

УДК 519.24

О модели случайного блуждания на ковре Серпинского*

Н.С. АРКАШОВ¹, Е.В. ЛЕЖНЕВ²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: nicky1978@mail.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: lionlev@yandex.ru

В статье разработаны и численно реализованы две модели случайного блуждания на самоподобном подмножестве плоскости, которое можно рассматривать как ковер Серпинского, развернутый на всю плоскость. Такое множество будем называть ковром Серпинского в целом. Построенные модели случайного блуждания позволили решить две задачи: вычислить средние квадраты соответствующих случайных процессов и исследовать асимптотику вероятности возвращения в начальную точку блуждания. Размерность геодезических ковра Серпинского в целом и кривых, по которым происходит случайное блуждание, равна единице, между тем размерность ковра Серпинского имеет дробное значение. Мы следовали формату случайного блуждания по самоподобному множеству, приведенному в работе [1]. В этом формате средний квадрат случайного блуждания связан с хаусдорфовой размерностью аналогов геодезических, а вероятность возвращения – с отношением размерности фазового пространства к размерности этих геодезических. Сформулируем полученные нами результаты для ковра Серпинского в целом более точно: средний квадрат блуждания ведет себя линейно по времени, вероятность возвращения в начало координат за определенное число шагов заключена между значениями классической вероятности возвращения симметричного случайного блуждания на плоскости и на прямой. Еще раз отметим, что число степеней свободы, определяемое как отношение размерности фазового пространства к размерности геодезических, имеет для ковра Серпинского дробное значение. Построенная модель случайного блуждания позволяет понять, с чем связан дробный характер числа степеней свободы. Действительно, из-за неоднородной структуры ковра Серпинского у блуждающей точки число возможных направлений движения не является постоянной величиной и изменяется с течением времени.

Ключевые слова: процессы переноса, стохастическое моделирование, диффузия, ковер Серпинского, случайное блуждание, цепь Маркова, самоподобные множества, вероятность возвращения

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-83-93

* Статья получена 26 мая 2015 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00661)

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В основе работ, посвященных процессам переноса на самоподобных структурах (см., например, [1–6]), лежит случайное блуждание на множествах, представляющих эти структуры. Мы рассматриваем такие реализации самоподобных структур, для которых минимальная размерность Хаусдорфа всех путей, соединяющих любые две точки этого множества, одна и та же. На множестве с подобной структурой через d_f обозначим размерность Хаусдорфа этого множества, а через d_0 – минимальную размерность Хаусдорфа всех путей, соединяющих две какие-нибудь точки на этом множестве. Сформулируем условия, которые в целом ряде прикладных работ предполагаются выполненными для частицы, блуждающей по самоподобному множеству. Средний квадрат расстояния от частицы, совершающей блуждание, до начала координат в момент времени t (называемый физиками шириной диффузионного пакета) ведет себя пропорционально t^{1/d_0} при $t \rightarrow \infty$, а вероятность возвращения частицы в начало координат в момент времени t ведет себя пропорционально $t^{-k/2}$ при $t \rightarrow \infty$, где $k = d_f / d_0$.

Повторим, что указанные условия получены в работе [1] исходя из некоторых эвристических соображений. В обозначенной работе, а также в работах [4, 7] ставился вопрос об обосновании представленных моделей процессов переноса.

Отметим также, что ковер Серпинского можно интерпретировать как пористую среду с сетью межзерновых связанных каналов (см., например, исследования [8–10]).

В настоящей работе мы строим математические модели случайного блуждания на конкретном самоподобном множестве, реализующие условие изменения среднего квадрата блуждающей частицы в зависимости от размерности геодезических; кроме того, с помощью численного моделирования исследуется асимптотика вероятности возвращения в начало координат. Отметим, что для нашего случая фазового пространства $d_0 = 1$ и $d_f = \ln 8 / \ln 3$, где d_f – известная хаусдорфова размерность ковра Серпинского (см., например, работы [11–13]), и соответственно предполагается, что вероятность p_t возвращения в начало координат за время t ведет себя как $t^{-\ln 8 / \ln 9}$ при $t \rightarrow \infty$.

Итак, фазовым пространством случайного блуждания будет целочисленная решетка в \mathbb{R}^2 , построенная на основе ковра Серпинского – известного двумерного самоподобного множества.

Прежде всего напомним определение ковра Серпинского. Пусть S_0 – квадрат с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$. Разделим квадрат прямыми, параллельными его сторонам, на девять равных квадратов, далее из квадрата S_0 удалим внутренность центрального квадрата. Получается множество S_1 , состоящее из восьми оставшихся квадратов первого ранга. Поступая аналогичным образом с каждым из квадратов первого ранга, полу-

чаем 64 квадрата второго ранга. Продолжая указанный процесс до бесконечности, получим последовательность вложенных множеств

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$$

Пересечение $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ и является ковром Серпинского, будем его обозначать через K_0 .

Сделаем важное замечание, которое лежит в основе построения фазового пространства блуждания: стороны начального квадрата, а также стороны квадратов всех рангов принадлежат ковру Серпинского.

Определим растягивающее преобразование подобия с коэффициентом 3: $\rho(x) = 3x$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Далее рассмотрим последовательность множеств $K_0 \subset \rho(K_0) \subset \rho^2(K_0) \subset \dots$ и отметим, что $\rho^n(K_0)$ (ρ^n – n -кратная композиция преобразования ρ) является ковром Серпинского, построенным по начальному квадрату со стороной 3^n . Через K обозначим объединение $\bigcup_{i=0}^{\infty} \rho^i(K_0)$. Отметим, что диаметр множества K равен $+\infty$.

Отобразим множество K симметрично относительно прямых $y = -x$, $y = x$ и начала координат, результат отображения обозначим через K_l , K_r и K_d соответственно. Следующее объединение: $K \cup K_r \cup K_l \cup K_d$ мы будем называть ковром Серпинского в целом. Всюду в дальнейшем будем рассматривать множество $S = (K \cup K_r \cup K_l \cup K_d) \cap \mathbb{Z}^2$, которое является *фазовым пространством* нашего блуждания. Особыми точками на S будем называть точки, лежащие на сторонах удаленных квадратов за исключением вершин этих квадратов.

1. СИММЕТРИЧНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

Перейдем теперь к определению случайного блуждания. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – две независимые друг от друга последовательности независимых радемахеровских случайных величин (т. е. $P(\xi_1 = -1) = P(\xi_1 = 1) = 1/2$). Отметим, что процесс $S_0 = (0, 0)$, $S_t = \sum_{i=1}^t (\xi_i, \eta_i)$, $t \geq 1$ является обычным классическим случайным блужданием на двумерной целочисленной решетке.

Определим симметричное случайное блуждание Z_t , $t \geq 0$ на S . Положим $Z_0 = (0, 0)$, далее если Z_t не является особой точкой, то $Z_{t+1} = Z_t + (\xi_{t+1}, \eta_{t+1})$. Если Z_t является особой точкой, при этом соответствующая сторона удаленного квадрата составляет угол $\pi/4$ с осью абсцисс, то $Z_{t+1} = Z_t + (\xi_{t+1}, \xi_{t+1})$; если же обозначенная сторона составляет $3\pi/4$ с осью абсцисс, то $Z_{t+1} = Z_t + (\xi_{t+1}, -\xi_{t+1})$ (рис. 1). Очевидно, что Z_t , $t \geq 0$, является однородной по времени и неоднородной по пространству цепью Маркова.

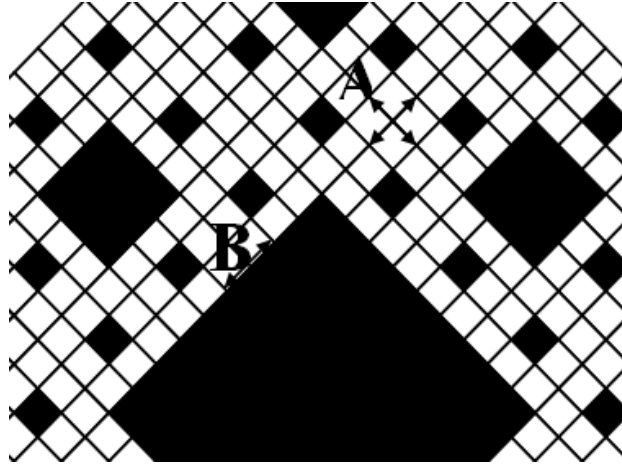


Рис. 1. В положении (А) частица может двигаться по четырем направлениям, в положении (В) – только по двум направлениям

Пусть $Z_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2})$. Следующая теорема показывает, как изменяется средний квадрат расстояния от Z_t до начала координат с ростом t .

Теорема 1. Для любого $t \geq 1$ имеет место равенство

$$E(Z_{t,1}^2 + Z_{t,2}^2) = 2t.$$

Из теоремы 1 следует, что средний квадрат блуждания растет линейно со временем, т. е. блуждание соответствует классическому диффузионному типу.

2. СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ С РАВНОМЕРНЫМ ВЫБОРОМ НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Определим несколько отличающееся от предыдущего случайное блуждание W_t . Будем считать, что $W_0 = (0, 0)$, и далее, на каждом шаге блуждающая точка сдвигается с равной вероятностью в одном из всех возможных направлений движения независимо от того, что было на предыдущем шаге. Если блуждающая точка в некоторый момент времени является особой, то у нее возникают три возможных направления движения, в противном случае – четыре (рис. 2). Отметим, что блуждающая точка с вероятностью $1/3$ «отскакивает» от границы удаленного квадрата, в отличие от предыдущего случайного блуждания, где точка может только «сползать» вдоль границы удаленного квадрата.

Пусть $W_t = (W_{t,1}, W_{t,2})$. Отметим, что численное моделирование показывает, что

$$1,6 \leq E(W_{t,1}^2 + W_{t,2}^2)/t \leq 2$$

при всех $t \geq 1$.

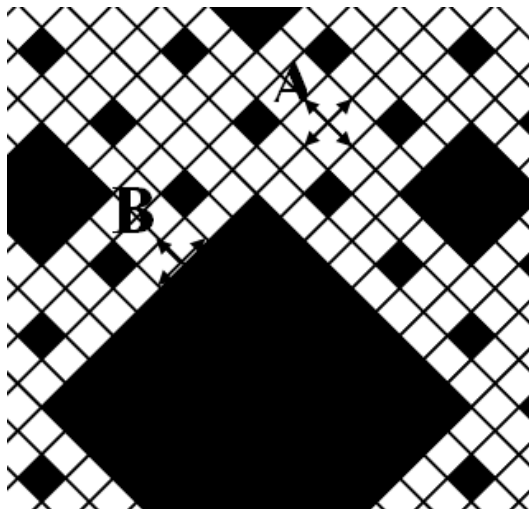


Рис. 2. В положении (А) частица может двигаться по четырем направлениям, в положении (В) – по трем направлениям

Это означает, что и в этом случае средний квадрат расстояния от блуждающей точки до начала координат ведет себя линейно по времени.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВОЗВРАЩЕНИЯ

Для численного моделирования удобнее использовать несколько иную сетку, по которой происходит блуждание, нежели представленную выше. Повернем определенную выше сетку на угол $\pi/4$ по часовой стрелке и сожмем в $\sqrt{2}$ раз. В итоге точка при блуждании будет сдвигаться на каждом шаге по отрезку единичной длины, перпендикулярному или параллельному оси абсцисс. Очевидно, что после такого преобразования сетки вероятность возвращения в ноль не изменится.

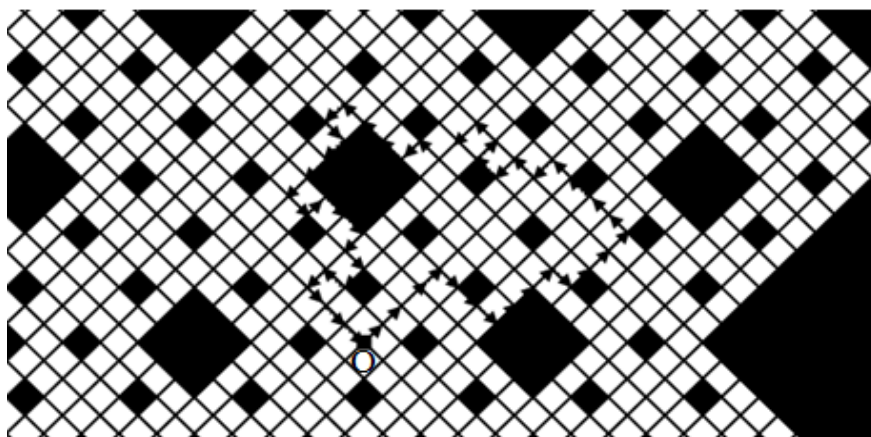


Рис. 3. Пример блуждания частицы и возвращения в начало координат

Рассматриваем $n_p = 10^9$ частиц, каждая из которых независимо от других блуждает время t , после чего фиксируем, попала ли частица в начало координат или нет. Пример блуждания частицы приведен на рис. 3. Отношение числа случаев попадания в начало координат к $n_p = 10^9$ дает нам оценку p_t^* вероятности возвращения в начало координат p_t за время t . Мы вычисляем p_t^* для времени t от 20 до 300 с шагом 2. Предполагается, что

$$p_t = \frac{c}{t^\gamma} (1 + \eta_t), \quad (1)$$

где c и γ – неизвестные константы, а $\eta_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Выбор t в диапазоне от 20 до 300 связан с тем, с одной стороны, t не может быть сколь угодно большим при данном количестве частиц n_p , иначе возникают большие погрешности в используемом методе Монте-Карло численного моделирования (см. § 4). С другой стороны, t не может быть слишком маленьким, иначе погрешности η_t в соотношении (1) будут также предположительно значительными (здесь отметим, что авторы не знают аналитического результата об оценке скорости сходимости η_t к нулю).

Для того чтобы получить оценки для c и γ , мы переходим к модели линейной регрессии, для этого достаточно прологарифмировать левую и правую части приведенного выше равенства, в итоге мы получаем

$$-\ln p_t^* = -\ln c + \gamma \cdot \ln t + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где $t = 20, 22, \dots, 300$ и ε_t – ошибка наблюдений. Далее методом наименьших квадратов из выражения (2) находим оценки для c и γ . Отметим, что нам хотелось бы получить оценку для γ , близкую к $k/2 = \ln 8 / \ln 9 \approx 0,946$ (см. § 1). В результате вычислений для модели симметричного блуждания мы получили оценку γ , равную 0,940, и оценку для c , равную 0,504 (рис. 4). Оценка параметра γ для модели блуждания с равномерным выбором направления движения равна 0,934, при этом оценка для c равна 0,503. Отметим, что оценки параметра γ для двух типов блужданий близки к предполагаемому значению $\ln 8 / \ln 9$.

Основным моментом численного моделирования построенных блужданий является ситуация, когда в некоторый момент времени точка попадает на сторону, но не на вершину вырезанного квадрата, в этом случае у точки возникают ровно два направления движения (вдоль стороны) для симметричного блуждания и ровно три – для блуждания с равномерным выбором направления движения. Итак, пусть $(0, 0)$, $(3^{k+1}, 0)$, $(3^{k+1}, 3^{k+1})$, $(0, 3^{k+1})$, $k \geq 1$ – координаты вершин квадрата K , из которого вырезается центральная часть. Соответственно, точки $(3^k, 3^k + l)$ и $(2 \cdot 3^k, 3^k + l)$, где $1 \leq l \leq 3^k - 1$, лежат на стороне, но не на вершине вырезанного квадрата (остальные два случая получаются просто перестановкой координат обозначенных двух случаев). Для

того чтобы блуждающая точка не попала внутрь вырезанного квадрата, следует получить необходимые и достаточные условия того, что точки $(3^k + 1, 3^k + 1)$ и $(2 \cdot 3^k - 1, 3^k + 1)$ уже лежат внутри вырезанного квадрата, и исключить из рассмотрения соответствующие направления перемещения. Такими *необходимыми и достаточными условиями* являются следующие:

- 1) существует один и тот же разряд в троичном представлении первой и второй координаты, на котором находится единица;
- 2) сумма цифр остальных (меньших) разрядов для каждой из координат больше либо равна единице.

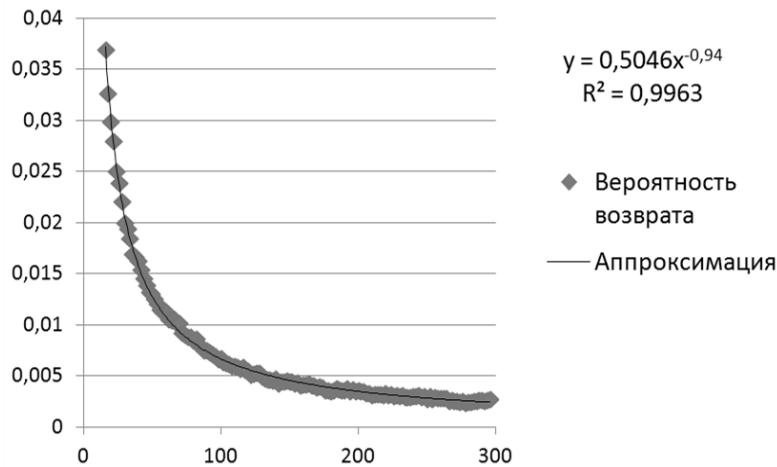


Рис. 4. Здесь показана вероятность возвращения для модели симметричного блуждания в зависимости от времени и ее аппроксимация по методу наименьших квадратов с коэффициентом детерминации (R^2)

Заметим, что в построенном нами бесконечном ковре Серпинского остальные квадраты со стороной 3^{k+1} , из которых также удаляется центральная часть, получаются из приведенного выше квадрата K с помощью параллельных переносов вдоль оси абсцисс или ординат, поэтому условия 1) и 2) сохраняются и для всех остальных случаев.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА БЛУЖДАЮЩИХ ЧАСТИЦ

Мы рассматриваем n_p частиц, блуждающих независимо друг от друга. Обозначим через v_{n_p} число частиц, попавших в начало координат в момент времени t . Значение t мы будем брать последовательно от 20 до 300 с шагом 2. Для каждой представленной модели блуждания найдем значение n_p так, чтобы

$$P(|v_{n_p} / n_p - p_t| < 0,001) \geq 0,99,$$

где p_t – вероятность попадания в начало координат за t шагов. Неизвестные значения p_t в дальнейшем мы будем заменять их оценками p_t^* , полученными в результате численного моделирования. Из классической центральной предельной теоремы мы сразу же получаем, что $n_p \geq 2,57^2 p_t^* (1 - p_t^*) / 10^{-6}$, $t = 20 \dots 300$. Выражение $p_t^* (1 - p_t^*)$ достигает своего максимума при $t = 20$, стало быть, $n_p \geq 2,57^2 p_{20}^* (1 - p_{20}^*) / 10^{-6}$. Кроме того, необходимо учитывать погрешность при применении нормальной аппроксимации. Для этого будем использовать известную оценку Берри–Эссеена, в нашем случае эта оценка имеет вид: $1 / \sqrt{n_p p_t (1 - p_t)}$ (см., например, работы [14–15]). Выберем n_p так, чтобы $1 / \sqrt{n_p p_t^* (1 - p_t^*)} \leq 0,001$. Следовательно, величина n_p помимо полученного выше неравенства должна удовлетворять еще и следующему неравенству: $n_p \geq 10^6 / (p_{300}^* (1 - p_{300}^*))$. Мы взяли $t = 300$ в предыдущем неравенстве, поскольку при этом значении выражение $p_t^* (1 - p_t^*)$ достигает своего минимума.

Для модели симметричного блуждания мы получили: $p_{20}^* = 0,0299$ и $p_{300}^* = 0,0023$. Подставляя эти значения в приведенные выше неравенства, получаем, что $n_p \geq 4,33 \cdot 10^8$.

Для модели блуждания с равномерным выбором направления движения имеем $p_{20}^* = 0,0304$ и $p_{300}^* = 0,0025$ при этом $n_p \geq 3,89 \cdot 10^8$. Другие вычислительные погрешности связаны с применением псевдослучайных чисел (мы использовали среду программирования Turbo C++). Отметим еще раз, что мы для вычислений брали $n_p = 10^9$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Получены две модели случайного блуждания на развернутом на всю числовую плоскость \mathbb{R}^2 ковре Серпинского, удовлетворяющие естественным постулатам блуждания на самоподобном множестве. Для каждой модели средний квадрат расстояния от блуждающей точки до начала координат ведет себя линейно по времени, при этом для модели случайного блуждания с равномерным выбором направления движения этот факт проверен только численно. Линейность по времени соответствует единичной размерности геодезических ковра Серпинского. Вероятность возвращения в начало координат за t шагов, когда $t \rightarrow \infty$, ведет себя как c/t^γ , где значение γ для каждой модели блуждания, как показывает численное моделирование, близко к размерности Хаусдорфа ковра Серпинского.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что в силу построения последовательности $Z_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2})$ ее первая координата $Z_{t,1}$ представляет собой сумму независимых радемахеровских случайных величин, поэтому очевидно, что $EZ_{t,1}^2 = t$ для всех t . Рассмотрим вторую координату $Z_{t,2}$. Опять же в силу построения Z_t выполняется равенство

$$Z_{t,2} = Z_{t-1,2} + \varepsilon_t \beta_t, \quad t \geq 1, \quad (3)$$

где β_t совпадает либо с η_t либо с ξ_t (в зависимости от положения предыдущей точки Z_{t-1}), а ε_t – случайная величина, принимающая значение 1 или -1 опять же в зависимости от положения точки Z_{t-1} (см. определение Z_t в § 2), т. е. ε_t – случайная величина, измеримая относительно σ -алгебры, порожденной случайной величиной Z_{t-1} , обозначим эту σ -алгебру через $\sigma(Z_{t-1})$. Рассмотрим условное математическое ожидание $E(Z_{t,2}^2 | \sigma(Z_{t-1}))$. Из выражения (3), а также из того, что ε_t измерима относительно $\sigma(Z_{t-1})$, следует равенство

$$E(Z_{t,2}^2 | \sigma(Z_{t-1})) = Z_{t-1,2}^2 + 1, \quad t \geq 1. \quad (4)$$

Применяя формулу полной вероятности к выражению (4) (см., например, [14–15]), получаем следующее рекурсивное соотношение:

$$EZ_{t,2}^2 = EZ_{t-1,2}^2 + 1, \quad t \geq 1. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует $EZ_{t,2}^2 = t$, откуда получаем утверждение теоремы 1.

Теоретическое формирование результатов статьи принадлежит Н.С. Аркашову, программная реализация – Е.В. Лежневу.

Результаты работы обсуждались на семинарах кафедры высшей математики НГТУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 819–852.
2. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847–876.
3. Учайкин В.В. Субдиффузия и устойчивые законы // ЖЭТФ. – 1999. – Т. 115, № 6. – С. 2113–2132.
4. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 261 с.
5. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1216–1236.

6. Селезнев В.А., Аркашов Н.С. Об условиях формирования процессов суб- и супердиффузии на самоподобных множествах // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2014. – Т. 25, № 4. – С. 33–38.
7. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 472 с.
8. Мосолов А.Б., Динариев О.Ю. Фракталы, скейлы и геометрия пористых материалов // ЖТФ. – 1988. – Т. 58, № 2. – С. 233–338.
9. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. – New York: Henry Holt and Company, 1983. – 468 p.
10. Фракталы и перколяция в пористой среде / Э. Гийон, К. Митеску, Ж.-П. Юлен, С. Ру // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, № 10. – С. 121–128.
11. Edgar G. Measure, topology, and fractal geometry. – New York: Springer, 2008. – 268 p.
12. Falconer K. Fractal geometry mathematical foundations and applications. – London: Wiley, 2008. – 337 p.
13. Hutchinson J. Fractals and self similarity // Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – Vol. 30, N 5. – P. 713–747. – doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.
14. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 581 с.
15. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 470 с.

Аркашов Николай Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Основное научное направление исследований – случайные процессы. Имеет 13 публикаций. E-mail: nicky1978@mail.ru

Лежнев Евгений Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Основное научное направление исследований – моделирование процессов переноса. Имеет 9 публикаций. E-mail: lionlev@yandex.ru

On a model of a random walk on the Sierpinski carpet *

N.S. ARKASHOV¹, E.V. LEZHNEV²

¹ Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, Ph.D., head of Higher Mathematics Department. E-mail: nicky1978@mail.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, PhD (Eng.), associate professor. E-mail: lionlev@mail.ru

In this paper we describe the development and realization of two random walk models on a self-similar subset of the plane which can be regarded as the Sierpinski carpet expanded to the entire plane. This set will be called the Sierpinski carpet as a whole. The constructed models of a random walk allowed us to solve two problems, namely, to calculate mean squares of these random processes and to investigate the asymptotic behavior of the probability of returning to the starting point of the walk. The dimension of the geodesics of the Sierpinski carpet as a whole and the curves on which there is a random walk is equal to 1, whereas the dimension of the Sierpinski carpet has a fractional value. We followed the format of a random walk on the self-similar sets given in [1]. In this format, the mean square of a random walk depends on the Hausdorff dimension of the geodesic, and the probability of returning depends on the phase space dimension / the geodesic dimension ratio. We formulate our results for the Sierpinski carpet as a whole in a more precise way: the mean square of a walk is linear in time, the probability of returning to the origin after a specified number of steps is between the values of the classical probability of returning a symmetric random walk on a plane and on a straight line.

* Received 26 May 2015.

The work was supported by the RFBR (code 13-01-00661)

Once again, we note that the number of degrees of freedom defined as the phase space dimension / the geodesic dimension ratio has a fractional value for the Sierpinski carpet. The developed random walk model allows us to understand what causes the fractional nature of degrees of freedom. Indeed, due to the inhomogeneous structure of the Sierpinski carpet the number of possible directions of motion for a wandering point is not constant and it changes with time.

Keywords: transport processes, stochastic modeling, diffusion, Sierpinski carpet, random walk, Markov chain, self-similar sets, probability of return

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-83-93

REFERENCES

1. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fraktal'naya topologiya i strannaya kinetika: ot teorii perkolyatsii k problemam kosmicheskoi elektrodinamiki [Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 819–852. (In Russian)
2. Uchaikin V.V. Avtomodel'naya anomal'naya diffuziya i ustoichivye zakony [Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 173, no. 8, pp. 847–876. (In Russian)
3. Uchaikin V.V. Subdiffuziya i ustoichivye zakony [Subdiffusion and stable laws]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki – Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1999, vol. 115, no. 6, pp. 2113–2132. (In Russian)
4. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow, Mir Publ., 1991. 261 p.
5. Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modeli sluchainogo bluzhdaniya na mnozhestvakh s samopodobnoi strukturoi [On a random walk model on sets with self-similar structure]. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1216–1236. (In Russian)
6. Seleznev V.A., Arkashov N.S. Ob usloviyakh formirovaniya protsessov sub- i superdiffuzii na samopodobnykh mnozhestvakh [On conditions of forming processes of sub- and superdiffusion on sets with self-similar structures]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, vol. 25, no. 4, pp. 32–33.
7. Zaslavskii G.M. *Gamil'tonov khaos i fraktal'naya dinamika* [Hamiltonian chaos and fractal dynamics]. Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2010. 472 p.
8. Mosolov A.B., Dinariev O.Yu. Fraktaly, skeily i geometriya poristyykh materialov [Fractals, skills and geometry of porous materials]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki – Soviet Physics: Technical Physics*, 1988, vol. 58, no. 2, pp. 233–338. (In Russian)
9. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*. New York, Henry Holt and Company, 1983. 468 p.
10. Giion E., Mitesku K., Yulen Zh.-P., Ru S. Fraktaly i perkolyatsiya v poristoi srede [Fractals and percolation in porous media]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Soviet Physics Uspekhi*, 1991, vol. 161, no. 10, pp. 121–128. (In Russian)
11. Edgar G. *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, Springer, 2008. 268 p.
12. Falconer K. *Fractal geometry mathematical foundations and applications*. London, Wiley, 2008. 337 p.
13. Hutchinson J. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747. doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055
14. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 581 p.
15. Borovkov A.A. *Teoriya veroyatnostei* [Probability]. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999. 470 p.