

УДК 629.7.042.2.001.24:622.998

Метод определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений*

С.А. ГУСЕВ¹, В.Н. НИКОЛАЕВ²

¹ 630090, РФ, г. Новосибирск, пр. академика Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. E-mail: sag@osmf.sscs.ru

² 630051, РФ, г. Новосибирск, ул. Ползунова, 21, Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина, доктор технических наук, главный научный сотрудник. E-mail: nikvla50@mail.ru

Использование сотовых конструкций является перспективным направлением в области авиационной техники. Работа посвящена методу определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета. В качестве математической модели для решения задачи теплообмена в сотовых конструкциях рассматривается параболическая краевая задача с разрывными коэффициентами. Доказано, что при некоторых не очень ограничительных условиях задача такого вида имеет единственное обобщенное решение в смысле интегрального тождества. В то же время это обобщенное решение может быть аппроксимировано решением параболического уравнения, коэффициенты которого являются гладкими приближениями исходных разрывных коэффициентов. Приближение (сглаживание) коэффициентов производится с помощью интегрального усреднения с бесконечно дифференцируемым финитным ядром. Известно, что решение параболического уравнения может быть представлено в виде математического ожидания функционала решения стохастических дифференциальных уравнений. Этот факт может быть использован для получения статистических оценок решений параболических уравнений с помощью численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Приближенное решение задачи таким способом может быть получено в одной или нескольких точках внутри области, что часто бывает достаточным для практического применения. При этом нет необходимости строить сетку по пространственным переменным и решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Метод статистического моделирования распараллеливается легко и с высокой эффективностью. Поэтому для решения задачи была использована суперкомпьютерная техника. Этот метод применяется для оценки решения параболического уравнения со сглаженными коэффициентами, полученными на основе интегрального усреднения.

* Статья получена 25 февраля 2015 г.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 14-01-00340-а, научной программой «Ведущие научные школы» (НШ-5111.2014.1).

На первом этапе были получены значения температуры сотовой конструкции с помощью предложенного в данной работе метода. Для расчета теплового состояния панели была разработана параллельная программа на языке Fortran 90. Распараллеливание в программе осуществляется по схеме ведущий–ведомые (Master–Slave). В этой схеме одно вычислительное ядро считается главным, и оно распределяет весь объем работы по моделированию случайных траекторий по всем ядрам, участвующим в работе. По окончании моделирования всех траекторий все ядра передают ведущему ядру полученные результаты расчетов для вычисления математического ожидания функционала, дающего оценку температуры.

При написании параллельной программы использовалось программное обеспечение Intel MPI, Version 4.1. Моделирование траекторий случайного процесса осуществлялось с использованием параллельного датчика гауссовских случайных величин из библиотеки Intel MKL. Вычисления проводились в Сибирском суперкомпьютерном центре на гибридном кластере HKS-30T+GPU с использованием 36 4-ядерных процессоров E5540 2,53 GHz.

Затем аналогичные расчеты были выполнены для гомогенной структуры с экспериментально полученными значениями эффективной теплопроводности и температуропроводности.

Полученные результаты показывают, что значения температуры для сотовой конструкции и гомогенной структуры находятся в хорошем согласии, когда процесс передачи тепла близок к стационарному.

Ключевые слова: фюзеляж самолета, сотовая конструкция, гетерогенные структуры, тепловое состояние, математическая модель, численное решение, параболическая краевая задача, разрывные коэффициенты, интегральное усреднение, стохастические дифференциальные уравнения

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-20-32

ВВЕДЕНИЕ

Использование сотовых конструкций является перспективным направлением в области авиационной техники. Это связано с тем, что эти конструкции сочетают в себе наиболее подходящие свойства для создания фюзеляжей современных самолетов: легкие, прочные и имеющие низкую теплопроводность. Некоторые приложения сотовых конструкций описаны в [1, 2]. Данная работа посвящена методу определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета. Сотовая конструкция представляет собой каркас, напоминающий собой пчелиные соты, изготовленный из углеволокна и заполненный сотовым наполнителем – веществом с низкой теплопроводностью. В качестве математической модели для решения задачи теплообмена в сотовых конструкциях рассматривается параболическая краевая задача с разрывными коэффициентами. Доказано, что при некоторых не очень ограничительных условиях задача такого вида имеет единственное обобщенное решение в смысле интегрального тождества (см. [3, 4]). В то же время это обобщенное решение может быть аппроксимировано решением параболического уравнения, коэффициенты которого являются гладкими приближениями исходных разрывных коэффициентов. Приближение (сглаживание) коэффициентов в данной работе производится с помощью интегрального усреднения с бесконечно дифференцируемым финитным ядром. Требуемая статистическая оценка решения задачи со сглаженными коэффициентами получается на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Гетерогенные (неоднородные) структуры представляют собой структуры, состоящие из смеси химически различных веществ. Типичным примером гетерогенной структуры является сотовая конструкция на основе углеволокна. Описание и физические свойства гетерогенных структур можно найти в работе [5]. Рассмотрим математическую модель теплообмена в гетерогенной структуре как параболическую краевую задачу с разрывными коэффициентами.

Введем следующие обозначения: $G \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей ∂G , которая разделена на M подобластей $G = \bigcup_{k=1}^M G^{(k)}$; $Q_T = G \times (0, T)$ – цилиндр в \mathbb{R}^4 ; $S_T = \partial G \times [0, T]$ – боковая поверхность цилиндра Q_T . Предполагается, что подобласти $G^{(k)}$ разделены кусочно-гладкой поверхностью Γ .

Теплообмен в гетерогенной структуре описывается следующим параболическим уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

где $u(x,t)$ – температура; коэффициенты a_{ij} являются Липшиц два-непрерывными непрерывными по x функциями в подобластях $G^{(k)}$, $k=1, \dots, M$. В то же время они могут иметь разрыв первого рода на Γ . Предполагается также, что существуют $\mu, \eta > 0$ такие, что выполняется условие равномерной параболичности по $(x,t) \in Q_T$

$$\mu \sum_i \xi_i^2 < \sum_{i,j} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j < \eta \sum_i \xi_i^2.$$

Также требуется, чтобы искомая функция удовлетворяла условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

и одному из следующих двух граничных условий на ∂G :
граничное условие первого рода

$$u(x,t)|_{x \in \partial G} = \psi(x,t) \quad (3)$$

или третьего рода

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \eta(x,t)u + \gamma(x,t) \right) \Big|_{x \in \partial G} = 0, \quad (4)$$

где n_i – i -я координата вектора внутренней нормали ∂G .

В работе [4] доказано существование обобщенных решений краевых задач (1), (2), (3) и (1), (2), (4). Причем эти решения могут быть аппроксимированы решениями соответствующих краевых задач с коэффициентами, которые являются приближениями исходных разрывных коэффициентов. Например, можно получить приближенное решение исходной задачи, решая задачу со сглаженными коэффициентами. В данной работе предлагается статистически оценивать решение задачи со сглаженными коэффициентами с помощью метода, основанного на численном решении СДУ и, таким образом, получать оценки приближенного решения исходной краевой задачи с разрывными коэффициентами.

Для сглаживания коэффициентов предлагается использовать интегральное усреднение (см. [4, 6])

$$f^{(\rho)}(x) = \rho^{-3} \int_{|x-y|<\rho} \omega_\rho(|x-y|) f(y) dy \quad (5)$$

с бесконечно дифференцируемым финитным ядром ω_ρ таким, что $\omega_\rho(|\xi|) = 0$ при $|\xi| \geq \rho$ и $\int_{|\xi| \leq \rho} \omega_\rho(|\xi|) d\xi = 1$. В выражении (5) и далее ρ означает радиус усреднения, а символ $|a|$ обозначает евклидову норму вектора a .

2. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СДУ

Хорошо известно (см. например, [7]), что решение параболического уравнения может быть представлено в виде математического ожидания функционала решения СДУ. Этот факт может быть использован для получения статистических оценок решений параболических уравнений с помощью численного решения СДУ. Приближенное решение задачи таким способом может быть получено в одной или нескольких точках внутри области, что часто бывает достаточным для практического применения. При этом нет необходимости строить сетку по пространственным переменным и решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Метод статистического моделирования распараллеливается легко и с высокой эффективностью. Поэтому для решения задачи можно использовать суперкомпьютерную технику. Мы применяем этот метод для оценки решения параболического уравнения со сглаженными коэффициентами, полученными на основе интегрального усреднения (5).

Приближенное решение уравнения (1) будем находить, как решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^{(\rho)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (6)$$

где $a_{ij}^{(\rho)}$ – сглаженные коэффициенты уравнения (1) в окрестности Γ .

Для точки $(x, t) \in Q_T$ мы определим случайный процесс X_\bullet , который начинает движение из точки x в момент времени t и является решением следующего векторного СДУ:

$$X_v = x + \int_{T-t}^v b(X_r, r) dr + \int_{T-t}^v \sigma(X_r, r) dW_r, \quad (7)$$

где W_\bullet – винеровский процесс [7]; σ – 3×3 матрица такая, что $2\sigma^T \sigma = A^{(\rho)}$,

$$A^{(\rho)} = (a_{ij}^{(\rho)}); \quad b = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i1}^{(\rho)}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i2}^{(\rho)}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i3}^{(\rho)}}{\partial x_i} \right)^T.$$

Обозначим $E_{t,x}$ математическое ожидание относительно вероятностной меры $P_{t,x}$, соответствующей случайному процессу, исходящему из точки x в момент времени t . Для решения первой краевой задачи (6), (2), (3) в точке (x, t) справедливо следующее вероятностное представление [7]

$$u(x, t) = E_{T-t, x} [\varphi(X_T) 1_{\tau > T} + \psi(X_\tau, \tau) 1_{\tau < T}], \quad (8)$$

где $\tau = \inf(v | X_v \notin G)$ – время первого выхода процесса X_\bullet из области G , 1_S – обозначение функции множества S . Таким образом, мы можем получить оценки решения задачи (6), (2), (3) путем численного моделирования траектории процесса X_\bullet . Для этого мы используем модифицированный метод Эйлера, согласно которому приближенные траектории X_\bullet рассчитываются по формуле (см., например, [8])

$$x_{i+1} = x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h} \sigma(x_i, t_i) \zeta_i, \quad t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где h – шаг интегрирования; ζ_i – трехмерные векторы с независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Для задачи (6), (2), (4) построим диффузионный процесс X_\bullet с отражением от границы области в направлении внутренней конормали, который является решением СДУ:

$$X_v = x + \int_{T-t}^v b(X_r, r) dr + \int_{T-t}^v \sigma(X_r, r) dW_r + \int_{T-t}^v n^A(X_r, r) d|k_r|, \quad (10)$$

где n^A – единичный вектор внутренней конормали, т. е. $n^A = An / |An|$; $|k_v| = \int_t^v 1_{\partial G}(X_r) d|k_r|$ – неотрицательный стохастический процесс, который возрастает только тогда, когда процесс X_\bullet находится на границе. Достаточно

полное исследование диффузионных процессов с отражением от границы можно найти в работах [9–11]. Вероятностное представление решения краевой задачи (6), (2), (4) в точке (x, t) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = E_{T-t, x} \left[\varphi(X_T) \exp \left(\int_{T-t}^T \eta(X_T, r) d|k_r| \right) + \int_{T-t}^T \gamma(X_r, r) d|k_r| \right]. \quad (11)$$

Статистическая оценка решения задачи (6), (2), (4) получается с использованием численного моделирования траекторий процесса X методом Эйлера, в котором вычисления на i -м шаге производятся следующим образом [12]:

$$x_{i+1} = x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h}\sigma(x_i, t_i)\zeta_i + (\Delta_{i+1}K)n_i^A, \quad t_{i+1} = t_i + h, \quad (12)$$

$$\Delta_{i+1}K = \left[d \left(x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h}\sigma(x_i, t_i)\zeta_i \right) \right]^-, \quad (13)$$

где n_i^A – внутренний единичный вектор конормали в точке x_i , который вычисляется, когда x_i находится на ∂G ; $[a]^- = \max\{0, -a\}$; $d(x)$ – неположительная вещественная функция, удовлетворяющая для любой точки $x \notin G$ следующему уравнению:

$$x = \rho(x) + d(x)n^A(\rho(x)). \quad (14)$$

Мы используем в условии (14) следующие обозначения: $\rho(x)$ – проекция точки $x \notin G$ на \bar{G} в направлении вектора конормали. Здесь черта сверху обозначает замыкание множества. В (14) полагаем $d(x) = 0$, если $x \in \bar{G}$. Следует отметить, что для получения оценки решения задачи (6), (2), (4) мы также должны вычислить следующие функции, определенные в узлах сетки на отрезке $[0, T]$:

$$y_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \exp \left(\sum_{k=0}^{i-1} \eta(x_k, t_k) 1_{\partial G}(x_k) \Delta_{k+1}K \right), & i \geq 1, \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \sum_{k=0}^{i-1} (\gamma(x_k, t_k) 1_{\partial G}(x_k) \Delta_{k+1}K) y_k, & i \geq 1. \end{cases}$$

Оценка решения задачи (6), (2), (4) рассчитывается по формуле

$$\bar{u}(x, t) = E_{T-t, x} [\varphi(x_N) y_N + z_N], \quad (15)$$

где $N = T/h$.

3. РАСЧЕТ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ СОТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В данном разделе статьи приведены результаты расчета теплового состояния элемента обшивки, представляющего собой сотовую теплозащитную панель. Рассматриваемая сотовая панель представляет собой каркас из углепластика, который ограничен двумя пластинами из того же материала (рис. 1). Теплозащитным наполнителем панели является воздух.

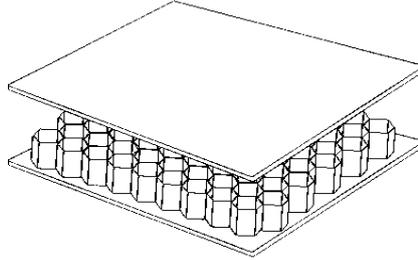


Рис. 1. Сотовая конструкция

Многослойная сотовая конструкция имеет следующие характеристики: общая толщина 0,035 м; толщина каждой ограничивающей пластины составляет 0,001 м; толщина стенок сот $6 \cdot 10^{-5}$ м; длина стороны ячейки 0,0042 м; значения температуропроводности углепластика и воздуха составили $8 \cdot 10^{-4}$ и $2,36 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ соответственно. Эффективная теплопроводность сотовой конструкции была получена с помощью теплофизического эксперимента при стационарном процессе теплопередачи – 0,08 Вт/(м · К). Температуропроводность многослойной сотовой конструкции была определена также экспериментально и равняется $1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$.

Расчет и эксперимент проводили для граничных условий третьего рода для холодного типа климата (рис. 2).

Уравнения теплообмена многослойной сотовой конструкции обшивки для граничных условий третьего рода представляются в виде одномерных уравнений теплопроводности, описывающих процесс передачи тепла в многослойной сотовой конструкции:

$$C(x)T_i = (\lambda(x,u)u_x)_x, \quad 0 < x < l; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \lambda(0,u)F_k u_x = \alpha_{k,out}(t)F_k (u(t,0) - u_e(t)) + Q_{k,out} + Q_{k,in} - \\ - \sigma_0 \varepsilon_{k,out} F_{k,out} u^4(x), \quad x=0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \lambda(l,u)F_k u_x = \alpha_{k,in}(t)F_k (u_e(t) - u_{air}(t,0)) + \sum_{i=1}^k G_{i,k} u_i^4 / u_{ref}^4 - \\ - \sigma_0 \varepsilon_{k,in} u^4(t) + Q_{k,out} + Q_{k,in}, \quad x=l; \end{aligned} \quad (18)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (19)$$

где $C(x) = C_i, \lambda(x, t) = \lambda_{i,0} + \lambda_{i,1}u$ при $l_{i-1} \leq x < l_i, (i = 1, \dots, k-1)$,
 $C(x) = C_k, \lambda(x, t) = \lambda_{k,0} + \lambda_{k,1}u$ при $l_{k-1} \leq x \leq l_k$, т. е. коэффициенты C и λ зависят от того, в каком слое рассматривается перенос тепла.

При этом $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_k = l$.

В уравнениях (16)–(19) использованы следующие обозначения: $C(x)$ – объемная теплоемкость многослойной сотовой конструкции обшивки или окон (произведение удельной теплоемкости на плотность); $\lambda(l, u)$ – коэффициент теплопроводности многослойной конструкции; $\alpha_{k,out}$ – коэффициент теплоотдачи наружной поверхности конструкции; $\alpha_{k,in}$ – коэффициент теплоотдачи внутренней поверхности конструкции; F_k – площадь конструкции при наружном и внутреннем теплообмене; $Q_{k,out}$ – тепловая энергия внешних источников; $Q_{k,in}$ – тепловая энергия внутренних источников; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; $\varepsilon_{k,in}$ – степень черноты излучения внутренней поверхности многослойной конструкции; k – количество блоков в отсеке; $G_{i,k}$ – коэффициент лучистого обмена системы « i -й элемент отсека – многослойная конструкция»; u_e – температура восстановления; t – время; u_{air} – температура воздушной среды в отсеке или в части отсека; $u(x, t)$ – температура многослойной конструкции; u_{ref} – эталонная температура; u_i – температура i -го элемента отсека; u_x – первая производная u по x ; $u_{x,x}$ – вторая производная u по x ; l – толщина многослойной конструкции.

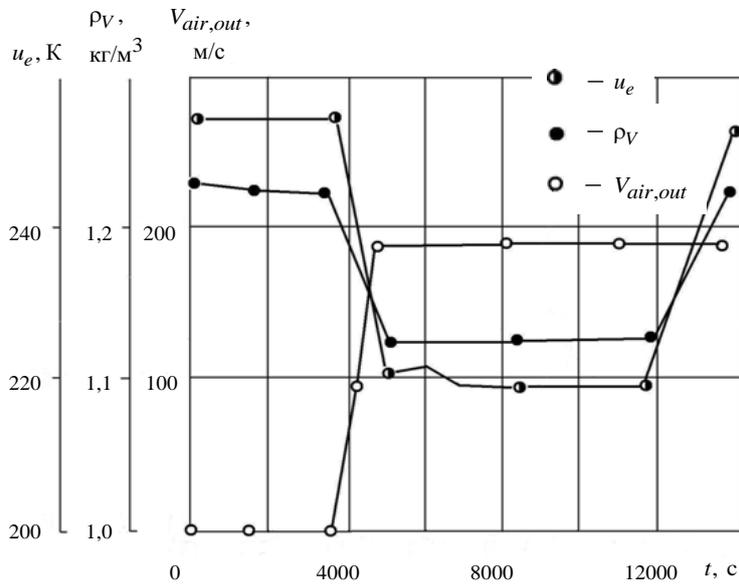


Рис. 2. Параметры режима полета и воздушной среды за бортом самолета для холодного типа климата: u_e – температура восстановления; ρ_V – плотность воздушной среды за бортом; $V_{air,out}$ – воздушная скорость полета

Коэффициент теплоотдачи $\alpha_{k,out}$ наружной поверхности многослойной конструкции и коэффициент теплоотдачи $\alpha_{k,in}$ внутренней поверхности многослойной конструкции будем вычислять по методикам, соответственно описанным в работах [13] и [14].

Значения коэффициента теплообмена $\alpha_{k,out}$ на внешней стороне обшивки для первых 150 с полета приведены на рис. 3. Температура воздушной среды у внутренней поверхности обшивки была постоянной и равнялась 283 К. При начальных условиях было принято линейное распределение температуры по толщине сотовой конструкции. В качестве начала декартовой системы координат взята точка, расположенная на нижнем крае панели (внутренней стороне обшивки самолета) в центре пластины, который совпадает с центром шестиугольника. Оси X и Y расположены в плоскости нижнего края пластины, ограничивающей сотовый каркас, ось Z направлена от нижнего края панели в сторону верхнего края (внешней стороны обшивки). В качестве ядра усреднения при сглаживании разрывных коэффициентов в расчетах использовалась функция $\omega_p(x) = \gamma_p(\rho^2 - |x|^2)$, где γ_p – нормирующий множитель.

Для расчета теплового состояния панели была разработана параллельная программа на языке Fortran 90. Распараллеливание в программе осуществляется по схеме ведущий–ведомые (Master–Slave). В этой схеме одно вычислительное ядро считается главным, и оно распределяет весь объем работы по моделированию случайных траекторий по всем ядрам, участвующим в работе. По окончании моделирования всех траекторий все ядра передают ведущему ядру полученные результаты расчетов для вычисления математического ожидания функционала, дающего оценку температуры.

При написании параллельной программы использовалось программное обеспечение Intel MPI, Version 4.1. Моделирование траекторий случайного процесса осуществлялось с использованием параллельного датчика гауссовских случайных величин из библиотеки Intel MKL [15]. Вычисления проводились в Сибирском суперкомпьютерном центре на гибридном кластере НКС-30Т+GPU с использованием 36 4-ядерных процессоров E5540 2,53 GHz.

Расчеты температуры проводились вблизи нижнего края панели в точке с координатами x_0, y_0, z_0 , где $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 0,0001$ м. Величина шага в методе Эйлера бралась равной $5 \cdot 10^{-7}$, объем выборки – 4000 случайных траекторий. При этом величина доверительного интервала температуры сотовой конструкции не превышала 1,2 К при доверительной вероятности 95 % в нестационарных и 0,7 К в стационарных условиях.

На первом этапе были получены значения температуры сотовой конструкции с помощью предложенного в данной работе метода. Затем аналогичные расчеты были выполнены для однородной структуры с экспериментально полученными значениями эффективной теплопроводности и температуропроводности. Полученные результаты (рис. 4) показывают, что значения температуры для сотовой конструкции и однородной структуры находятся в хорошем согласии, когда процесс передачи тепла близок к стационарному.

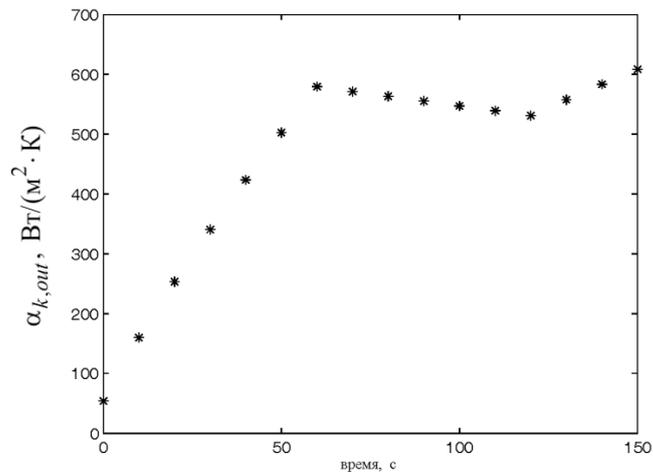


Рис. 3. Коэффициент теплообмена на внешней стороне обшивки

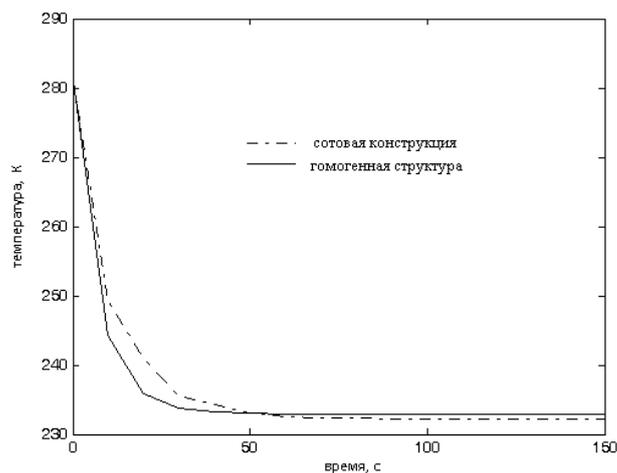


Рис. 4. Температура на внутренней стороне обшивки

ВЫВОДЫ

1. Разработан статистический метод определения теплового состояния сотовых конструкций фюзеляжа самолета на основе решения параболической краевой задачи с разрывными коэффициентами с использованием метода численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

2. Получена оценка решения краевой задачи для параболического уравнения с использованием численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

3. Проведены расчет и эксперимент по определению теплового состояния сотовых конструкций.

4. Результаты расчета теплового состояния сотовых конструкций с использованием метода численного решения стохастических дифференциальных уравнений подтверждены экспериментально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koch L.C., Pagel L.L. High heat flux actively cooled honeycomb sandwich structural panel for a hypersonic aircraft / National Aeronautics and Space Administration. – Washington, 1978. – 161 p. – (NASA Contractor Report; CR-2959).
2. Цихош Э. Сверхзвуковые самолеты: справочное руководство: пер. с пол. – М.: Мир, 1983. – 432 с.
3. Ладыженская О.А., Ривкин В.Я., Уральцева Н.Н. О классической разрешимости задач дифракции. Краевые задачи математической физики. 4 // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. – 1966. – Т. 92. – С. 116–146.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций: пер. с фр. – М.: Мир, 1968. – 460 с.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – 3-е изд. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
8. Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. – 632 p. – (Stochastic modelling and applied probability; vol. 23). – doi: 10.1007/978-3-662-12616-5.
9. Lions P.L., Sznitman A.S. Stochastic differential equations with reflected boundary conditions // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 37, iss. 4. – P. 511–537. – doi: 10.1002/cpa.3160370408.
10. Saisho Y. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary // Probability Theory and Related Fields. – 1987. – Vol. 74, iss. 3. – P. 455–477. – doi: 10.1007/BF00699100.
11. Tanaka H. Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions // Hiroshima Mathematical Journal. – 1979. – Vol. 9, N 1. – P. 163–177.
12. Мильштейн Г.Н. Применение численного интегрирования стохастических уравнений для решения краевых задач с граничными условиями Неймана // Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – Т. 41, вып. 1. – С. 210–218. – doi: 10.4213/typ2797.
13. Воронин Г.И. Системы кондиционирования воздуха на летательных аппаратах. – М.: Машиностроение, 1973. – 443 с.
14. Дульнев Г.Н., Тарновский Н.Н. Тепловые режимы электронной аппаратуры: учебное пособие. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1971. – 248 с.
15. Handbook of Intel MKL [Electronic resource] // Intel® Developer Zone: website. – URL: http://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/mkl_sa/11/mklman/index.htm (accessed: 08.06.2015).

Гусев Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Основные научные интересы – разработка методов решения прикладных задач с использованием численного решения стохастических дифференциальных уравнений и оптимизация параметров динамических систем. Автор свыше 60 научных трудов. E-mail: sag@osmf.sccc.ru.

Николаев Владимир Николаевич, доктор технических наук, главный научный сотрудник ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина». Основные научные интересы – математическое моделирование теплового состояния отсеков и систем самолета при проектировании, летных испытаниях и электромагнитной совместимости радиоэлектронного оборудования самолета. Автор свыше 100 научных трудов. E-mail: nikvla50@mail.ru.

A method for evaluating the thermal state of honeycomb structures in the aircraft fuselage by the numerical solution of stochastic differential equations*

S.A. GUSEV¹, V.N. NIKOLAEV²

¹ ICMMG SB RAS, 6, Lavrent'ev Ave., 6, Novosibirsk, 630090, Russian Federation. PhD (Phys.&Math.), Senior Researcher, ICMMG SB RAS. E-mail: sag@osmf.sccc.ru.

² FSUE "S.A. Chaplygin Siberian Aeronautical Research Institute", 21, Polzunov St., Novosibirsk, 630051, Russian Federation. D.Sc. (Eng.), Chief Researcher, FSUE "S. A. Chaplygin Siberian Aeronautical Research Institute". E-mail: nikvla50@mail.ru.

Using honeycomb structures in aeronautical engineering is a promising direction. The paper considers a method for the evaluation of the thermal state of honeycomb structures which are part of the aircraft fuselage. A boundary value problem for a parabolic equation with discontinuous coefficients is taken as a mathematical model of the problem under study. It is known that in some not very restrictive conditions the problem of this kind has a unique generalized solution. This generalized solution can be approximated by solving a parabolic equation with coefficients which are smooth approximations of the initial discontinuous coefficients. The smoothing of the coefficients is made by using the integral averaging with an infinitely differentiable finite kernel. It is known that the solution of a parabolic equation can be represented as a mathematical expectation of a diffusion process functional. This fact can be used to obtain statistical estimates of solutions of parabolic equations with the help of the numerical solution of stochastic differential equations. An approximate solution of the problem can be obtained by this way in one or several points in the domain, which in many cases is sufficient for practical use. In solving problems by this method, there is no need to build a grid of spatial variables and solve large systems of linear algebraic equations. The statistical simulation method is easily and very efficiently parallelized. Therefore, a powerful supercomputer technology can be used to solve such problems. In the paper a method of statistical modeling is used for solving parabolic equations with coefficients smoothed by integral averaging.

At the first stage of work, temperature values of honeycomb panel were obtained using the proposed method. For the calculation of the thermal state of the panel a parallel computer program in the Fortran 90 language was developed. The parallelization in this program is made using the Master-Slave technique. In this method one processing core is considered as a major one. This core distributes the entire volume of random trajectories modeling among all cores involved in the work. At the end of all trajectories modeling, the cores transmit the results obtained to the major core for the subsequent calculation of temperature estimates.

The Intel MPI, Version 4.1 software was used in writing the parallel program. The modeling of the random process trajectories was made using the parallel random generator from the Intel MKL library. The calculations were performed in the Siberian Supercomputer Center on the hybrid cluster NKS-30T+GPU using 36 4-core processors E5540, 2.53GHz.

Then, similar calculations were performed for a homogeneous structure with the value of thermal diffusivity which was obtained experimentally.

The obtained results show a good agreement of the temperature values for honeycomb and homogeneous structures when a heat exchange process is close to a stationary process.

Keywords: aircraft fuselage, honeycomb structures, heterogeneous structures, thermal state, mathematical model, numerical solution, parabolic boundary value problem, discontinuous coefficients, integral averaging, stochastic differential equations

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-20-32

* Received 25 February 2015.

The work was supported by the Council under grants of the Russian Federation President and RFBR, projects № 14-01-00340-a

REFERENCES

1. Koch L.C., Pagel L.L. High heat flux actively cooled honeycomb sandwich structural panel for a hypersonic aircraft. *NASA Contractor Report*. CR-2959. Washington, 1978. 161 p.
2. Tsihosh E. *Supersonic aircrafts*. Reference manual. Translation from Polish. Moscow, Mir Publ., 1983. 432 p.
3. Ladyzhenskaja O.A., Rivkind V.Ja., Ural'ceva N.N. O klassicheskoy razreshimosti zadach difrakcii. Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki. 4 [The classical solvability of diffraction problems. Boundary value problems of mathematical physics. Pt. 4]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova Akademii nauk SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1966, vol. 92, pp. 116–146.
4. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p.
5. Missenard A. *Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges* [The thermal conductivity of solids, liquids, gases and their compositions]. Paris, Éditions Eyrolles, 1965. 554 p. (Russ. ed.: Misnar A. *Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkosti, gazov i ikh kompozitsii*. Translated from French. Moscow, Mir Publ., 1968. 460 p.).
6. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Applications of functional analysis in mathematical physics]. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ., 1988. 336 p.
7. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Vvedenie v teoriyu sluchainykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 568 p.
8. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1992. 632 p. doi: 10.1007/978-3-662-12616-5
9. Lions P.L., Sznitman A.S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1984, vol. 37, iss. 4, pp. 511–537. doi: 10.1002/cpa.3160370408
10. Saisho Y. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Probability Theory and Related Fields*, 1987, vol. 74, iss. 3, pp. 455–477. doi: 10.1007/BF00699100
11. Tanaka H. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Mathematical Journal*, 1979, vol. 9, no. 1, pp. 163–177.
12. Mil'shtein G.N. Primenenie chislennogo integrirvaniya stokhasticheskikh uravnenii dlya resheniya kraevykh zadach s granichnymi usloviyami Neimana [Application of the numerical integration of stochastic equations to solving boundary-value problems with Neumann's boundary conditions]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*, 1996, vol. 41, iss. 1, pp. 210–218. (In Russian). doi: 10.4213/tpv2797
13. Voronin G.I. *Sistemy konditsionirovaniya vozdukha na letatel'nykh apparatakh* [Flight vehicle air conditioning systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 443 p.
14. Dulnev G.N., Tarnovskii N.N. *Teplovye rezhimy elektronnoi apparatury* [Thermal regimes of electronic equipment]. Leningrad, Energiya Publ., 1971. 248 p.
15. Handbook of Intel MKL. *Intel® Developer Zone: website*. Available at: http://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/mkl_sa/11/mklman/index.htm (accessed 08.06.2015)