ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 61, № 4, 2015, с. 74–89

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 61, No. 4, 2015, pp. 74–89

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 621.394

Закон распределения, производящая функция и числовые характеристики потока Пальма с ограниченным последействием*

Л.И. ПОДРЯБИНКИН[1], И.А. САИТОВ[2], Р.Б. ТРЕГУБОВ[3]

[1] *302034, РФ, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35, Академия ФСО России, сотрудник*
[2] *302034, РФ, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35, Академия ФСО России, сотрудник. E-mail: akramovish@mail.ru*
[3] *302034, РФ, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35, Академия ФСО России, сотрудник. E-mail: treba@list.ru*

В работе разработана аналитическая модель источника информации *IP*-телефонии, представляющая собой случайный процесс восстановления, порожденный чередованием *ON*/*OFF* периодов. В условиях наложенного ограничения о том, что длительность *ON*/*OFF* периодов является непрерывной случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение, было найдено аналитическое решение системы уравнений Колмогорова–Чепмена, описывающей случайный процесс изменения числа начал и окончаний сеансов связи (пачек пакетов) во времени. В аналитическом виде был найден закон распределения числа сеансов связи (пачек пакетов) как функция от времени и интенсивностей *ON*/*OFF* периодов. Данный случайный процесс был классифицирован как поток Пальма с ограниченным последействием. В ходе исследования было выявлено, что если одна из интенсивностей *ON*/*OFF* периодов стремится к бесконечности, то данный случайный процесс вырождается в простейший поток, а в случае равенства соответствующих интенсивностей – в поток Эрланга первого порядка. Полученная в работе производящая функция для данного случайного процесса позволила определить и исследовать первые четыре начальных и центральных момента потока Пальма с ограниченным последействием. Было выявлено, что данный поток Пальма является «менее случайным» и «менее скошенным» по сравнению с простейшим потоком, а как следствие, более комфортным с точки зрения обслуживающей системы. Основным результатом исследования являются оригинальный закон распределения, производящая функция и числовые характеристики потока Пальма с ограниченным последействием, частным случаем которого являются простейший поток и поток Эрланга первого порядка.

Ключевые слова: случайный процесс, поток Пальма, простейший поток, ограниченное последействие, закон распределения, производящая функция, числовые характеристики, сеть связи, коммутация пакетов, *IP*-телефония, *ON*/*OFF* модель

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-4-74-89

---

* *Статья получена 07 июля 2015 г.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для формального описания сетей связи (СС) с коммутацией пакетов (КП) находят широкое применение системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМо) [1–3]. Модели СМО и СеМО являются достаточно универсальным математическим аппаратом, позволяющим осуществлять выбор альтернативных вариантов, расчет и оптимизацию характеристик СС с КП как на этапе их проектирования, так и на этапе их функционирования. При разработке математических моделей СМО и СеМО учитываются законы распределения потоков заявок и времени обслуживания, особенности построения систем обслуживания, способ и порядок обслуживания, порядок занятия свободных обслуживающих приборов и т. д.

В условиях развития телекоммуникационных технологий существующие классические аналитические модели СМО и СеМО требуют усовершенствования (доработки или модификации) в соответствии с реальными процессами, «протекающими» в современных СС с КП [4–12]. Неизменными остаются требования по оптимизации затрат на создание и эксплуатацию инфокоммуникационной инфраструктуры в сочетании с сохранением ее высокой производительности и гарантированного качества обслуживания (*QoS*) пользователей. Эти факторы обусловливают необходимость повышения адекватности существующих моделей трафика данных и узлов коммутации, что в свою очередь определяет актуальность темы настоящего исследования.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Объектом исследования является СС с КП, предоставляющая услугу переноса информации для такой телематической услуги, как *IP*-телефония. На рис. 1 представлен предмет исследования, а именно процесс генерирования пакетов *IP* источником информации.

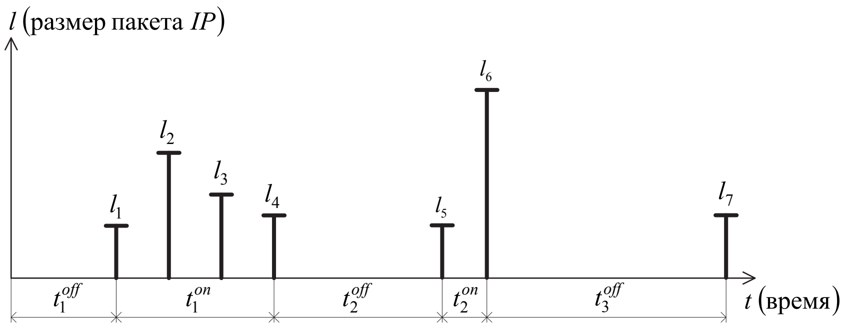

Рис. 1. Процесс генерирования пакетов *IP* источником информации

Источник информации генерирует пакеты *IP* с постоянной или переменной скоростью в течение периода t_i^{on} (длительность сеанса связи или длительность пачки пакетов *IP*) и ничего не генерирует в течение периода t_i^{off} (длительность интервала времени между смежными сеансами связи или длительность интервала времени между смежными пачками пакетов *IP*). Иными словами, это процесс восстановления, порожденный чередованием *ON*/*OFF* периодов.

Ограничение. Длины активных и пассивных периодов есть независимые случайные величины (НСВ), имеющие следующие распределения

$$f_1\left(t_i^{off}\right) = \lambda \exp\left(-\lambda \cdot t_i^{off}\right), \quad (1)$$

$$f_2\left(t_i^{on}\right) = \mu \exp\left(-\mu \cdot t_i^{on}\right), \quad (2)$$

где $\lambda = M(t^{off})^{-1}$ – интенсивность пассивного периода;

$\mu = M(t^{on})^{-1}$ – интенсивность активного периода;

$M(t^{off})$ – математическое ожидание длительности пассивного периода;

$M(t^{on})$ – математическое ожидание длительности активного периода.

В ряде работ [4–12] НСВ t_i^{on} и t_i^{off} описываются с помощью распределения Парето. Такой подход связан с тем, что для приложений типа World Wide Web (WWW) характерно то, что распределение пользовательских запросов обладает чрезвычайной степенью флуктуаций в широком диапазоне временных масштабов [13]. В то же время известно, что в телефонных сетях связи длительности указанных периодов традиционно описываются экспоненциальным распределением [2, 14–16], что позволяет и в данном исследовании использовать экспоненциальное распределение для описания *ON*/*OFF* периодов источника информации *IP*-телефонии.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Описанный выше процесс перехода источника информации *IP*-телефонии из активного в пассивное состояние и обратно предлагается описать в виде случайного процесса (СП), представленного на рис. 2.

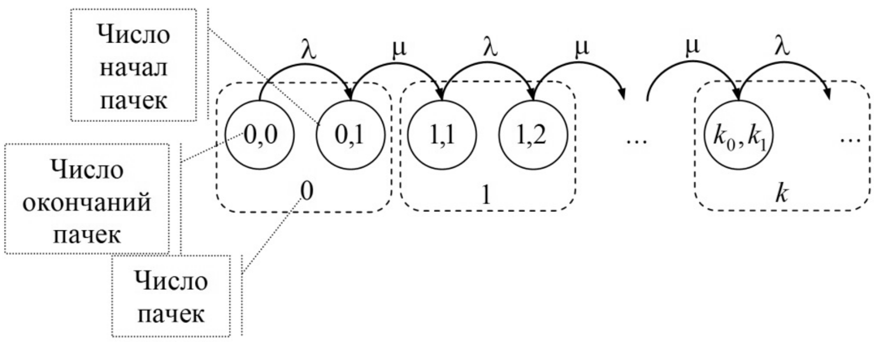

Рис. 2. Диаграмма интенсивностей переходов СП

В каждый момент времени t состояние СП описывается вектором случайных величин (k_0, k_1), где k_1 – это число начал сеансов связи (число начал пачек пакетов *IP*), а k_0 – это число окончаний сеансов связи (число концов пачек пакетов *IP*), где $k_0 = \overline{0, \infty}$ и $k_1 = \overline{k_0, k_0 + 1}$. Введем также переменную k, соответствующую числу состоявшихся сеансов связи (числу сгенерированных пачек пакетов *IP*) в момент времени t.

Требуется найти законы распределения и числовые характеристики для вектора случайных величин $(k_0,\ k_1)$ и случайной величины k.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем следующее обозначение, описывающее вероятность того, что СП в момент времени t находится в состоянии $(k_0,\ k_1)$:

$$P_{k_0,k_1}(t) \underline{\Delta} P\left[X(t) = (k_0,\ k_1)\right] . \tag{3}$$

В свою очередь, вероятность перехода СП из состояния $(k_0,\ k_1)$ в состояние $\left(k_0',\ k_1'\right)$ в промежутке времени $(t,\ t + \Delta t)$ обозначим как

$$P_{k_0,k_1;\,k_0',k_1'}(\Delta t) \underline{\Delta} P\left[X(t+\Delta t) = \left(k_0',\ k_1'\right) \middle| X(t) = (k_0,\ k_1)\right]. \tag{4}$$

Следовательно, соответствующая диаграмме интенсивностей переходов (см. рис. 2) система уравнений Колмогорова–Чепмена будет иметь вид

$$\begin{cases} P_{0,0}(t+\Delta t) = P_{0,0}(t) \cdot P_{0,0;\,0,0}(\Delta t) + o(\Delta t); \\ P_{0,1}(t+\Delta t) = P_{0,1}(t) \cdot P_{0,1;\,0,1}(\Delta t) + P_{0,0}(t) \cdot P_{0,0;\,0,1}(\Delta t) + o(\Delta t); \\ P_{1,1}(t+\Delta t) = P_{1,1}(t) \cdot P_{1,1;\,1,1}(\Delta t) + P_{0,1}(t) \cdot P_{0,1;\,1,1}(\Delta t) + o(\Delta t); \\ \ldots \end{cases} \tag{5}$$

где $o(\Delta t)$ – это величина более высокого порядка малости по отношению к Δt.

Кроме того, будем учитывать, что в момент времени t все возможные состояния СП должны удовлетворять нормирующему условию

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=k_0}^{k_0+1} P_{k_0,k_1}(t) = 1 . \tag{6}$$

Представим систему уравнений (5) в следующем виде

$$\begin{cases} P_{0,0}(t+\Delta t) - P_{0,0}(t) = P_{0,0}(t) \cdot (-\lambda) \cdot \Delta t + o(\Delta t); \\ P_{0,1}(t+\Delta t) - P_{0,1}(t) = P_{0,1}(t) \cdot (-\mu) \cdot \Delta t + P_{0,0}(t) \cdot \lambda \Delta t + o(\Delta t); \\ P_{1,1}(t+\Delta t) - P_{1,1}(t) = P_{1,1}(t) \cdot (-\lambda) \cdot \Delta t + P_{0,1}(t) \cdot \mu \Delta t + o(\Delta t); \\ \ldots, \end{cases} \tag{7}$$

Поделив левую и правую части уравнений (7) на Δt, перейдем к их пределу при $\Delta t \to \infty$, при этом будем учитывать, что $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, в результате получим

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{0,0}(t)}{dt} = P_{0,0}(t) \cdot (-\lambda); \\ \dfrac{dP_{0,1}(t)}{dt} = P_{0,1}(t) \cdot (-\mu) + P_{0,0}(t) \cdot \lambda; \\ \dfrac{dP_{1,1}(t)}{dt} = P_{1,1}(t) \cdot (-\lambda) + P_{0,1}(t) \cdot \mu; \\ \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим преобразование Лапласа функции $P_{k_0,k_1}(t)$ как

$$P^*{}_{k_0,k_1}(s) \triangleq \int\limits_0^\infty P_{k_0,k_1}(t) \exp(-s\,t)\, dt. \tag{9}$$

Поскольку

$$P_{k_0,k_1}(t) \Leftrightarrow P^*{}_{k_0,k_1}(s), \tag{10}$$

$$\frac{dP_{k_0,k_1}(t)}{dt} \Leftrightarrow s \cdot P^*{}_{k_0,k_1}(s), \tag{11}$$

$$P_{k_0,k_1}(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } k_0 = 0 \wedge k_1 = 0; \\ 0, \text{ если } \neg(k_0 = 0 \wedge k_1 = 0), \end{cases} \tag{12}$$

умножим левую и правую части уравнений системы (8) на $\exp(-s\,t)$ и проинтегрируем полученное выражение от 0 до ∞. В результате получим

$$\begin{cases} s \cdot P^*{}_{0,0}(s) = P^*{}_{0,0}(s) \cdot (-\lambda) + 1; \\ s \cdot P^*{}_{0,1}(s) = P^*{}_{0,1}(s) \cdot (-\mu) + P^*{}_{0,0}(s) \cdot \lambda; \\ s \cdot P^*{}_{1,1}(s) = P^*{}_{1,1}(s) \cdot (-\lambda) + P^*{}_{0,1}(s) \cdot \mu; \\ \ldots \end{cases} \tag{13}$$

Преобразуем систему уравнений (13):

$$\begin{cases} P^*_{0,0}(s) = \dfrac{1}{s+\lambda}; \\ P^*_{0,1}(s) = \dfrac{\lambda}{(s+\lambda)(s+\mu)}; \\ P^*_{1,1}(s) = \dfrac{\mu \cdot \lambda}{(s+\lambda)^2 (s+\mu)}; \\ \ldots \\ P^*_{k_0,k_1}(s) = \dfrac{\mu^{k_0} \cdot \lambda^{k_1}}{(s+\lambda)^{k_0+1} (s+\mu)^{k_1}}; \\ \ldots \end{cases} \tag{14}$$

Разложим каждое уравнение системы (14) на элементарные дроби относительно переменной s :

$$\begin{cases} P^*_{0,0}(s) = \dfrac{1}{s+\lambda}; \\ P^*_{0,1}(s) = \dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)} \dfrac{1}{(s+\lambda)} - \dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)} \dfrac{1}{(s+\mu)}; \\ P^*_{1,1}(s) = -\dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^2} \dfrac{1}{(s+\lambda)} + \dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)} \dfrac{1}{(s+\lambda)^2} + \dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^2} \dfrac{1}{(s+\mu)}; \\ \ldots \\ P^*_{k_0,k_1}(s) = \sum\limits_{j=0}^{k_0} (-1)^{k_0+1} \dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}} \begin{pmatrix} k_1 - 1 \\ k_0 + k_1 - j - 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{(s+\lambda)^{j+1}} + \\ + \sum\limits_{j=0}^{k_1-1} (-1)^{k_0+1} \dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_0 + k_1 - j - 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{(s+\mu)^{j+1}}; \\ \ldots \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \Delta \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{16}$$

Воспользовавшись тем, что [17]

$$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{t^n}{n!} \exp(-\alpha t) \cdot \delta(t), \tag{17}$$

и с учетом того, что

$$\delta(t)=\begin{cases}0, \text{ если } t<0;\\ 1, \text{ если } t\ge 0,\end{cases} \qquad (18)$$

представим систему уравнений (15) во временной области для случая, когда $t \ge 0$, в следующем виде:

$$\begin{cases}P_{0,0}(t)=\exp(-\lambda t);\\ P_{0,1}(t)=\dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)}\exp(-\lambda t)-\dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)}\exp(-\mu t);\\ P_{1,1}(t)=-\dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^2}\exp(-\lambda t)+\dfrac{\mu\lambda t}{(\mu-\lambda)}\exp(-\lambda t)+\dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^2}\exp(-\mu t);\\ \ldots\\ P_{k_0,k_1}(t)=\exp(-\lambda t)\sum\limits_{j=0}^{k_0}\left(\dfrac{(-1)^{k_0+1}}{j!}\dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}t^j}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}}\begin{pmatrix}k_1-1\\ k_0+k_1-j-1\end{pmatrix}\right)+\\ +\exp(-\mu t)\sum\limits_{j=0}^{k_1-1}\left(\dfrac{(-1)^{k_0+1}}{j!}\dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}t^j}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}}\begin{pmatrix}k_0\\ k_0+k_1-j-1\end{pmatrix}\right);\\ \ldots\end{cases} \qquad (19)$$

Окончательное выражение для расчета вероятности того, что СП в момент времени t находится в состоянии (k_0, k_1), можно записать в следующем виде:

$$P_{k_0,k_1}(t)=\begin{cases}\exp(-\lambda t), \text{ если } k_0=0\wedge k_1=0;\\ \exp(-\lambda t)\sum\limits_{j=0}^{k_0}\left(\dfrac{(-1)^{k_0+1}}{j!}\dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}t^j}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}}\begin{pmatrix}k_1-1\\ k_0+k_1-j-1\end{pmatrix}\right)+\\ +\exp(-\mu t)\sum\limits_{j=0}^{k_1-1}\left(\dfrac{(-1)^{k_0+1}}{j!}\dfrac{\mu^{k_0}\lambda^{k_1}t^j}{(\mu-\lambda)^{k_0+k_1-j}}\begin{pmatrix}k_0\\ k_0+k_1-j-1\end{pmatrix}\right),\\ \text{если } \neg(k_0=0\wedge k_1=0),\end{cases} \qquad (20)^*$$

где $k_0=\overline{0,\infty}$; $k_1=\overline{k_0,k_0+1}$; $t\ge 0$.

Введем следующее выражение, описывающее вероятность того, что в момент времени t было передано k пачек пакетов *IP*:

$$p_k(t) \underline{\Delta} P\left[Y(t)=k\right]. \tag{21}$$

Учитывая выражение (20) и тот факт, что

$$P\left[Y(t)=k\right]=P\left[X(t)=(k,k)\right]+P\left[X(t)=(k,k+1)\right],$$

можно получить следующий результат:

$$p_k(t)=P_{k,k}(t)+P_{k,k+1}(t)=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\mu\exp(-\lambda t)-\lambda\exp(-\mu t)}{\mu-\lambda}, \text{ если } k=0; \\ \left(\dfrac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)(\lambda-\mu)}\right)^k \dfrac{1}{k(\mu-\lambda)} \sum\limits_{j=0}^{k}\left[\begin{pmatrix} k-1 \\ 2k-j-1\end{pmatrix}\dfrac{((\mu-\lambda)t)^j}{j!}\times\right. \\ \left.\times\Big((k(\mu+\lambda)-\lambda j)(-1)^j\exp(-\lambda t)-(k(\mu+\lambda)-\mu j)\exp(-\mu t)\Big)\right], \\ \text{если } \neg(k=0), \end{cases} \tag{22}$$

где $k=\overline{0,\infty}$; $t\geq 0$.

На рис. 3 представлен ряд распределения случайной величины, рассчитанный согласно выражению (22) при $\lambda=2$, $\mu=5$, $t=10$, $k=\overline{0,23}$, а также ряд распределения случайной величины, рассчитанный согласно распределению Пуассона [17]:

$$p_k(t)=\frac{(\lambda' t)^k}{k!}\exp(-\lambda' t) \tag{23}$$

при $\lambda'=(\lambda^{-1}+\mu^{-1})^{-1}=10/7$, $t=10$, $k=\overline{0,23}$.

Анализ выражения (22) и графиков, представленных на рис. 3, позволяет сделать вывод о том, что исследуемый СП описывает поток Пальма с ограниченным последействием, которое проявляется в том, что его ряд распределения является более сгруппированным возле математического ожидания по сравнению с простейшим потоком.

Для нахождения начальных и центральных моментов исследуемого потока Пальма целесообразно воспользоваться методом производящих функций.

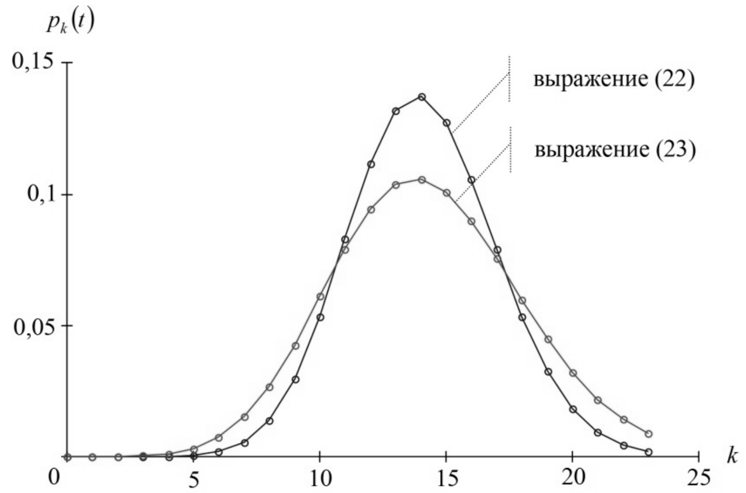

Рис. 3. Графики законов распределения (22) и (23)

Обозначим производящую функцию (z-преобразование) функции $p_k(t)$ как

$$F(z,t) \underline{\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\cdot z^k. \tag{24}$$

Подставив в выражение (24) закон распределения (22)

$$F(z,t) = \frac{\mu\exp(-\lambda t) - \lambda\exp(-\mu t)}{\mu-\lambda} z^0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)(\lambda-\mu)}\right)^k \frac{1}{k(\mu-\lambda)} \sum_{j=0}^{k}\left[\binom{k-1}{2k-j-1}\frac{((\mu-\lambda)t)^j}{j!}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times((k(\mu+\lambda)-\lambda j)(-1)^j\exp(-\lambda t) - (k(\mu+\lambda)-\mu j)\exp(-\mu t))\right] z^k\right] \tag{25}$$

и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2\cdot k-1)!}{(k!)^2}\left(\frac{\mu\lambda}{(\mu-\lambda)(\lambda-\mu)}\right)^k\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(k(\mu+\lambda)\exp(-\lambda t) - k(\mu+\lambda)\exp(-\mu t))}{(\mu-\lambda)} z^k\right] =$$

$$= \frac{2\lambda\mu z(\mu+\lambda)\exp(-t(\mu+\lambda))(\exp(\lambda t) - \exp(\mu t))}{\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}\right)\left(\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}\right)(\lambda-\mu)}, \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\left(\frac{\mu\lambda z}{(\mu-\lambda)(\lambda-\mu)}\right)^{k}\frac{(k(\mu+\lambda)-\lambda j)(-1)^{j}\exp(-\lambda t)}{k(\mu-\lambda)}\times$$

$$\times\binom{k-1}{2k-j-1}\frac{((\mu-\lambda)t)^{j}}{j!}=$$

$$=\mu\left(\exp(-\lambda t)-\exp\left(\frac{-\lambda\cdot t\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}+2\mu z\right)}{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}}\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\mu-\lambda+\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}+2\lambda z}{\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)\left(\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)},\qquad(27)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\left(\frac{\mu\lambda z}{(\mu-\lambda)(\lambda-\mu)}\right)^{k}\frac{(-1)(k(\mu+\lambda)-\mu j)\exp(-\mu t)}{k(\mu-\lambda)}\times$$

$$\times\binom{k-1}{2k-j-1}\frac{((\mu-\lambda)t)^{j}}{j!}=$$

$$=\lambda\left(\exp(-\mu t)-\exp\left(\frac{\mu t\left(\mu-\lambda+\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}+2\lambda z\right)}{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}}\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}+2\mu z}{\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)\left(\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)},\qquad(28)$$

можно представить производящую функцию (z-преобразование) функции $p_k(t)$ в следующем виде:

$$F(z,\ t)=\lambda\exp\left(\frac{\mu t\left(\mu-\lambda+\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}+2\lambda z\right)}{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}}\right)\times$$

$$\times\frac{\mu-\lambda+\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}-2\mu z}{\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)\left(\sqrt{(\mu-\lambda)^{2}+4\lambda\mu z}\right)}+$$

$$+\mu \exp\left(\frac{\lambda t\left(\mu-\lambda+\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}-2\mu z\right)}{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}}\right)\times$$

$$\times\frac{\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}-2\lambda z}{\left(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}\right)\left(\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4\lambda\mu z}\right)}. \qquad (29)^*$$

Принимая во внимание, что (см. [17])

$$z\frac{dF(z,\,t)}{dz}\bigg|_{z=1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\cdot k\ , \qquad (30)$$

можно найти первые четыре начальных момента для ряда распределения (22)

$$\alpha_1[k]=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\cdot k^1=$$

$$=\lambda\mu(\mu+\lambda)^{-2}\left[\exp\left(-(\mu+\lambda)t\right)+t(\mu+\lambda)-1\right]; \qquad (31)^*$$

$$\alpha_2[k]=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\cdot k^2=$$

$$=\lambda\mu(\mu+\lambda)^{-4}\Big[\exp\left(-(\mu+\lambda)t\right)((\mu-\lambda)^2-2\lambda\mu\,(t(\mu+\lambda)+1))+$$

$$+t\,(t\lambda\mu\,(\mu+\lambda)+(\mu-\lambda)^2)(\mu+\lambda)-(\mu-\lambda)^2+2\lambda\mu\Big]; \qquad (32)^*$$

$$\alpha_3[k]=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\cdot k^3=$$

$$=\lambda\mu(\mu+\lambda)^{-6}\Big[\exp\left(-(\mu+\lambda)t\right)(3(t\lambda\mu(\mu+\lambda))^2+6t\lambda\mu\times$$

$$\times(((1+\mu)\mu-\lambda)\lambda^2-\mu^3)-14\lambda\mu(\mu-\lambda)^2+(\lambda^2+\mu^2)^2)+$$

$$+(t(\lambda+\mu))^3(\lambda\mu)^2+3t^2\lambda\mu(\lambda+\mu)(\lambda^3+\mu^3)+$$

$$+t((\lambda+\mu)^5-12\lambda\mu(\lambda^3+\mu^3))+14\lambda\mu(\mu-\lambda)^2-(\lambda^2+\mu^2)^2\Big]; \qquad (33)^*$$

$$\alpha_4[k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \cdot k^4 =$$

$$= \lambda\mu(\mu+\lambda)^{-8}\Big[\exp(-(\mu+\lambda)t)(-4(t\lambda\mu(\lambda+\mu))^3 + 6(t\lambda\mu(\lambda+\mu))^2 \times$$

$$\times (3(\mu-\lambda)^2 + 2\lambda\mu) - 2t\lambda\mu(\lambda+\mu) \times$$

$$\times (7(\mu+\lambda)^4 - 36\lambda\mu(2(\mu+\lambda)^2 - 5\lambda\mu)) +$$

$$+ (\lambda-\mu)^6 - 30\lambda\mu(\lambda-\mu)^4 + 72(\lambda\mu(\lambda-\mu))^2 - 8(\lambda\mu)^3) + t(\mu+\lambda) \times$$

$$\times ((\mu+\lambda)^6 - 28\lambda\mu(\mu+\lambda)^4 + 216(\lambda\mu(\mu+\lambda))^2 - 480(\lambda\mu)^3) + t^2 \times$$

$$\times (7\lambda\mu(\mu-\lambda)^6 + 30(\lambda\mu(\mu-\lambda)^2)^2 + 24(\lambda\mu)^3(\mu+\lambda)^2 - 32(\lambda\mu)^4) +$$

$$+ 2(t(\mu+\lambda))^3(\mu\lambda)^2(3(\mu^2+\lambda^2) - 2\mu\lambda) + (t(\mu+\lambda))^4(\mu\lambda)^3 -$$

$$- (\lambda-\mu)^6 + 30\lambda\mu(\lambda-\mu)^4 - 72(\lambda\mu(\lambda-\mu))^2 + 8(\lambda\mu)^3\Big]. \qquad (34)^*$$

Зная первые четыре начальных момента, далее целесообразно найти первые четыре центральных момента распределения (22), воспользовавшись следующими выражениями [18]

$$\mu_1[k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \cdot (k - \alpha_1[k])^1 = 0; \qquad (35)$$

$$\mu_2[k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \cdot (k - \alpha_1[k])^2 = \alpha_2[k] - (\alpha_1[k])^2; \qquad (36)$$

$$\mu_3[k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \cdot (k - \alpha_1[k])^3 = \alpha_3[k] - 3\alpha_1[k]\alpha_2[k] + 2(\alpha_1[k])^3; \qquad (37)$$

$$\mu_4[k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \cdot (k - \alpha_1[k])^4 =$$

$$= \alpha_4[k] - 4\alpha_1[k]\alpha_3[k] + 6(\alpha_1[k])^2\alpha_2[k] - 3(\alpha_1[k])^4. \qquad (38)$$

Для определения «степени случайности» распределения (22) можно применить коэффициент вариации [188]

$$v[k] = \frac{\sqrt{\mu_2[k]}}{\alpha_1[k]} . \tag{39}$$

Для определения «степени скошенности» распределения (22) необходимо использовать коэффициент асимметрии [18]

$$Sk[k] = \frac{\mu_3[k]}{\left(\sqrt{\mu_2[k]}\right)^3} . \tag{40}$$

В свою очередь, для определения «степени островершинности или степени плосковершинности» распределения (22) следует воспользоваться коэффициентом эксцесса [18]

$$Ex[k] = \frac{\mu_4[k]}{\left(\mu_2[k]\right)^2} - 3 . \tag{41}$$

При $\lambda = 2$, $\mu = 5$, $t = 10$ рассмотренные выше числовые характеристики для исследуемого СП принимают следующие значения:

$$\alpha_1[k] = 14{,}082;\ \alpha_2[k] = 206{,}751;\ \alpha_3[k] = 3153{,}609;\ \alpha_4[k] = 49824{,}501;$$

$$\mu_2[k] = 8{,}459;\ \mu_3[k] = 3{,}980;\ \mu_4[k] = 216{,}378;$$

$$v[k] = 0{,}207;\ Sk[k] = 0{,}162;\ Ex[k] = 0{,}024 .$$

Анализ представленных числовых характеристик позволяет сделать следующие выводы:

- математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации у исследуемого потока Пальма меньше, чем у простейшего потока с интенсивностью $\lambda' = 10/7$ ($\alpha'_1[k] = 14{,}286$; $\mu'_2[k] = 14{,}286$ и $v'[k] = 0{,}265$). Следовательно, поток с ограниченным последействием является «менее случайным» или, другими словами, более комфортным с точки зрения обслуживающей системы;
- исследуемое распределение (22) имеет меньшую положительную асимметрию по сравнению с распределением (23) с интенсивностью $\lambda' = 10/7$, ($Sk'[k] = 0{,}265$) другими словами, оно менее «скошенное»;
- коэффициент эксцесса исследуемого распределения (22) является положительным. Следовательно, данное распределение островершинное, однако сравнивать данный параметр с коэффициентом эксцесса для распределения (23) затруднительно, поскольку оба распределения дискретны и не являются симметричными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в работе *ON*/*OFF* модель источника информации *IP*-телефонии позволяет учесть ограниченное последействие на уровне сеансов связи или пачек пакетов *IP*. В ходе исследования были найдены закон распределения (22), производящая функция (29) и числовые характеристики (31)–(34) потока Пальма с ограниченным последействием, частным случаем которого является простейший поток (23). Дальнейшее развитие предлагаемой модели возможно в направлении разработки многоуровневой *ON*/*OFF* модели источника информации *IP*-телефонии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

2. *Степанов С.Н.* Основы телетрафика мультисервисных сетей. – М.: Эко-Трендз, 2010. – 392 с.

3. *Саитов И.А.* Основы теории построения защищенных мультипротокольных оптических транспортных сетей телекоммуникационных систем: монография. – Орел: Академия ФСО России, 2008. – 220 с.

4. *Поздняк И.С., Киреева Н.В.* Исследование вероятностно-временных характеристик трафика с помощью моделирования в ns2 // T-Comm. – 2013. – № 8. – С. 85–87.

5. *Булаковская А.А.* Применение моделей трафика данных для мониторинга и оптимизация специализированных вычислительных сетей // Наукові записки УНДІЗ. – 2013. – № 4 (28). – С. 80–86.

6. *Сидорова О.И.* Математические модели трафика в современных телекоммуникационных системах: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.12.18. – Тверь, 2009. – 155 с.

7. *Выборнова А.И.* Исследование характеристик трафика в беспроводных сенсорных сетях: дис. … канд. техн. наук: 05.12.13. – СПб., 2014. – 183 с.

8. *Шелухин О.И., Лукьянцев Д.А.* Многоуровневая ON/OFF модель интернет-трафика корпоративной сети спутниковой связи // Электротехнические и информационные комплексы и системы. – 2006. – № 2, т. 2. – С. 59–64.

9. Is network traffic approximated by stable levy motion or fractional Brownian motion / T. Mikosch, S. Resnick, H. Rootzen, A. Stegeman // The Annals of Probability. – 2002. – Vol. 12, N 1. – P. 23–68.

10. *Taggu M., Willinger W., Sherman R.* Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computer Communication Review. – 1997. – Vol. 27, N 2. – P. 5–23.

11. *Paxon V., Floyd S.* Wide-area traffic: the failure of Poisson modeling // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1995. – Vol. 3, N 3. – P. 226–244.

12. *Костромицкий А.И., Волотка В.С.* Подходы к моделированию самоподобного трафика // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – Т. 4, № 7 (46). – С. 46–49.

13. *Шелухин О.И.* Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. – М.: Горячая линия–Телеком, 2011. – 576 с.

14. *Корнышев Ю.Н., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д.* Теория телетрафика. – М.: Радио и связь, 1996. – 270 с.

15. *Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л.* Теория распределения информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 184 с.

16. *Лившиц Б.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д.* Теория телетрафика. – М.: Связь, 1979. – 224 с.

17. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / пер. с англ. И.И. Грушко; под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

18. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: учебник для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

Подрябинкин Леонид Иванович, сотрудник Академии ФСО России. Основное направление научных исследований – теория массового обслуживания, теория вероятностей, применение методов математического моделирования в телекоммуникациях.

Саитов Игорь Акрамович, доктор технических наук, профессор, сотрудник Академии ФСО России. Основное направление научных исследований – синтез и обеспечение эффективного функционирования мультипротокольных телекоммуникационных систем. Имеет 200 публикаций. E-mail: akramovish@mail.ru.

Трегубов Роман Борисович, кандидат технических наук, сотрудник Академии ФСО России. Основное направление научных исследований – теория графов, теория массового обслуживания, теория вероятностей, применение методов математического моделирования в телекоммуникациях. Имеет 61 публикацию. E-mail: treba@list.ru.

The distribution law, the generating function and numerical characteristics of the Palm flow with a limited aftereffect*

L.I. PODRYABINKIN[1], *I.A. SAITOV*[2], *R.B. TREGUBOV*[3]

[1] *35, Priborostroitelnaya Str., Orel, 302034, Russia, The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, employee*

[2] *35, Priborostroitelnaya Str., Orel, 302034, Russia, The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, employee. E-mail: akramovish@mail.ru*

[3] *35, Priborostroitelnaya Str., Orel, 302034, Russia, The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, employee. E-mail: treba@list.ru*

In the paper an analytical model of the IP telephony information source representing a random process of recovery which is generated by the alternation of the ON/OFF periods is developed. Under conditions of the imposed restriction that the duration of ON/OFF periods is a continuous random variable having an exponential distribution, an analytical solution of the system of Kolmogorov-Chapman equations describing a random process of changing the number of beginnings and terminations of communication sessions (packs of packets) in time is found. A distribution law of the number of communication sessions (packs of packets) is found in an analytical form as a function of the time and intensities of ON/OFF periods. This random process is classified as a Palm flow with a limited aftereffect. The research has revealed that if one of the intensities of ON/OFF periods tends to infinity, this random process degenerates into the simplest flow and in the case of equality of the appropriate intensities it degenerates into the Erlang flow of the first order. The generating function obtained in the work for this random process allowed us to define and study the first four initial and central moments of the Palm flow with a limited aftereffect. It was revealed that this Palm flow was "less accidental" and "less slanted" in comparison with the simplest flow, and as a result more convenient for the servicing system. The main research results are an original distribution law, a generating function and numerical characteristics of the Palm flow with a limited aftereffect whose special cases are the simplest flow and the Erlang flow of the first order.

Keywords: Random process; Palm flow; simplest flow; limited aftereffect; distribution law; generating function; numerical characteristics; communication network; packet switching; *IP*-telephony; ON/OFF model

DOI: 10.17212/1814-1196-2015-4-74-89

* *Received 07 July 2015.*

REFERENCES

1. Vishnevskii V.M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh* [Theoretical bases of design of computer networks]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003. 512 p.

2. Stepanov S.N. *Osnovy teletrafika mul'tiservisnykh setei* [Bacics of teletraffice of multiservice networks]. Moscow, Eko-Trendz Publ., 2010. 392 p.

3. Saitov I.A. *Osnovy teorii postroeniya zashchishchennykh mul'tiprotokol'nykh opticheskikh transportnykh setei telekommunikatsionnykh sistem* [Bases of the theory of creation of the protected multilegal optical transport networks of telecommunication systems]. Orel, The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation Publ., 2008. 220 p.

4. Pozdnjak I.S. Kireeva N.V. *Issledovanie verojatnostno-vremennyh harakteristik trafika s pomoshh'ju modelirovanija v ns2* [Research probabilistic-temporal characteristics of the traffic using simulation in ns2]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport – T-Comm: Telecommunications and Transport*, 2013, no. 8, pp. 85–87.

5. Bulakovskaya A.A. Primenenie modelei trafika dannykh dlya monitoringa i optimizatsiya spetsializirovannykh vychislitel'nykh setei [Application of traffic models of data for monitoring and optimization of specialized computer networks]. *Naukovi zapyski UNDIZ,* 2013, no. 4 (28), pp. 80–86.

6. Sidorova O.I. *Sidorova O.I. Matematicheskie modeli trafika v sovremennykh telekommunikatsionnykh sistemakh*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Mathematical models of traffic in the modern telecommunication systems. PhD phys. and math. sci. diss.]. Tver', 2009. 155 p.

7. Vybornova A.I. *Issledovanie kharakteristik trafika v besprovodnykh sensornykh setyakh.* Diss. kand. tekhn. nauk [Research of characteristics of traffic on the wireless sensor networks. PhD eng. sci. diss.]. St. Petersburg, 2014. 183 p.

8. Shelukhin O.I., Luk'yantsev D.A. Mnogourovnevaya ON/OFF model' internet-trafika korporativnoi seti sputnikovoi svyazi [Multilevel on/off-model and its parameter estimation algorithm based on real traffic traces is proposed]. *Elektrotekhnicheskie i informatsionnye kompleksy i sistemy – Electrical and data processing facilities and systems*, 2006, no. 2, vol. 2, pp. 59–64.

9. Mikosch T., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is Network traffic approximated by stable levy motion or fractional Brownian motion. *The Annals of Probability*, 2002, vol. 12, no. 1, pp. 23–68.

10. Taggu M., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling. *Computer Communication Review*, 1997, vol. 27, no 2, pp. 5–23.

11. Paxon V., Floyd S. Wide-area traffic: the failure of Poisson modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1995, vol. 3, no. 3, pp. 226–244.

12. Kostromitskii A.I., Volotka V.S. Podkhody k modelirovaniyu samopodobnogo trafika [Approaches to modelling of the self-similar traffic]. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii – Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2010, vol. 4, no. 7 (46), pp. 46–49.

13. Sheluhin O.I. *Mul'tifraktaly. Infokommunikatsionnye prilozheniya* [Multifractals. Infocommunication applications]. Moscow, Hot Line–Telecom Publ., 2011. 576 p.

14. Kornyshev Yu.N., Pshenichnikov A.P., Kharkevich A.D. *Teoriya teletrafika* [Teletraffic theory]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1996. 270 p.

15. Kornyshev Yu.N., Fan' G.L. *Teoriya raspredeleniya informatsii* [Theory of distribution of information]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 184 p.

16. Livshits B.S., Pshenichnikov A.P., Kharkevich A.D. *Teoriya teletrafika* [Teletraffic theory]. Moscow, Svyaz' Publ., 1979. 224 p.

17. Kleinrock L. *Queueing systems.* Vol. 1. *Theory*. New York, Wiley, 1975. 417 p. (Russ. ed.: Kleinrok L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya.* Ed. V.I. Neiman. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 432 p.

18. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostei* [Probability theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 575 p.