection systems and their algorithmic support. *Vestnik VSGTU – ESSUTM Bulletin,* 2012, vol. 39, no. 4, pp. 6–12.

13. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [The ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 331 p.

14. Borodakii Yu.V., Lobodinskii Yu.G. Osnovy teorii sistem upravleniya [Fundamentals of the theory of control systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 2004. 256 p.