УДК 618.5.015

Особенности задачи планирования эксперимента для гауссовских линейных систем*

В.М. ЧУБИЧ¹, О.С. ЧЕРНИКОВА²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретической и прикладной информатики. E-mail: chubich@ami.nstu.ru.

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной информатики. E-mail: lchernikova@corp.nstu.ru.

Процедуры активной параметрической идентификации заключаются в сочетании традиционных методов параметрического оценивания с методами планирования эксперимента. При заданной структуре математической модели процедура активной параметрической идентификации предполагает выполнение следующих этапов: вычисление оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому плану эксперимента; синтез на основе полученных оценок оптимального плана эксперимента; пересчет оценок параметров по измерительным данным, соответствующим оптимальному плану. Применение идей и методов современной теории планирования эксперимента при построении математических моделей стохастических динамических систем способствует повышению эффективности и качества проводимых научных исследований. При этом центральное место в процедурах активной параметрической идентификации занимает вычисление информационной матрицы Фишера, фигурирующей в соответствующих критериях оптимальности плана. В данной работе проводится теоретический анализ выражения информационной матрицы Фишера для моделей гауссовских линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем, в результате которого устанавливается, что при определенных параметризациях модельных структур (неизвестные параметры входят в различных комбинациях в ковариационные матрицы шума системы, шума измерения и вектора начальных условий) информационная матрица Фишера, оставаясь постоянной, не зависит от входного сигнала и математического ожидания вектора начальных условий. Авторы приходят к важному для практики выводу о параметризациях моделей дискретных и непрерывно-дискретных систем, при которых планирование входных сигналов и начальных условий не позволяет повысить качество параметрического оценивания. В этом случае применение процедуры активной параметрической идентификации не дает положительного эффекта по сравнению с традиционным оцениванием неизвестных параметров.

Ключевые слова: дискретная система, непрерывно-дискретная система, шум системы, шум измерения, неизвестные параметры, информационная матрица Фишера, планирование эксперимента, фильтр Калмана

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-178-191

* Статья получена 01 июня 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (№ 2014/138, проект № 1689).

ВВЕДЕНИЕ

В настоящий момент эффективность и целесообразность планирования эксперимента при построении моделей динамических систем в пространстве состояний продемонстрирована во многих работах (см., например, [1–12]).

Одно из центральных мест в теории планирования эксперимента занимает информационная матрица Фишера (ИМФ), используемая при построении информационной матрицы всего плана и фигурирующая в алгоритмах численного построения оптимальных планов.

В данной статье авторы проводят теоретический анализ формальных соотношений для ИМФ и приходят к важному для практики выводу о параметризациях моделей дискретных и непрерывно-дискретных систем, при которых планирование эксперимента не позволяет повысить качество параметрического оценивания.

1. СТРУКТУРНО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Будем рассматривать следующие модели идентифицируемых, управляемых и наблюдаемых стохастических дискретных и непрерывно-дискретных систем.

А. Гауссовская линейная дискретная модель

$$x(t_{k+1}) = F(t_k)x(t_k) + \Psi(t_k)u(t_k) + \Gamma(t_k)w(t_k), \quad (1)$$

$$y(t_{k+1}) = H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $x(t_k)$ – вектор состояния; $u(t_k)$ – вектор управления (входа); $w(t_k)$ – вектор шума системы; $y(t_{k+1})$ – вектор измерения (выхода); $v(t_{k+1})$ – вектор шума измерения.

Предположим следующее:

- случайные векторы $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E[w(t_k)] = 0, \quad E[w(t_k)w^T(t_i)] = Q\delta_{ki}$$

($E[\cdot]$ оператор математического ожидания, δ_{ki} – символ Кронекера),

$$E[v(t_k)] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki}, \quad E[v(t_k)w^T(t_i)] = 0, \\ k, i = 0, 1, \dots, N-1;$$

- начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ при любых значениях переменной k .

Б. Гауссовская линейная непрерывно-дискретная модель

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t) + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N], \quad (3)$$

$$y(t_{k+1}) = H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4)$$

где $x(t)$ – вектор состояния; $u(t)$ – вектор управления (входа); $w(t)$ – вектор шума системы; $y(t_{k+1})$ – вектор измерения (выхода); $v(t_{k+1})$ – вектор шума измерения.

Предположим следующее:

- случайные векторы $w(t)$ и $v(t_{k+1})$ являются стационарными белыми гауссовскими шумами, для которых

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q\delta(t - \tau)$$

($\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака),

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki}, \quad E[v(t_{k+1})w^T(\tau)] = 0, \\ \forall t_k, \tau, \quad \tau \in [t_0, t_N], \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1;$$

- начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с $w(t)$ и $v(t_{k+1})$ при любых значениях переменной t и k .

В моделях (1), (2) и (3), (4) матрицы Q , R и $P(t_0)$ могут зависеть от неизвестных параметров $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \in \Omega_\Theta$. Проанализируем выражения для ИМФ при указанных параметризациях моделей.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ИМФ

Если планировать входные сигналы и начальные условия, то в соответствии с [13–15] элементы ИМФ, зависящие в данном случае от неизвестных параметров Θ , определяются равенством

$$M_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = -E_Y \left[\frac{\partial^2 \ln L(U, \bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

в котором усреднение берется по выборочному пространству и $L(U, \bar{x}(t_0); \Theta)$ – функция правдоподобия.

Как показано в работе [10], при наиболее общем характере вхождения неизвестных параметров для математической модели (1) и (2) при высказанных априорных предположениях элементы ИМФ могут быть представлены в виде

$$M_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) + V_{ij}(\Theta), \quad (5)$$

где (см. дополнительно работу [16])

$$\begin{aligned} W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = & \\ = \sum_{k=0}^{N-1} & \left\{ Sp \left[C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\ & + Sp \left[C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] + \\ & + Sp \left[C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right] + \\ & \left. + Sp \left[C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Sp \left[C_0 \Sigma_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\ & + Sp \left[C_0 \Sigma_A(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] + \\ & + Sp \left[C_i \Sigma_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right] + \\ & + Sp \left[C_i \Sigma_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right] + \\ & + Sp \left[C_i \Sigma_A(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} Sp \left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь

$$C_i = \left[\underbrace{O, \dots, O}_i, I, O, \dots, O \right];$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} K(t_k) \\ \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$\Psi_A(t_k) = \begin{bmatrix} \Psi(t_k) \\ \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k) H(t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k) H(t_k) \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k);$$

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_{k+1}) \\ \frac{\partial \bar{x}(t_{k+1})}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \bar{x}(t_{k+1})}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{cases} F_A(t_k) \bar{x}_A(t_k) + \Psi_A(t_k) u(t_k), & k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \begin{bmatrix} F(t_0) \bar{x}(t_0) + \Psi(t_0) u(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + F(t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + F(t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, & k = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^T(t_k) + K_A(t_k)B(t_k)K_A^T(t_k), & k=1, 2, \dots, N-1. \\ O, & k=0. \end{cases}$$

Матрицы $K(t_{k+1})$ и $B(t_{k+1})$ определяются по следующим рекуррентным уравнениям дискретного фильтра Калмана:

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) [B(t_{k+1})]^{-1};$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + R;$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) P(t_k | t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k);$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1} | t_k).$$

Поскольку в нашем случае неизвестные параметры в матрицу $H(t_{k+1})$ не входят, то выражение (6) существенно упрощается и приобретает вид

$$W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = \sum_{k=0}^{N-1} Sp \left[C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}) \right]. \quad (12)$$

Покажем теперь, что $W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = O$.

В силу того, что параметры не входят также в матрицы $F(t_k)$, $\Psi(t_k)$, выражения (9)–(11) можно переписать так:

$$\Psi_A(t_k) = \begin{bmatrix} \Psi(t_k) \\ O \\ \dots \\ O \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \dots & O \\ O & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A(t_k)\bar{x}_A(t_k) + \Psi_A(t_k)u(t_k), & k=1, 2, \dots, N-1; \\ \begin{bmatrix} F(t_0)\bar{x}(t_0) + \Psi(t_0)u(t_0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, & k=0. \end{cases} \quad (15)$$

Воспользовавшись методом математической индукции, установим, что вектор $\bar{x}_A(t_{k+1})$ имеет следующую структуру:

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_{k+1}) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Действительно, для $k=0$

$$\bar{x}_A(t_1) = \begin{bmatrix} F(t_0)\bar{x}(t_0) + \Psi(t_0)u(t_0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_1) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что для $k=n-1$ верно равенство

$$\bar{x}_A(t_n) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда для $k=n$ из (9)–(11) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_A(t_{n+1}) &= F_A(t_n)\bar{x}_A(t_n) + \Psi_A(t_n)u(t_n) = \\ &= \begin{bmatrix} F(t_n)x(t_n) + \Psi(t_n)u(t_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_{n+1}) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение (16) и особенность структуры матриц C_i , получаем

$$C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \underbrace{O, \dots, O}_i, I, O, \dots, O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t_{k+1}) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = O,$$

что в соответствии с выражением (12) влечет за собой $W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = O$ и, следовательно, $M_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = V_{ij}(\Theta), \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, s$.

Таким образом, показано, что ИМФ не зависит от входного сигнала и вектора начальных условий в случае, если неизвестные параметры содержатся в матрицах Q , R и $P(t_0)$.

Перейдем к анализу выражения ИМФ для гауссовских линейных непрерывно-дискретных моделей. Как установлено в [17], для математической модели (3) и (4) при наиболее общем характере вхождения неизвестных параметров с учетом сделанных априорных предположений элементы ИМФ могут быть также представлены в виде выражения (5). Такими же остаются выражения для $W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta)$ и $V_{ij}(\Theta)$ (см., соответственно, формулы (6) и (7)), но $\bar{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ в этом случае вычисляются иначе [18]:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A(t_{k+1}) = & \\ = & \begin{cases} \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \bar{x}_A(t_k) + \Psi_A(t_{k+1}, t_k) u(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \left[\begin{array}{c} \Phi(t_1, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \Psi(\tau) u(\tau) d\tau \\ \frac{\partial \Phi(t_1, t_0)}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_1} \Psi(\tau) u(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_1} u(\tau) \right] d\tau \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_1, t_0)}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_s} \Psi(\tau) u(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_s} u(\tau) \right] d\tau \end{array} \right] & \text{если } k = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_A(t_{k+1}) = & \\ = & \begin{cases} \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \Sigma_A(t_k) \Phi_A^T(t_{k+1}, t_k) + K_A(t_{k+1}, t_k) B(t_k) K_A^T(t_{k+1}, t_k), & k = 1, 2, \dots, N-1; \\ O, & k = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_A(t_{k+1}, t_k) = & \\ = & \begin{bmatrix} \Phi(t_{k+1}, t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & \Phi_A(t_{k+1}, t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix}; \quad (18) \end{aligned}$$

$$a_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \Psi(\tau) u(\tau) d\tau \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} \Psi(\tau) u(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_1} u(\tau) \right] d\tau \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} \Psi(\tau) u(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_s} u(\tau) \right] d\tau \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$K_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{K}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) K(t_k);$$

$$\varphi_A(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) H(t_k).$$

Здесь матрицы

$$\{\Phi(t_{k+1}, \tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}]\} \text{ и } \left\{ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s, \tau \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$$

находятся из решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t_{k+1}, \tau)}{d\tau} = -\Phi(t_{k+1}, \tau) F(\tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \Phi(t_{k+1}, t_{k+1}) = I, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i} \right) = -\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i} F(\tau) - \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_{k+1})}{\partial \theta_i} = O. \end{cases}$$

Матрицы $K(t_{k+1})$ и $B(t_{k+1})$ определяются по следующим рекуррентным уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана:

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1});$$

Пусть в выражении (20) $k = 0$, тогда

$$\bar{x}_A(t_1) = \begin{bmatrix} \Phi(t_1, t_0)\bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\Psi(\tau)u(\tau)d\tau \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_1) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее будем считать, что для $k = n-1$ верно

$$\bar{x}_A(t_n) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда для $k = n$ из выражений (20)–(22) имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}_A(t_{n+1}) &= \Phi_A(t_{n+1}, t_n)\bar{x}_A(t_n) + a_A(t_{n+1}, t_n)u(t_n) = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi(t_{n+1}, t_n)\bar{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)\Psi(\tau)u(\tau)d\tau \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_{n+1}) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для моделей дискретных систем, приходим к тому, что и в непрерывно-дискретном случае $W_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = O$ и $M_{ij}(U, \bar{x}(t_0); \Theta) = V_{ij}(\Theta)$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, s$, т. е. ИМФ не зависит от входного сигнала и вектора начальных условий при вхождении неизвестных параметров в матрицы Q, R и $P(t_0)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в задачах планирования эксперимента для дискретных и непрерывно-дискретных систем, описывающихся гауссовскими линейными моделями в пространстве состояний, информационная матрица Фишера остается постоянной при вхождении неизвестных параметров в ковариационные матрицы шумов системы, измерения и вектора начальных условий. В этом случае планирование входного сигнала и вектора начальных условий не способствует повышению качества параметрического оценивания и нецелесообразно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mehra R.K.* Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems: survey and new results // *IEEE Transaction on Automatic Control*. – 1974. – Vol. 19, iss. 6. – P. 753–768. – doi: 10.1109/TAC.1974.1100701.
2. *Morelli E.A.* Flight test of optimal inputs and comparison with conventional inputs // *Journal of Aircraft*. – 1999. – Vol. 36, N 2. – P. 389–397. – doi: 10.2514/2.2469.
3. *Овчаренко В.Н.* Планирование гармонических входных сигналов в задаче идентификации динамических систем // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. – 2001. – № 5. – С. 39–45.
4. *Jansson H.* Experiment design with application in identification for control. – Stockholm: KTH, 2004. – 207 p.
5. *Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем в частотной области // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2007. – Т. 10, № 1 (29). – С. 71–89.
6. Optimal input design for aircraft parameter estimation / C. Jauberthie, F. Bournonville, P. Cotton, F. Rendell // *Aerospace Science and Technology*. – 2006. – Vol. 10, iss. 4. – P. 331–337. – doi: 10.1016/j.ast.2005.08.002.
7. *Чубич В.М., Филиппова Е.В.* Применение методов теории планирования экспериментов при параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем // *Материалы X Международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения»: АПЭП–2010, 22–24 сентября 2010 г.: в 7 т.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – Т. 6. – С. 85–93.
8. *Pronzato L.* Optimal experimental design and some related control problems // *Automatica*. – 2008. – Vol. 44, iss. 2. – P. 303–325. – doi: 10.1016/j.automatica.2007.05.016.
9. *Childers A.F.* Parameter identification and the design of experiments for continuous nonlinear dynamic systems: dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics. – Blacksburg, Virginia, 2009. – 106 p.
10. *Чубич В.М.* Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем // *Информатика и ее применения*. – 2011. – Т. 5, вып. 1. – С. 46–57.
11. *Lu L., Yao B.* Experimental design for identification of nonlinear systems with bounded uncertainties // *2010 American Control Conference, 30 June 2010 – 2 July 2010*. – Baltimore, Maryland: IEEE, 2010. – P. 4504–4509. – doi: 10.1109/ACC.2010.5530951.
12. *Воевода А.А., Трошина Г.В.* Активная идентификация линейных стационарных динамических объектов на основе информационной матрицы Фишера: установившийся режим // *Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2014): материалы XII международной конференции, 2–4 октября 2014 г.: в 7 т.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 7. – С. 13–16.
13. *Pao C.P.* Линейные статистические методы и их применения / пер. с англ. А.М. Кагана [и др.]. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
14. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – Новосибирск: Наука, 1997. – 772 с.
15. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику. – М.: ЛКИ, 2010. – 600 с.
16. *Чубич В.М.* Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем // *Научный вестник НГТУ*. – 2009. – № 1 (34). – С. 23–40.
17. *Чубич В.М., Филиппова Е.В.* Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем // *Научный вестник НГТУ*. – 2010. – № 2 (39). – С. 53–63.
18. *Чубич В.М.* Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем // *Научный вестник НГТУ*. – 2009. – № 1 (34). – С. 41–54.

Чубич Владимир Михайлович, доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – анализ и планирование экспериментов для стохастических динамических систем. Является автором и соавтором более 50 публикаций, в том числе пяти учебных пособий и одной монографии. E-mail: chubich@ami.nstu.ru.

Черникова Оксана Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – планирование экспериментов для стохастических динамических систем. Является автором и соавтором более 25 публикаций, в том числе одной монографии. E-mail: chernikova@corp.nstu.ru .

Peculiarities of the experiment design problem for Gaussian linear systems*

V.M. CHUBICH¹, O.S. CHERNIKOVA²

¹ Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc, head, department of theoretical and applied informatics. E-mail: chubich@ami.nstu.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, PhD (Eng.), associate professor. E-mail: chernikova@corp.nstu.ru

Procedures for active parametric identification are a combination of traditional methods of parametric estimation and experiment design methods. Given a certain structure of the mathematical model active parametric identification involves the following stages: the calculation of the unknown parameter estimates based on measurement data corresponding to an experiment plan based on the estimates of an optimal experiment and conversion of parameter estimates based on measurement data corresponding to an optimal plan. The application of ideas and methods of the modern theory of experiment design in the construction of mathematical models of stochastic dynamical systems enhances the efficiency and quality of the research conducted. The calculation of the Fisher information matrix takes a central place in the procedures of active parametric identification. The Fisher information matrix appears in the relevant optimality criteria of the plan. This work provides a theoretical analysis of the Fisher information matrix expression for Gaussian models of linear discrete and continuous-discrete systems. It is stated that with certain parameterizations of model structures the Fisher information matrix remains constant and the unknown parameters in various combinations are included in the covariance matrix of a system noise, noise measurements and the vector of initial conditions. Thus, being constant the Fisher information matrix does not depend on the input signal and the mathematical expectation of the vector of initial conditions. The authors come to a practical conclusion about parameterizations of discrete models and continuous-discrete systems in which the scheduling of input signals and initial conditions does not allow improving the quality of parametric estimation. In this case, the use of active parametric identification procedure does not provide a positive effect compared to the conventional estimation of the unknown parameters.

Keywords: discrete system, continuous-discrete system, process noise, measurement noise, unknown parameters, Fisher information matrix, experiment design, Kalman filter

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-3-178-191

REFERENCES

1. Mehra R.K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems:survey and new results. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1974, vol. 19, iss. 6, pp. 753–768. doi: 10.1109/TAC.1974.1100701
2. Morelli E.A. Flight test of optimal inputs and comparison with conventional inputs. *Journal of Aircraft*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 389–397. doi: 10.2514/2.2469
3. Ovcharenko V.N. Planirovanie garmonicheskikh vhodnyh signalov v zadache identifikacii dinamicheskikh sistem [Planning of harmonie input signals in the problem of dynamic system identification]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, no. 5, pp. 39–45. (In Russian)

* Received 1 June 2015.

The work was supported by the Ministry of education and science of the Russian Federation (№2014/138, project № 1689).

4. Jansson H. *Experiment design with application in identification for control*. Stockholm, KTH, 2004. 207 p.
5. Denisov V.I., Chubich V.M., Chernikova O.S. Aktivnaya parametricheskaya identifikatsiya stokhasticheskikh lineinykh diskretnykh sistem v chastotnoi oblasti [Active parametric identification of stochastic linear discrete systems in a frequency domain]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, vol. 10, no. 1 (29), pp. 71–89. (In Russian)
6. Jauberthie C., Bournonville F., Cotton P., Rendell F. Optimal input design for aircraft parameter estimation. *Aerospace Science and Technology*, 2006, vol. 10, iss. 4, pp. 331–337. doi: 10.1016/j.ast.2005.08.002
7. Chubich V.M., Filippova E.V. [Application of the theory of design of experiments with parametric identification of stochastic nonlinear continuous-discrete systems]. *Materialy X Mezhdunarodnoi konferentsii Aktual'nye problemy elektronnoy priborostroeniya, APEP–2010*. V 7 t. [Proceedings of 10th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE–2010). In 7 vol.], Novosibirsk, 22–24 September 2010, vol. 6, pp. 85–93. (In Russian)
8. Pronzato L. Optimal experimental design and some related control problems. *Automatica*, 2008, vol. 44, iss. 2, pp. 303–325. doi: 10.1016/j.automatica.2007.05.016
9. Childers A.F. *Parameter identification and the design of experiments for continuous nonlinear dynamic systems*. Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics. Blacksburg, Virginia, 2009. 106 p.
10. Chubich V.M. Informatsionnaya tekhnologiya aktivnoi parametricheskoi identifikatsii stokhasticheskikh kvazilineinykh diskretnykh sistem [Information technology of active parametric identification of stochastic quasi-linear discrete systems]. *Informatika i ee primeneniya – Informatics and Applications*, 2011, vol. 5, iss. 1, pp. 46–57.
11. Lu L., Yao B. Experimental design for identification of nonlinear systems with bounded uncertainties. *2010 American Control Conference*, Baltimore, Maryland, 30 June 2010 – 2 July 2010, 2010, pp. 4504–4509. doi: 10.1109/ACC.2010.5530951
12. Voevoda A.A., Troshina G.V. [Active identification of linear stationary dynamic objects on base of the Fisher information matrix: the steady state] *Trudy XII mezhdunarodnoi konferentsii “Aktual'nye problemy elektronnoy priborostroeniya”, APEP–2014: v 7 t.* [12th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, APEIE–2014: Proceedings: in 7 vol.], Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014, vol. 1, pp. 745–748. doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785
13. Rao C.R. *Linear statistical inference and its applications*. New York, John Wiley and Sons, 1965. xviii, 522 p. (Russ. ed.: Rao S.R. *Lineinye statisticheskie metody i ikh primeneniya*. Translated from English A.M. Kagan et al. Moscow, Nauka Publ., 1968. 548 p.).
14. Borovkov A.A. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian Branch, 1997. 772 p.
15. Ivchenko G.I., Medvedev Yu.I. *Vvedenie v matematicheskuyu statistiku* [Introduction to mathematical statistics]. Moscow, LKI Publ., 2010. 600 p.
16. Chubich V.M. Vychislenie informatsionnoi matritsy Fishera v zadache aktivnoi parametricheskoi identifikatsii stokhasticheskikh nelineinykh diskretnykh sistem [The calculation of the Fisher information matrix in the problem of active parametric identification for stochastic nonlinear discrete systems]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 1 (34), pp. 23–40.
17. Chubich V.M., Filippova E.V. Vychislenie proizvodnykh informatsionnoi matritsy Fishera po komponentam vkhodnogo signala v zadache aktivnoi parametricheskoi identifikatsii stokhasticheskikh nelineinykh nepreryvno-diskretnykh sistem [The computation of the derivatives of the Fisher information matrix with respect to the components of input signal in the problem of active parametric identification of stochastic nonlinear continuous-discrete systems]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 2 (39), pp. 53–63.
18. Chubich V.M. Osobennosti vychislenie informatsionnoi matritsy Fishera v zadache aktivnoi parametricheskoi identifikatsii stokhasticheskikh nelineinykh nepreryvno-diskretnykh sistem [Particulars of the calculation of the Fisher information matrix in the problem of active parametric identification for stochastic nonlinear continuous-discrete systems]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 1 (34), pp. 41–54.