ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 59, № 2, 2015, с. 59–72

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 59, No. 2, 2015, pp. 59–72

УДК 681.5.013

Синтез алгоритмов управления нелинейными многомерными объектами на основе УФЖ[*]

А.Р. ГАЙДУК[1], Е.А. ПЛАКСИЕНКО[2], К.В. КОЛОКОЛОВА[3]

[1] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*
[2] *347900, РФ, г. Таганрог, ул. Петровская, 45, Таганрогский институт управления и экономики, кандидат технических наук, доцент. E-mail: pumkad@mail.ru*
[3] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, аспирант. E-mail: kbesklubova@mail.ru*

Рассмотрена задача синтеза алгоритмов управления многомерными нелинейными объектами. Известные подходы к решению этой задачи ориентированы на определенные классы нелинейных или линеаризованных моделей объектов управления. С другой стороны, повышающиеся требования к качеству систем управления обусловливают необходимость более полного учета свойств и особенностей реальных объектов, в том числе их многомерности и связности каналов управления. Эти факторы обусловливают актуальность разработки новых методов синтеза алгоритмов управления многомерными нелинейными объектами. В данной работе для решения задачи применяется метод аналитического синтеза, в основе которого лежит специальная форма уравнений многомерных объектов с дифференцируемыми нелинейностями, а именно – управляемая форма Жордана. При этом используются локальные управления, которые определяются на переменных состояния каждого блока объекта.

Основными научными результатами статьи являются условия разрешимости задачи синтеза в многомерном случае как при отсутствии связей между каналами, так и при наличии этих связей. Эти условия заключаются в ограничениях на производные нелинейностей объекта управления. Найдены также условия асимптотической устойчивости положения равновесия многомерных нелинейных систем управления как в большом, так и в целом. Предложен метод аналитического синтеза алгоритмов управления многомерными нелинейными объектами, уравнения которых могут быть приведены к управляемой форме Жордана. Разработанный метод синтеза может применяться для построения систем управления летательными аппаратами, энергетическими и другими производственными объектами, а также объектами специального назначения, так как нелинейные уравнения многих из этих объектов могут быть приведены к управляемой форме Жордана. Метод позволяет обеспечить желаемые свойства нелинейной многомерной системы управления путем назначения соответствующих значений параметров локальных управлений. Эффективность предложенного метода показана на примере синтеза управления конкретным многомерным объектом.

[*]*Статья получена 31 июля 2014 г.*

Ключевые слова: многомерный объект, нелинейность, управление, переменные состояния, управляемая форма Жордана, синтез, система, устойчивость, переходный процесс

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-59-72

ВВЕДЕНИЕ

Реальные объекты управления часто являются многомерными и многосвязными, т. е. имеют несколько взаимосвязанных управляемых переменных и несколько управляющих воздействий – управлений. Задача управления линейными многосвязными объектами впервые была поставлена И.Н. Вознесенским [1] как задача автономного управления, при котором каждое задающее воздействие системы вызывает соответствующие изменения только одной управляемой переменной. В дальнейшем задача синтеза многомерных систем автоматического управления (МСАУ) как автономного, так и связного (координирующего) управления рассматривалась во многих работах [1–11] и др.

Наиболее сложной является задача синтеза МСАУ нелинейными объектами, что обусловлено трудностью развязки каналов управления при синтезе как автономного, так и связного управления [3, 6–10]. Поэтому синтез управлений нелинейными многомерными аффинными объектами чаще всего осуществляется с применением метода преобразования уравнений объектов к некоторым простым (каноническим) формам. Такой прием позволяет, во-первых, значительно упростить решение задачи, а во-вторых, сделать его аналитическим.

Так, в работе [8] предложено преобразование уравнений нелинейного аффинного по управлению объекта к регулярной форме Лукьянова–Уткина, что позволяет осуществить синтез многомерных систем управления с желаемыми свойствами за счет создания многомерных скользящих режимов. В работах [3, 6, 7] уравнения нелинейных объектов преобразуются к нормальной канонической управляемой форме (форме Бруновского [6]), что позволяет достаточно просто найти стабилизирующее управление, в том числе и с компенсацией внешних возмущений [3]. Однако проверка возможности такого преобразования и сама процедура преобразования нелинейных уравнений к форме Бруновского являются довольно сложными. Управление широким классом нелинейных аффинных по управлению объектов может быть найдено методом пассификации [8], хотя проверка условий возможности применения этого метода к уравнениям конкретного нелинейного объекта очень сложна, как и построение искомого нелинейного управления.

В данной работе предлагается метод аналитического синтеза управлений нелинейными многомерными объектами путем преобразования уравнений к управляемой форме Жордана (УФЖ) [12–15]. Этот подход позволяет получать эффективные решения многих задач управления нелинейными объектами [13–15]. Фактически метод синтеза нелинейных управлений аффинными по управлению объектами, предложенный в работе [12], распространяется здесь на случай многомерных объектов. Практическое значение предлагаемого метода синтеза обусловлено тем, что уравнения очень многих реальных нелинейных объектов имеют УФЖ или могут быть представлены в УФЖ соответствующим переобозначением переменных [12, 13]. Предложенный метод иллюстрируется на примере синтеза управлений трехмассовым объектом, рассмотренным в работе [16].

1. УПРАВЛЯЕМАЯ ФОРМА ЖОРДАНА УРАВНЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

В структурном плане многомерные объекты можно рассматривать как совокупность нескольких взаимосвязанных блоков, каждый из которых имеет управляемую переменную y_i и управление u_i. Уравнения нелинейных многомерных объектов в УФЖ [17] имеют вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \boldsymbol{\phi}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{e}_{n_1} u_1, \quad y_1 = \tilde{x}_{11}, \tag{1}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{e}_{n_i} u_i, \; y_i = \tilde{x}_{1i}, \; i = \overline{2, m}, \tag{2}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \Omega_{xi} \in R^{n_i}$ – вектор состояния i-го блока ОУ; $\mathbf{e}_{n_i}$ – n_i-й столбец единичной $n_i \times n_i$-матрицы; y_i, u_i – управляемая переменная и управление i-го блока; $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i) \in R^n$, $i = \overline{1, m}$ – нелинейная вектор-функция, компоненты которой $\phi_{ji}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n_i - 1}$ – дифференцируемые необходимое число раз по всем своим аргументам функции векторных аргументов такие, что

$$\left| \frac{\partial \phi_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial \tilde{x}_{j+1,i}} \right| \ge \varepsilon_i > 0, \quad j = \overline{1, n_i - 1}, \; \tilde{\mathbf{x}}_i \in \Omega_{\tilde{x}i}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial \tilde{x}_{\eta,i}} \equiv 0, \; \eta = \overline{j + 2, n_i}, \; j = \overline{1, n_i - 1}, \; \tilde{\mathbf{x}}_i \in \Omega_{\tilde{x}i}, \tag{4}$$

где $\Omega_{\tilde{x}i}$ – некоторые области пространств R^{n_i}; функции $\phi_{n_i i}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ могут быть недифференцируемыми, $i = \overline{1, m}$.

Из условий (3) и (4) следует, что в общем случае компоненты вектор-функций $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ имеют вид $\phi_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}, \tilde{x}_{1,i}, \tilde{x}_{2,i} \ldots, \tilde{x}_{j+1,i})$. Именно поэтому производные функций $\phi_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ по $\tilde{x}_{j+1,i}$ не равны нулю в области $\Omega_{\tilde{x}i}$, а сами эти функции совершенно не зависят от переменных $\tilde{x}_{j+2,i}, \tilde{x}_{j+3,i} \ldots, \tilde{x}_{n_i,i}$, которые являются компонентами вектора $\tilde{\mathbf{x}}_i$. При этом области $\Omega_{\tilde{x}i}$ включают положения равновесия $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$ i-го блока, $i = \overline{1, m}$. Вектор-функции $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решений соответствующих дифференциальных систем, причем $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Каждая вектор-функция $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i = \overline{2, m}$, описывает свойства как собственно i-го блока, так и его связи с «предыдущими» (от первого до $(i-1)$-го) блоками. Предполагается, что при всех $i = \overline{1, m}$ векторы состояния $\tilde{\mathbf{x}}_i$ доступны измерению датчиками.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Централизованные управления $u_i = u_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots \tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i = \overline{1, m}$, каждое из которых в общем случае зависит от всех векторов $\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_i$, являются достаточно сложными в реализации, особенно при больших значениях m и n_i [16]. Поэтому в данной работе ставится задача синтеза локальных (децентрализованных) управлений $u_i = u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i = \overline{1, m}$, и поиска условий, при которых эти локальные управления (рис. 1, при $m = 3$) обеспечивают устойчивость положений равновесия $\mathbf{x}_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, многомерного объекта управления (1)–(4) при наличии нелинейных связей между блоками.

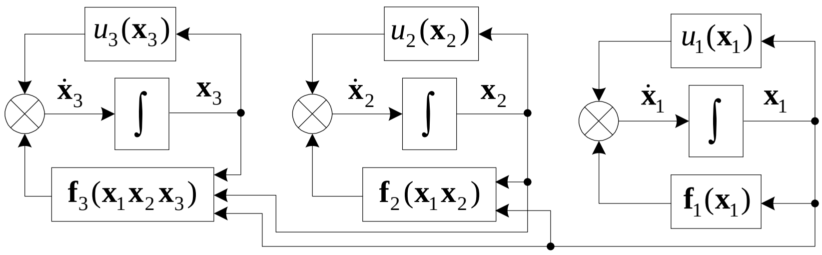

Рис. 1. Децентрализованное управление многомерным объектом

Ограничимся здесь случаем аддитивных связей, когда уравнения (2) имеют вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) + \boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{e}_{n_i} u_i, \quad i = \overline{2, m}. \tag{5}$$

В уравнениях (5) вектор-функции $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ описывают динамику отдельных блоков многомерного объекта, а вектор-функции $\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_{i-1})$, $i = \overline{2, m}$ – аддитивные связи между ними. При этом нелинейные вектор-функции $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ удовлетворяют условиям (3) и (4), т. е. уравнение (1) и каждое из уравнений (5) при $\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) \equiv \mathbf{0}$, $i = \overline{2, m}$, имеет УФЖ.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

С целью построения стабилизирующих управлений $u_i = u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, следуя [12, 17], введем вещественные числа $\lambda_{ji} \geq \varepsilon_i > 0$, новые переменные состояния $w_{ji} = w_{ji}(t)$, $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$, а также вспомогательные величины $\gamma_{1i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ и $\gamma_{2i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ следующим образом:

$$w_{1i} = \tilde{x}_{1i}, \; w_{ji} = \sum_{\nu=1}^{j-1} \frac{\partial w_{j-1,i}}{\partial \tilde{x}_{\nu,i}} \phi_{\nu i}(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \lambda_{j-1,i} w_{j-1,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i), \quad j = \overline{2, n_i}, \quad i = \overline{2, m}, \tag{6}$$

$$\gamma_{1i}(\tilde{\mathbf{x}})=\frac{\partial w_{n_i,i}}{\partial x_{n_i,i}}=\prod_{i=1}^{n_i-1}\frac{\partial\phi_{ji}(\tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial\tilde{x}_{j+1,i}},\quad \gamma_{2i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)=\sum_{\nu=1}^{n_i-1}\frac{\partial w_{n_i,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial\tilde{x}_{\nu i}}\phi_\nu(\tilde{\mathbf{x}}_i),\tag{7}$$

где $\phi_{j,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)=\phi_{j,i}(\tilde{x}_{1i},\ldots,\tilde{x}_{j+1,i},0,\ldots,0)$.

Из выражений (1), (5) и (6) следует, что каждая переменная w_{ji} непосредственно зависит лишь от первых j переменных $\tilde{x}_{\nu,i}$, $\nu=\overline{1,j}$, т. е. $w_{ji}=w_{ji}(\tilde{\mathbf{x}}_i)=w_{ji}(\tilde{x}_{1,i},\ldots,\tilde{x}_{ji},0,\ldots,0)$. Введенные переменные и величины (6) и (7) позволяют, по аналогии с одномерным случаем [12], сформировать искомые локальные управления:

$$u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)=-\gamma_{1,i}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}_i)\Big[\gamma_{2,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)+\lambda_{n_i,i}w_{n_i,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i)\Big]-\phi_{n_i,i}(\tilde{\mathbf{x}}_i),\quad \tilde{\mathbf{x}}_i\in\Omega_{\tilde{x}},\quad i=\overline{1,m}.\tag{8}$$

При управлениях (8) и условиях $\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})\equiv\mathbf{0}$ уравнения (1), (5), (8) относительно переменных состояния w_{ji} (6) удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\dot{w}_{ji}=w_{j+1i}-\lambda_{ji}w_{ji},\quad j=\overline{1,\,n_i-1},\quad \dot{w}_{n_ii}=-\lambda_{n_ii}w_{n_ii},\quad i=\overline{1,m},\tag{9}$$

которые являются линейными и при $\lambda_{ji}\geq\varepsilon_i>0$, очевидно, устойчивыми в целом [12].

Доказательство устойчивости положений равновесия $\tilde{\mathbf{x}}_i=0$, $i=\overline{1,m}$ уравнений (1), (5) и (8) при $\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})\equiv\mathbf{0}$ в области $\Omega_{\tilde{x}}$ приведено в монографии [17]. Отметим также, что существование управлений $u_i=u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ (8) обеспечивается условиями (3).

Чтобы сформулировать условия, при которых локальные управления $u_i=u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i=\overline{1,m}$ (8) обеспечивают устойчивость положений равновесия $\tilde{\mathbf{x}}_i=0$, $i=\overline{1,m}$ системы (1), (5), (8) при наличии нелинейных связей между блоками, введем обозначения

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})}{\partial\tilde{\mathbf{x}}_\nu}=\mathbf{\Phi}'_{i\nu}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}),\quad \nu=\overline{1,\,i-1},\quad \tilde{\mathbf{x}}_i\in\Omega_{\tilde{x}i},\quad i=\overline{2,m}.\tag{10}$$

Теорема 1. *Если в уравнениях* (1) и (5) *нелинейности* $\boldsymbol{\phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i=\overline{1,m}$ *удовлетворяют условиям* (3), (4), *а вектор-функции* $\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})$ *– условиям*

$$\mathbf{\Phi}_i(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})=\mathbf{0},\quad i=\overline{2,m},\tag{11}$$

$$\left\|\mathbf{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})\right\|\leq\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}\left\|\tilde{\mathbf{x}}_j\right\|^{\alpha_{ij}},\quad \tilde{\mathbf{x}}_i\in\Omega_{\tilde{x}i},\quad \tilde{\mathbf{x}}_j\neq0,\quad i=\overline{2,m},\tag{12}$$

где l_{ij}, α_{ij} *– неотрицательные числа такие, что*

$$l_{ij} > 0,\ \alpha_{ij} > 0 \text{ при } \left\| \mathbf{\Phi}'_{i\nu}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) \right\| \neq 0,\ \nu = \overline{1,\ i-1}, \tag{13}$$

$$l_{ij} = 0,\ \alpha_{ij} = 0 \text{ при } \left\| \mathbf{\Phi}'_{i\nu}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) \right\| \equiv 0,\ \nu = \overline{1,\ i-1}, \tag{14}$$

то при управлениях (8) *выполняются условия*

$$-\left\| \tilde{\mathbf{x}}_i(t, \tilde{\mathbf{x}}_{i0}) \right\| \leq C_i(\tilde{\mathbf{x}}_{10},\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i0}) e^{-\mu_i t},\quad \tilde{\mathbf{x}}_i \in \Omega_{\tilde{x}i},\quad i = \overline{1, m}, \tag{15}$$

где $C_i(\tilde{\mathbf{x}}_{10},\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_{i0})$, μ_i *– положительные величины.*

Данной теоремой, очевидно, устанавливаются условия асимптотической устойчивости в большом положения равновесия системы (1), (5) и (8), если уравнения многомерного объекта (1) и (5) представлены в УФЖ, а связи между его блоками аддитивные.

Следствие. *Если условия* (3), (4) *и* (11)–(14) *теоремы* 1 *выполняются при всех* $\tilde{\mathbf{x}}_i \in R^{n_i}$, $i = \overline{1, m}$, *то положение равновесия системы* (1), (5) и (8) *является асимптотически устойчивым в целом*.

Теорема 1 и приведенное следствие из нее доказываются с применением формулы Коши и леммы Гронуолла–Беллмана аналогично доказательствам теорем Ляпунова, приведенным в [18]. Теорема 1 в некотором смысле аналогична известным теоремам об устойчивости нелинейных систем с устойчивой линейной частью. Отличие заключается в том, что, во-первых, здесь обеспечивается устойчивость положения равновесия сложной нелинейной системы не в малом, а в большом. Во-вторых, устойчивость положения равновесия сложной нелинейной системы обеспечивается за счет придания устойчивости положению равновесия более простой, но также нелинейной системы.

Приведенные теорема 1 и следствие позволяют предложить метод аналитического синтеза нелинейных многомерных систем управления (АСНМСУ) с применением УФЖ, в данном случае применительно к нелинейным многомерным объектам с аддитивными связями между блоками (каналами управления). Переходя к рассмотрению этого метода, предположим, что число управлений равно числу управляемых переменных. Данный метод аналитического синтеза предполагает выполнение следующих шагов.

1. Уравнения многомерного управляемого объекта приводятся к управляемой форме Жордана, т. е. к уравнениям типа (1) и (5).

2. С помощью соотношений (6)–(8) синтезируются локальные управления $u_i = u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, $i = \overline{1, m}$ (8).

3. С применением компьютерного моделирования замкнутой многомерной системы (1), (5) и (8) выбираются параметры $\lambda_{ji} \geq \varepsilon_i > 0$, $j = \overline{1,\ n_i}$, $i = \overline{1, m}$, так чтобы переходные процессы системы удовлетворяли требуемым свойствам.

Отметим, что локальные управления (8) являются управлениями по состоянию. Однако возможность представления уравнений нелинейных систем рассматриваемого типа в виде (9) позволяет синтезировать наблюдатель состояния и заменить переменные состояния их оценками в выражениях (8) [15, 16]. Эта возможность существенно расширяет область применения предложенного метод аналитического синтеза нелинейных МСАУ.

Приведем конкретный пример синтеза нелинейной многомерной системы управления.

4. ПРИМЕР

Найдем локальные управления для трехмассового объекта, рассмотренного в работе [16]. Объект состоит из трех тел, соединенных друг с другом и с основанием тремя пружинами. В указанной работе рассматривается линейная модель этого объекта, где демпфирующие силы вязкого трения считаются линейными. В данной работе зависимость демпфирующих сил аппроксимируется квадратичными функциями скоростей тел.

С учетом указанной аппроксимации уравнения рассматриваемого объекта (см. [16], с. 27) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} m_1\ddot{y}_1 + d_1\varphi(\dot{y}_1) + k_1 y_1 + k_2(y_1 - y_2) = \tilde{u}_1, \\ -k_2 y_1 + m_2\ddot{y}_2 + d_2\varphi(\dot{y}_2) + (k_1 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = \tilde{u}_2, \\ -k_3 y_2 + m_3\ddot{y}_3 + d_3\varphi(\dot{y}_3) + k_3 y_3 = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $m_1,\ m_2,\ m_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3$ и $\dot{y}_1,\ \dot{y}_2,\ \dot{y}_3$ – массы, перемещения и скорости первого, второго и третьего тел; $k_1,\ k_2,\ k_3$ – коэффициенты жесткости первой, второй и третьей пружин, а $d_1,\ d_2,\ d_3$ – коэффициенты демпфирования; нелинейная функция $\varphi(s) = |s|s$; $y_1,\ y_2$ – управляемые переменные – перемещения первого и второго тела; $\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2$ – управления. Переменные y_i и их скорости $\dot{y}_i$, $i = 1, 2, 3$ доступны прямому измерению.

При отсутствии управлений перемещения тел, вызванные их отклонениями от положения равновесия, являются колебательными. Задача заключается в синтезе управлений $\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2$, обеспечивающих устойчивость положения равновесия, монотонный характер переходных процессов замкнутой системы и их длительность не более 8 с.

Переходя к ее решению, прежде всего отметим, что функции $\varphi(s) = |s|s$ и $|s|$ являются дифференцируемыми по своим аргументам, так как

$$\frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial s^2}{\partial s} = 2s, & s \ge 0 \\ -\dfrac{\partial s^2}{\partial s} = -2s, & s < 0 \end{Bmatrix} = 2|s|,\quad \frac{\partial|s|}{\partial s} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial s}, & s \ge 0 \\ \dfrac{\partial(-s)}{\partial s}, & s < 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & s \ge 0 \\ -1, & s < 0 \end{Bmatrix} = \mathrm{sign}(s).$$

Поэтому правые части уравнений (16) являются дифференцируемыми, что позволяет представить их в УФЖ и применить для решения задачи синтеза метод АСНМСУ, расчетные соотношения и последовательность действий которого приведены выше.

Для преобразования уравнений (16) к УФЖ, следуя [12], введем новые переменные состояния и вспомогательные управления следующим образом. Положим $\tilde{x}_{11} = y_1$, $\tilde{x}_{21} = \dot{y}_1$, $\tilde{x}_{12} = y_3$, $\tilde{x}_{22} = \dot{y}_3$, $\tilde{x}_{32} = y_2$, $\tilde{x}_{42} = \dot{y}_2$, $[\tilde{u}_1 + k_2(\tilde{x}_{32} - \tilde{x}_{11})] / m_1 = u_1$, $\tilde{u}_2 / m_2 = u_2$. В результате уравнения (16) примут вид

$$\dot{\tilde{x}}_{11} = \tilde{x}_{21} = \phi_{11}(\tilde{\mathbf{x}}_1),$$

$$\dot{\tilde{x}}_{21} = -(d_1\varphi(x_{21}) + k_1\tilde{x}_{11}) / m_1 + u_1 = \phi_{21}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + u_1, \quad y_1 = \tilde{x}_{11}, \tag{17}$$

$$\dot{x}_{12} = \tilde{x}_{22} = \phi_{12}(\tilde{\mathbf{x}}_2),$$

$$\dot{\tilde{x}}_{22} = [k_3(\tilde{x}_{32} - \tilde{x}_{12}) - d_3\varphi(\tilde{x}_{22})] / m_3 = \phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2),$$

$$\dot{\tilde{x}}_{32} = \tilde{x}_{42} = \phi_{32}(\tilde{\mathbf{x}}_2),$$

$$\dot{\tilde{x}}_{42} = \Phi_{42}(\tilde{x}_{11}) + \phi_{42}(\tilde{\mathbf{x}}_2) + u_2, \quad y_2 = \tilde{x}_{32}, \tag{18}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_1 = [\tilde{x}_{11} \quad \tilde{x}_{21}]^T$, $\tilde{\mathbf{x}}_2 = [\tilde{x}_{12} \quad \tilde{x}_{22} \quad \tilde{x}_{32} \quad \tilde{x}_{42}]^T$, $\phi_{42}(\tilde{\mathbf{x}}_2) = [k_3(\tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{32}) - -d_2\varphi(\tilde{x}_{42}) - k_2\tilde{x}_{32}] / m_2$, $\Phi_{42}(\tilde{x}_{11}) = k_2\tilde{x}_{11} / m_2$.

Как видно, рассматриваемый объект функционально состоит как бы из двух управляемых блоков: второго (17) и четвертого (18) порядка. При этом $\partial\phi_{11}(\tilde{\mathbf{x}}_1) / \partial\tilde{x}_{21} = 1$, т. е. по отношению к уравнениям (17), где $n_1 = 2$, условия (3) и (4) выполняются при всех $\tilde{\mathbf{x}}_1 \in R^2$. Следовательно, уравнения (17) имеют УФЖ в R^2 [12, 13]. В уравнениях (18), описывающих второй блок, $n_2 = 4$, а $\partial\phi_{12}(\tilde{\mathbf{x}}_2) / \partial\tilde{x}_{22} = 1$, $\partial\phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2) / \partial\tilde{x}_{32} = k_3 / m_3$, $\partial\phi_{32}(\tilde{\mathbf{x}}_2) / \partial\tilde{x}_{42} = 1$, т. е. условия (3) и (4) здесь также выполняются. Следовательно, уравнения (18) при $\Phi_{42}(\tilde{x}_{11}) \equiv 0$ также имеют УФЖ.

В данном случае связь второго блока с первым ($i = 2$, $\nu = 1$) является аддитивной, причем $\mathbf{\Phi}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad k_2\tilde{x}_{11} / m_2]^T$, $\mathbf{\Phi}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\|\mathbf{\Phi}'_{21}(\tilde{\mathbf{x}}_1)\| = = k_2 / m_2 \neq 0$ и $\|\mathbf{\Phi}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1)\| \leq l_{21}\|\tilde{\mathbf{x}}_1\|^{\alpha_{21}}$ при $l_{21} = k_2 / m_2 > 0$, $\alpha_{21} = 1 > 0$, т. е. все условия теоремы 1 выполняются. Это дает возможность решить задачу синтеза нелинейной МСАУ на основе этой теоремы.

Найдем сначала управление u_1. Так как $n_1 = 2$, то по выражениям (6) и (7) при $i = 1$ вводим *две* новые переменные состояния w_{j1} и вспомогательные величины γ_{j1}, $j = 1, 2$:

$$w_{11} = \tilde{x}_{11}, \quad w_{21} = \frac{\partial w_{11}}{\partial \tilde{x}_{11}} \phi_{11}(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \lambda_{11} w_{11} = \tilde{x}_{21} + \lambda_{11}\tilde{x}_{11},$$

$$\gamma_{11}(\tilde{\mathbf{x}}_i) = 1, \quad \gamma_{21}(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \frac{\partial w_{21}}{\tilde{x}_{11}} \phi_{11} = \lambda_{11}\tilde{x}_{21}.$$

Теперь по (8) находим локальное управление для первого блока

$$u_1(\tilde{\mathbf{x}}_1) = [d_1\varphi(x_{21}) + k_1\tilde{x}_{11}] / m_1 - (\lambda_{11} + \lambda_{21})\tilde{x}_{21} - \lambda_{11}\lambda_{21}\tilde{x}_{11}. \qquad (19)$$

В выражении (19) $\lambda_{11} > 0$, $\lambda_{21} > 0$ – параметры управления блоком (17).

Из выражения (19) с учетом обозначения $[\tilde{u}_1 + k_2(\tilde{x}_{32} - \tilde{x}_{11})] / m_1 = u_1$ выводим закон (алгоритм) управления первым телом объекта (16):

$$\tilde{u}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1) = [d_1\varphi(x_{21}) + k_1\tilde{x}_{11}] - m_1[(\lambda_{11} + \lambda_{21})\tilde{x}_{21} + \lambda_{11}\lambda_{21}\tilde{x}_{11}] - k_2(\tilde{x}_{32} - \tilde{x}_{11}). \qquad (20)$$

Перейдем к синтезу управления $\tilde{u}_2$. Здесь $n_2 = 4$, поэтому снова по (6) при $i = 2$ вводим *четыре* новые переменные состояния:

$$w_{12} = x_{12}, \quad w_{22} = \tilde{x}_{22} + \lambda_{12}\tilde{x}_{12},$$

$$w_{32} = (\lambda_{12}\lambda_{22} - k_3 / m_3)\tilde{x}_{12} + (\lambda_{12} + \lambda_{22})\tilde{x}_{22} - [d_3\varphi(\tilde{x}_{22}) - k_3\tilde{x}_{32}] / m_3,$$

$$w_{42}(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \psi_2\phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2) + \lambda_{32}\psi_3\tilde{x}_{12} + \psi_4\tilde{x}_{22} -$$

$$- [\lambda_{32}(d_3\varphi(\tilde{x}_{22}) - k_3\tilde{x}_{32}) + k_3\tilde{x}_{42}] / m_3, \qquad (21)$$

где

$$\psi_2 = \lambda_{12} + \lambda_{22} - 2d_3|\tilde{x}_{22}| / m_3, \quad \psi_3 = \lambda_{12}\lambda_{22} - k_3 / m_3,$$

$$\psi_4 = \psi_3 + \lambda_{32}(\lambda_{12} + \lambda_{22}). \qquad (22)$$

Далее по выражениям (7) при $i = 2$ находим вспомогательные величины: $\gamma_{12}(\tilde{\mathbf{x}}_i) = k_3 / m_3$ и

$$\gamma_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \psi_2\psi_5 + \psi_3[\lambda_{32}\tilde{x}_{22} + \phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2)] +$$

$$+ \left[2d_3\phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2))^2\tilde{x}_{22} \big/ m_3 + \lambda_{32}k_3\tilde{x}_{42}\right] \big/ m_3, \qquad (23)$$

где

$$\psi_5 = (\lambda_{32} - 2d_3|\tilde{x}_{22}| / m_3)\phi_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2) - k_3\tilde{x}_{22} / m_3. \qquad (24)$$

Наконец, снова по (8) при $i = 2$ с учетом обозначения $\tilde{u}_2 / m_2 = u_2$ находим закон (алгоритм) управления вторым телом объекта (16):

$$\tilde{u}_2(\tilde{\mathbf{x}}_2) = -m_2[m_3(\gamma_{22}(\tilde{\mathbf{x}}_2) + \lambda_{42}w_{42}(\tilde{\mathbf{x}}_2)) / k_3 + \phi_{42}\phi_{42}(\tilde{\mathbf{x}}_2)]. \qquad (25)$$

В выражениях (21)–(25) коэффициенты λ_{j2}, $j = \overline{1,4}$ – параметры закона (алгоритма) управления $\tilde{u}_2(\tilde{\mathbf{x}}_2)$.

Таким образом, искомые локальные алгоритмы управления заданным многомерным объектом (16) определяются выражениями (20) и (21)–(25). При этом вспомогательные управления u_1 и u_2 являются локальными. Однако реальное управление $\tilde{u}_1$, строго говоря, таковым не является, так как зависит не только от перемещений и скорости первого тела, но и от перемещений y_2 второго тела. Однако, как свидетельствуют результаты моделирования, на свойства замкнутой системы этот факт не оказывает существенного влияния.

Моделирование синтезированной системы проводилось в MATLAB при следующих значениях параметров объекта: $m_1 = 1$, $m_2 = 2{,}25$, $m_3 = 1{,}5$; $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$; $d_1 = d_2 = d_3 = 0{,}1$ и параметрах локальных управлений: $\lambda_{11} = 4$, $\lambda_{21} = 6$, $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_{22} = 2$, $\lambda_{32} = 2{,}5$, $\lambda_{42} = 3$. Как показали результаты моделирования системы (17), (19), (20), (21)–(25) при условиях $\lambda_{ji} \geq \varepsilon_i > 0$, $j = \overline{1, n_i}$, $n_i = 2,\ 4$, $i = \overline{1, 2}$, переходные процессы в этой системе являются устойчивыми. На рис. 2, *а–в* приведены графики изменения положений всех трех тел, а на рис. 2, *г* – график изменения управления $\tilde{u}_2$ при начальных условиях $\tilde{\mathbf{x}}_{01} = [-1 \quad 0]^T$, $\tilde{\mathbf{x}}_{02} = [1 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad 0]^T$. Аналогичный, практически монотонный характер имеют скорости перемещения тел и управление $\tilde{u}_1$.

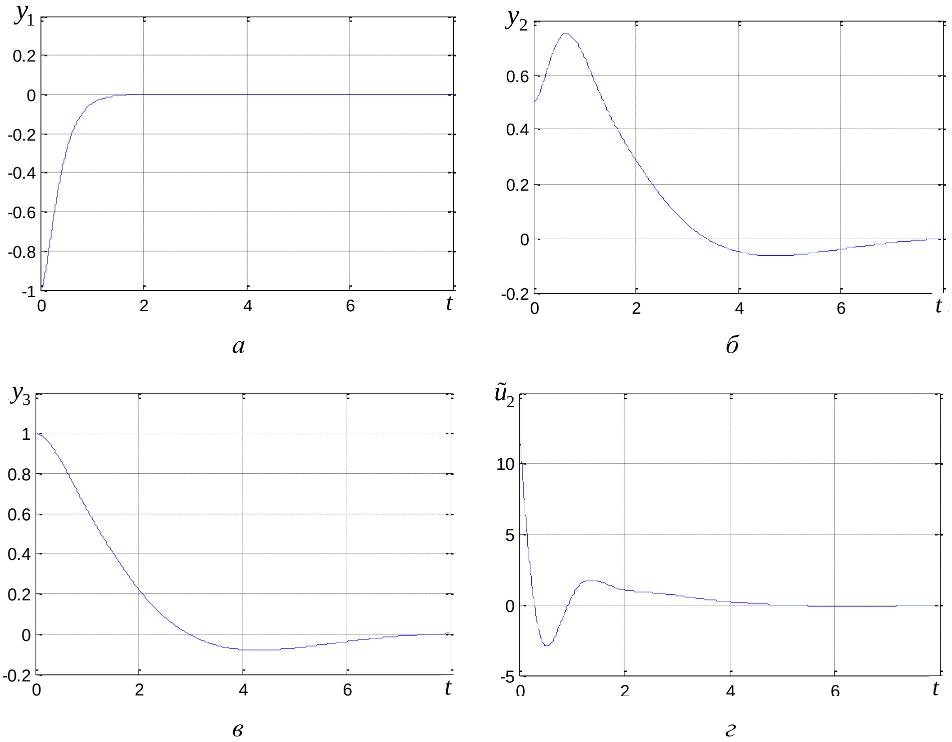

Рис. 2. Изменения переменных состояния и управления

Как видно, синтезированная система имеет требуемые свойства. Легко установить также, что, изменяя значения параметров λ_{ji} алгоритмов локальных управлений, можно обеспечить различный характер переходных процессов замкнутой системы управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод позволяет синтезировать системы автоматического управления нелинейными многомерными объектами, уравнения которых могут быть приведены к управляемой форме Жордана с аддитивными связями. Необходимость приведения нелинейных уравнений объектов к УФЖ не является слишком жестким ограничением, так как уравнения многих реальных нелинейных многомерных объектов приводятся к этой форме путем соответствующего обозначения переменных состояния. Аналогично предположение о доступности измерению всех переменных состояния объектов может быть снято применением соответствующих наблюдателей. Некоторым недостатком предложенного метода является необходимость применения итерационного метода для выбора значений параметров локальных алгоритмов управления с целью обеспечения требуемого быстродействия и характера переходных процессов замкнутых многомерных систем автоматического управления.

Данный метод является полностью аналитическим и может применяться при построении систем управления летательными аппаратами, техническими объектами энергетической, химической, пищевой и других отраслей народного хозяйства страны, а также различными объектами специального назначения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вознесенский И.Н.* О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика. – 1938. – Вып. 4–5. – С. 65–78.
2. *Петров Б.Н.* Избранные труды. Т. 1. Теория автоматического управления. – М.: Наука, 1983. – 373 с.
3. *Никифоров В.О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69–73.
4. *Гайдук А.Р.* Синтез систем управления многомерными объектами // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. –1998. – Т. 37, № 1. – С. 9–17.
5. *Востриков А.С.* Синтез систем регулирования методом локализации. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 237 с.
6. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 396 с.
7. *Ким П.Д.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
8. *Лукьянов А.Г., Уткин В.И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // Автоматика и телемеханика. – 1981. – Вып. 4. – С. 5–13.
9. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // Автоматика и телемеханика. – 2006. – Вып. 11. – С. 3–13.
10. *Тян В.К.* Редукция синтеза многомерных линейных систем управления к синтезу одномерных с типовым объектом // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 4. – С. 2–7.
11. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.
12. *Гайдук А.Р.* Синтез нелинейных систем на основе управляемой формы Жордана // Автоматика и телемеханика. – 2006. – Вып. 7. – С. 3–13.
13. *Нейдорф Р.А., Фан Н.Х.* Обобщённый анализ динамической системы на наличие признаков жордановой формы // Вестник Донского государственного технического университета. – 2008. – Т. 8, № 3 (38). – С. 211–220.
14. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Оптимальное по квадратичному критерию управление нелинейными системами // Научный вестник НГТУ. – 2014. – № 4 (57). – С. 7–18.

15. *Gaiduk A.R.* Control systems design with disturbance rejection based on JCF of the nonlinear plant equations // Facta Universitatis. Series: Automatic Control and Robotics. – 2012. – Vol. 11, N 2. – P. 81–90.

16. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Стабилизация трехмассовой системы: модальный метод синтеза в пространстве состояний с наблюдателем пониженного порядка // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 4 (62). – С. 13–24.

17. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.

18. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор Южного федерального университета, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – теория систем автоматического управления, анализ и синтез. Имеет более 300 научных публикаций, в том числе 16 монографий. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Плаксиенко Елена Анатольевна, доцент Таганрогского института управления и экономики. Основное направление научных исследований – управление в технических и экономических системах. Имеет более 40 публикаций, в том числе 2 монографии. E-mail: pumkad@mail.ru

Колоколова Ксения Валериевна, аспирант Южного федерального университета. Основное направление научных исследований – теория многомерных систем управления, анализ и синтез. Имеет более 20 научных публикаций. E-mail: kbesklubova@mail.ru

Design of control algorithms for nonlinear multivariable plants on the basis of JCF[*]

A.R. GAIDUK[1] *, E.A. PLAKSIENKO*[2]*, K.V. KOLOKOLOVA*[3]

[1] *Southern Federal University, 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russian Federation, D.Sc. (Eng.)professor. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*

[2] *Taganrog institute of Management and Economy, 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russian Federation, PhD (Eng.) associate professor. E-mail: pumkad@mail.ru*

[3] *Southern Federal University, 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russian Federation, postgraduate student. E-mail: kbesklubova@mail.ru*

The problem of designing algorithms for multivariable nonlinear plant control is considered. The existing approaches to solving this problem are focused on certain classes of nonlinear or linearized models of control plants. On the other hand, rising requirements to the quality of control systems generate a need for a more full account of properties and features of real plants including their multivariable character and control channel connectivity. These factors determine the relevance of developing new methods of control algorithm design for multivariable nonlinear plants. An analytical design method is applied to solve this problem. A special form of the multivariable plant equations with a differentiable nonlinearity referred to as the Jordan controlled form and local controls which are defined on the state variables of each plant block are used.

The solvability conditions of the design problem in the multivariable case both with connections between control channels and without these connections are the main scientific results presented in the paper. These conditions consist in restrictions on derivatives of the plant nonlinearity. Conditions of the asymptotic stability of the equilibrium of multivariable nonlinear control systems both as a whole and as global are also found. An analytical design method of control algorithms for multivariable nonlinear plants whose equations can be reduced to the

[*] *Received 31 July 2014.*

Jordan controlled form is proposed. The developed design method can be applied to the construction of control systems for aircraft, power and other industrial plants, and also special purpose plants because nonlinear equations of many of these plants can be reduced to this form. The method allows providing desirable properties of a nonlinear multivariable control system by assigning corresponding values of the local control parameters. The efficiency of the suggested method is shown on the example of the control design for a concrete multivariable plant.

Keywords: multivariable plant, nonlinearity, control, state variables, Jordan controlled form, design, system, stability, transient

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-2-59-72

REFERENCES

1. Voznesenskii I.N. O regulirovanii mashin s bol'shim chislom reguliruemykh parametrov [On regulation of machines with a large number of parameters regulated]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1938, iss. 4–5, pp. 65–78. (In Russian)

2. Petrov B.N. Izbrannye trudy. T. 1. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Selected Works. Vol. 1. Automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 373 p.

3. Nikiforov V.O. Nelineinaya sistema upravleniya s kompensatsiei vneshnikh determinirovannykh vozmushchenii [Nonlinear control system with rejection of the external determined disturbances]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International,* 1997, vol. 36, no. 4, pp. 69–73.

4. Gaiduk A.R. Sintez sistem upravleniya mnogomernymi obyektami [Synthesis of control systems of multivariable objects]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International,* 1998, vol. 37, no. 1, pp. 9–17.

5. Vostrikov A.S. *Sintez sistem regulirovaniya metodom lokalizatsii* [Synthesis of control systems by the localization method]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 237 p.

6. Krasnoschechenko V.I., Krischenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of the analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.

7. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya T. 2. Mhogomernye, nelinejnye, optimalynye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multivariable, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

8. Luk'yanov A.G., Utkin V.I. Metody svedeniya uravnenii dinamicheskikh sistem k regulyarnoi forme [Methods for reduction of equations of dynamic systems to a regular form]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1981, vol. 42, iss. 4, pp. 5–13. (In Russian)

9. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Metod passifikatcii v zadachakh adaptivnogo upravleniya, otcenivaniya i sinkhronizatcii [Pacification method in tasks of adaptive control, estimation and synchronization]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, iss. 11, pp. 3–13. (In Russian)

10. Tjan V.K. Reduktsiya sinteza mnogomernykh lineinykh sistem upravleniya k sintezu odnomernykh s tipovym ob"ektom [Reduction of synthesis process of many-dimensional linear control systems to synthesis of one-demensional linear control systems with standart]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*, 2008, no. 4. pp. 2–7.

11. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.

12. Gaiduk A.R. Design of nonlinear systems based on the controllable jordan form. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, iss. 7, pp. 1017–1027. doi: 10.1134/S0005117906070010

13. Neidorf R.A., Fan N.Kh. Obobshchennyi analiz dinamicheskoi sistemy na nalichie priznakov zhordanovoi formy [Generalised analysis of a dynamic system for the presence of signs of the Jordan form]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Don state technical university*, 2008, vol. 8, no. 3 (38), pp. 211–220.

14. Gaiduk A.R., Plaksienko E.A. Optimal'noe po kvadratichnomu kriteriyu upravlenie nelineinymi sistemami [Optimal control of nonlinear systems in terms of a quadratic criterion]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (57), pp. 7–18.

15. Gaiduk A.R. Control systems design with disturbance rejection based on JCF of the nonlinear plant equations. *Facta Universitatis, Series: Automatic Control and Robotics*, 2012, vol. 11, no. 2, pp. 81–90.

16. Voevoda A.A., Shoba E.V. Stabilizatsiya trekhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza v prostranstve sostoyanii s nablyudatelem ponizhennogo poryadka [Stabilisation of three-mass system: a modal method of synthesis in state space with reduced-order observer]. *Sbornik nauchnyh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 4 (62), pp. 13–24.

17. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of automatic control systems analytical design (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.

18. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 472 p.