

УДК:519.854.3

## **Прикладные задачи и алгоритмы оптимизации расписаний параллельных обслуживающих систем\***

**Ю.А. МЕЗЕНЦЕВ**

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, доцент. E-mail: mesyan@yandex.ru

Сформулированы прикладные задачи оптимизации управления объектами добывающей промышленности. Представлены формальные постановки задач календарного планирования строительства скважин нефтегазоконденсатного месторождения, основанные на разработанных автором моделях синтеза приближенных к оптимальным по быстродействию расписаний одностадийных параллельных систем с задержками начала обслуживания. Предложен набор из четырех взаимосвязанных алгоритмов оптимизации, позволяющих широко варьировать трудоемкость (быстродействие) и степени точности решений задач смешанного программирования, в которые трансформируются содержательные постановки рассматриваемых прикладных задач оптимизации. Приведен иллюстративный пример синтеза оптимальных по быстродействию календарных графиков бурения скважин нефтегазоконденсатного месторождения. Пример иллюстрирует построение оптимального расписания бурения семи кустов скважин двумя буровыми установками с заданными задержками начала бурения. Интерпретированы и детализированы получаемые результаты вплоть до построения графиков Ганта синтезируемых оптимальных по быстродействию расписаний. Примеры подробно иллюстрируют предложенные алгоритмы дискретной оптимизации. Приведены результаты модельных расчетов сгенерированных тестовых примеров на размерностях, приближенных к реальным; проведено сравнение программных реализаций двух представленных алгоритмов. Экспериментально доказана эффективность алгоритма, основанного на процедуре динамического программирования с отсевом части вариантов на каждом шаге, что позволяет обеспечить приемлемое быстродействие и близость к оптимумам. Кроме этого, определены перспективы развития темы для обеспечения большей точности решений и быстродействия программных реализаций. Показана непосредственная применимость разработанных алгоритмов и программ в проектировании и планировании деятельности крупных предприятий добывающей промышленности.

**Ключевые слова:** управление, оптимизация управления, оптимальность по быстродействию, оптимальные расписания, дискретная оптимизация, параллельные приборы, задержки начала обслуживания, одностадийные системы, релаксация, декомпозиция, динамическое программирование, отсев вариантов, гибридный алгоритм, нефтегазоконденсатные месторождения, графики бурения

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-1-49-73

---

\* Статья получена 12 октября 2015 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке НГТУ (тематический план НИР НГТУ), проект ТП-ЭИ-1\_15.

## ВВЕДЕНИЕ

Поставленные автором формальные задачи и разработанные алгоритмы оптимизации расписаний параллельных и параллельно-последовательных обслуживающих систем [1–3] непосредственно применимы в планировании деятельности крупных добывающих компаний. В настоящей статье, одной из целей которой является комплексная иллюстрация применения разработанных моделей и алгоритмов к реальному объекту, рассмотрен пример формализации и решения задачи оптимизации расписания бурения кустов скважин нефтегазоконденсатного месторождения (НГКМ).

Рассмотрены взаимосвязанные подходы к решению названной прикладной задачи, на тестовых примерах экспериментально оценена их эффективность. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую эффективность применения разработанного инструментария.

## 1. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Применение моделей и алгоритмов оптимизации расписаний параллельной системы с задержками начала обслуживания [1, 4–7, 9, 10] эффективно при планировании обустройства крупных нефтегазоконденсатных месторождений. При этом рассматриваются следующие ключевые задачи:

- определение оптимальных календарных графиков строительства скважин;
- определение оптимальных календарных графиков строительства обвязок устьев скважин, шлейфов, коллекторов и прочих компонент системы сбора газа и конденсата;
- расчет оптимального парка бурового и вспомогательного оборудования (с учетом динамики его поступления, ремонта и выбытия);
- определение оптимальных графиков строительства автодорог.

Связь между перечисленными практическими задачами может быть представлена в виде следующей блок-схемы (рис. 1).

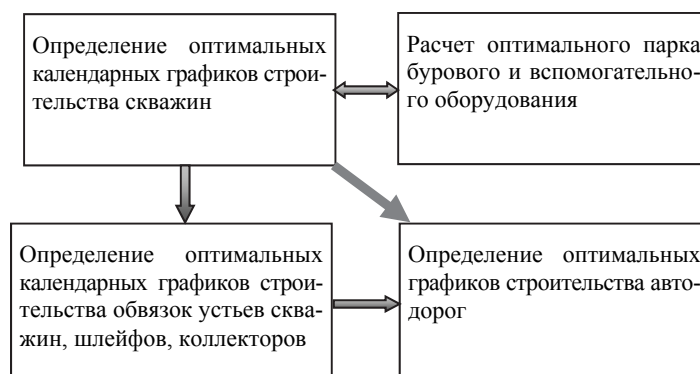


Рис. 1. Задачи оптимизации календарных планов обустройства НГКМ

Установленные связи означают, что оптимизация затрат на обустройство месторождения связана с рационализацией календарного графика строительства скважин (зависящего, в свою очередь, от прогноза спроса на углеводоро-

ды), количества и производительности буровых установок (БУ), графика строительства внутрипромысловых автодорог, обвязок устьев скважин, шлейфов, коллекторов и т. д. При этом все перечисленные мероприятия по обустройству НГКМ должны синхронизироваться со строительством скважин.

Задачи календарного планирования строительства скважин и выбора оборудования взаимосвязаны и должны рассматриваться совместно, комплексно, в то время как две другие прямо зависят от результатов решения задачи календарного планирования строительства скважин.

Краткая содержательная формулировка основной задачи определения оптимальных календарных графиков строительства скважин выглядит следующим образом.

Необходимо найти оптимальное по быстродействию расписание строительства скважин и объектов обустройства НГКМ при заданных технологиях строительства, прогнозах дебитов скважин, составе парка и производительности буровых установок, прогнозов спроса на углеводороды и других ограничениях, позволяющих минимизировать общие затраты на обустройство месторождения.

Можно предложить несколько формальных постановок задачи, которые могут отличаться способом задания технологической последовательности бурения скважин [1, 2, 4–6]. В настоящей статье рассматривается один из подходов, названный поэтапным, или подходом с неявным заданием последовательностей бурения. Он основан на непосредственном применении моделей и алгоритмов оптимизации расписаний параллельных обслуживающих систем (ОС) с задержками начала обслуживания заявок. Технологические последовательности в этом случае могут определяться посредством задания фиксированных временных задержек начала бурения, соответствующих определенным заранее этапам. Применение аппарата оптимизации расписаний многостадийных параллельно-последовательных обслуживающих систем представляет собой второй подход задания технологических последовательностей (маршрутов) в форме сетевых графиков [1, 2].

Формализуем задачу определения оптимального парка бурового оборудования и оптимального календарного плана строительства скважин на нефтегазоконденсатном месторождении.

В качестве параллельной обслуживающей системы рассматривается буровой комплекс, главными компонентами которого являются буровые установки различной производительности. В основном применяются кустовые БУ большой производительности, каждая из которых обслуживает целый куст скважин. Кусты на рассматриваемом НГКМ содержат от 7 до 21 скважины. Поэтому в качестве заявок в ОС могут выступать как кусты целиком, так и отдельные скважины, в зависимости от степени детализации календарного графика.

## 2. ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

Введем следующие обозначения:

$j$  – номер скважины (либо куста скважин в зависимости от степени детализации), далее скважина и куст скважин считаются синонимами;

$i$  – номер буровой установки;

$t_{i,j}$  – норматив времени строительства скважины (куста скважин)  $j$  с использованием БУ  $i$  ( $T = \|t_{i,j}\|$ );

$\tau_j^0 = \tau_j^{c0}$  – задержка начала бурения  $j$ -й скважины (куста скважин) в соответствии с заданной последовательностью. Упорядочим список скважин по возрастанию  $\tau_j^0$ . (Тогда  $T^0 = \|\tau_j^0\|$  – расписание задержек начала бурения).

Некоторые  $\tau_j^0$  могут быть равны нулю либо иметь одинаковые значения для разных скважин (кустов скважин). Задержки  $\tau_j^0$  отражают нестрогую технологическую последовательность, определяемую геологическими (проницаемость пластов) и технологическими условиями. К разряду последних относятся размещение головных и дожимных компрессорных станций, которые, в свою очередь, привязаны к геометрии залежей. Наличие  $\tau_j^0$  обеспечивает равномерный отбор из скважин и минимизирует риск образования депрессионных воронок.

Через  $x_{i,j}$  обозначим булевы переменные назначения бурения скважины (куста скважин)  $j$  на БУ  $i$ .

$T^1 = \|\tau_j^1\|$  – итоговое расписание бурения скважин.

Обозначим также через  $\tau_i^{60}$  задержку начала работы буровой  $i$ . Возникает в случае наличия контрактов на поставки дополнительных БУ, а также тогда, когда задача календарного планирования решается как задача модификации действующего (исполняемого) плана. В этом случае расширяется понятие начальных задержек  $\tau_{i,j}^0$  (расписаний на входе ОС).

$$\tau_{i,j}^0 = \begin{cases} \tau_i^{60}, & \text{если } \tau_i^{60} > \tau_j^{c0}, \\ \tau_j^{c0}, & \text{если } \tau_j^{c0} \geq \tau_i^{60} \end{cases} \quad - \text{исходная задержка начала бурения скважины}$$

(куста скважин)  $j$  на БУ  $i$ , и  $T^0 = \|\tau_{i,j}^0\|$ .

Для определенности обслуживающие системы, которым соответствуют такие условия, будем именовать системами с задержками начала обслуживания заявок.

Производительность БУ определяется временем строительства скважин  $t_{i,j}$ . При роторном бурении  $t_{i,j} = g_j / p_i$ , где  $g_j$  – глубина (м)  $j$ -й скважины;  $p_i$  – средняя скорость бурения  $i$ -й БУ (м/сутки). Данная величина помимо собственно времени бурения учитывает время, необходимое для оснащения скважины колоннами и арматурой.

Затраты  $c_{i,j}$ , связанные с бурением  $j$ -й скважины  $i$ -й буровой, определим как эксплуатационные расходы и амортизационные отчисления за время бурения. Прочие затраты (например, на материалы) от типа БУ не зависят и на результаты расчетов не влияют.

Учтем дебиты скважин и ограничения по объемам добычи на плановый период. Пусть  $d_j$  – дебит  $j$ -й скважины (куста скважин),  $D$  – совокупный спрос на продукты НГКМ.

Сформулируем задачу оптимизации календарного плана строительства скважин на НГКМ с выбором парка бурового оборудования.

$$\sum_{i=1}^I x_{i,j} \leq 1, \quad j = \overline{1, J}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} \geq D, \quad (2)$$

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^J x_{i,j} \leq \overline{b}_i, \quad i = \overline{1, I}. \quad (3)$$

Если  $\sum_{j=1}^J x_{i,j} \geq 1$ , то буровая установка  $i$  выбрана для бурения,  $i = \overline{1, I}$ ,

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если буровая } i \text{ назначается на скважину } j, \\ 0 & \text{в противном случае, } i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \end{cases} \quad (4)$$

$$y_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (5)$$

$$\tau_{i,j} = \tau_{i,j}^0 - \sum_{l=1}^{j-1} (\tau_{i,l} + t_{i,l}) x_{i,l}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (6)$$

$$\hat{\tau}_{i,j} = \tau_{i,j} + y_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^J \hat{\tau}_{i,j} x_{i,j} + \sum_{j=1}^J t_{i,j} x_{i,j} \leq \lambda, \quad i = \overline{1, I}, \quad (8)$$

$$\lambda \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \min, \quad (10)$$

$\hat{\tau}_{i,j}$  имеет смысл фактической задержки начала бурения  $j$ -й скважины  $i$ -й БУ после завершения бурения предшествующей скважины. Компенсирующие переменные  $y_{i,j}$  вводятся для того, чтобы избежать появления отрицательных задержек  $\tau_{i,j}$ . Действительно, наличие неравенств (6) и (7) гарантируют выполнение условий

$$\hat{\tau}_{i,j} = \begin{cases} \tau_{i,j}, & \text{если } \tau_{i,j} \geq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Условия (1) и (3) характерны для задачи о назначениях: (1) обеспечивают назначения на любую скважину не более одной БУ; (3) – назначения не менее  $\underline{b}_i$  и не более  $\overline{b}_i$  скважин на любую БУ  $i$ . Условия (5)–(7) вычисляют фактические задержки обслуживания  $j$ -й скважины  $i$ -й буровой, после окончания бурения предшествующей скважины.

Условие (1) определяет, что на скважину  $j$  назначается не более одной буровой из всех рассматриваемых. Если такая сумма меньше единицы (т. е. ноль), то скважина (куст скважин)  $j$  не строится.

Условие (2) дополняет условие (1) ограничением по уровню спроса. Содержательный смысл условия: сумма дебитов планируемых к строительству скважин не может быть меньше спроса.

Условие (10) задает в качестве дополнительной целевой функции суммарные затраты на строительство скважин, которые следует минимизировать.

Вместо критерия (10) допустимо использование показателя прибыли, зависящего и от затрат  $c_{i,j}$ , и от цен реализации на выходе с НГКМ 1 м<sup>3</sup> газа и конденсата.

Пусть  $r$  – оптовая цена реализации 1 м<sup>3</sup> газа. Тогда показатель прибыли можно вычислить следующим образом:

$$r \sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \max. \quad (11)$$

Раскрытие рекурсий в ограничениях (6)–(8) и последующая линейаризация приводят к следующей формальной постановке [1, 6]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I x_{i,j} &\leq 1, \quad j = \overline{1, J}, \\ \sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} &\geq D, \\ \underline{b}_i &\leq \sum_{j=1}^J x_{i,j} \leq \overline{b}_i, \quad i = \overline{1, I}, \\ x_{i,j} &= \begin{cases} 1, & \text{если скважина } j \text{ закрепляется за буровой } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ u_{i,j,k} &= \begin{cases} 1 & \text{при истинности выражения } f_{i,j,k}(x_{i,k}, x_{i,k+1}, \dots, x_{i,j-1}) = x_{i,j} x_{i,k} \bigcap_{l=k+1}^{j-1} \overline{x_{i,l}}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ i &= \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \\ -K + 2 &\leq x_{i,j} + x_{i,k} - \sum_{l=k+1}^{j-1} x_{i,l} - K u_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$j = \overline{1, J}, \quad k = \overline{1, J}, \quad K = j - k + 1, \quad (13)$$

$$\hat{\tau}_{i,j} = y_{i,j} + \tau_{i,j}^0 - \sum_{k=1}^{j-1} (\tau_{i,k}^0 + t_{i,k}) u_{i,j,k} \geq 0,$$

или

$$-y_{i,j} + \sum_{k=1}^{j-1} (\tau_{i,k}^0 + t_{i,k}) u_{i,j,k} \leq \tau_{i,j}^0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^J (\tau_{i,j}^0 + t_{i,j}) x_{i,j} + \sum_{j=1}^J y_{i,j} - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{j-1} (\tau_{i,k}^0 + t_{i,k}) u_{i,j,k} \leq \lambda, \quad i = \overline{1, I}, \quad (15)$$

$$y_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J},$$

$$\lambda \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \min,$$

либо

$$r \sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \max. \quad (16)$$

Размерности сформулированных задач определяются числом скважин (до 800), кустов (до 60) и буровых установок (от 7 до 15).

Все возможные модификации задачи смешанного программирования (1)–(5), (12)–(15), (9), (10), (16) с линейными относительно булевых переменных  $x_{i,j}$ ,  $u_{i,j,k}$  и непрерывных переменных  $y_{i,j}$  ограничениями НР трудны в сильном смысле и для реальных (обозначенных выше) размерностей не имеют точных алгоритмов решения.

### 3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Существует ряд методов приближенного решения (1)–(9) и (1)–(5), (9), (10), (12)–(15), (16) [1, 3, 4–14]. Кратко рассмотрим четыре взаимосвязанных подхода.

#### *Релаксация бикритериальной обобщенной задачи о ранце*

Первый подход основывается на упрощении задачи (1)–(5), (9), (10), (12)–(15) и замене бикритериальной задачи следующего вида:

$$\sum_{i=1}^I x_{i,j} \leq 1, \quad j = \overline{1, J},$$

$$\sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} \geq D,$$

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^J x_{i,j} \leq \overline{b}_i, \quad i = \overline{1, I},$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если скважина } j \text{ закрепляется за буровой } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^J t_{i,j} x_{i,j} \leq \lambda, \quad i = \overline{1, I}, \quad \lambda \rightarrow \min, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^J \tau_{i,j}^0 x_{i,j} \leq \beta, \quad i = \overline{1, I}, \quad \beta \rightarrow \min. \quad (18)$$

Дополнительно возможно использование также критериев (10) и (16):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \min, \quad r \sum_{j=1}^J d_j \sum_{i=1}^I x_{i,j} - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \max.$$

Из контекста понятно, что данный подход к назначению БУ предполагает компромиссное решение по «чистому» быстродействию системы без учета задержек ( $\lambda$ ) и по равномерности распределения задержек между БУ ( $\beta$ ). Релаксированная задача (1)–(5), (17), (18) NP трудна в сильном смысле, поскольку кроме ограничений задачи о назначениях содержит ресурсное (2), а также ограничения из (17) и (18), которые позволяют классифицировать (1)–(5), (17), (18) как обобщенную булеву задачу о ранце. Вместе с тем релаксированная задача имеет существенное преимущество перед исходной (1)–(9) в сложности (простоте) и перед (1)–(5), (12)–(15), (9) – в размерности, в связи с чем для ее решения существенно проще разработать эффективный приближенный алгоритм.

Все множество Парето-оптимальных решений задачи (1)–(5), (17), (18) можно получить с помощью параметрического анализа, параметризовав один из критериев и последовательно находя границы интервалов устойчивости параметра (и соответствующих решений) [1].

Рассмотрим алгоритм синтеза Парето-оптимальных решений задачи (1)–(5), (12)–(15), (9), обозначив его как  $A_1$ .

#### Алгоритм $A_1$

1. При исходных данных  $\tau_j^0$  и  $t_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$  задаем начальные значения номера шага алгоритма  $s := 0$ , некоторое малое число  $\varepsilon > 0$  и некоторое большое число  $M \geq \sum_{j=1}^J \tau_j^0$ .

2. Фиксируем правые части ограничений (18) на максимальном уровне ( $M$ ). Это эквивалентно нейтрализации (18) за счет операции присваивания  $\beta := M$ .

3. Решаем задачу (1)–(5), (17). Если система ограничений несовместна, запоминаем номер конечного шага  $S$ . Переходим к п. 6. Если получено оптимальное решение, запоминаем значения  $\tilde{x}_{i,j}^s$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$  (координаты оптимума на шаге  $s$ ) и  $\lambda^s$  (значение критерия на шаге  $s$ ).



4. Переходим к следующему шагу  $s := s + 1$ .

5. Определяем новое значение правой части неравенств (18)  $\beta^s = \max_i \left( \sum_{j=1}^J \tau_j^0 \tilde{x}_{i,j}^{s-1} \right) - \varepsilon$ , присваиваем  $\beta := \beta^s$  и переходим к п. 3.

6. Фиксируем Парето-оптимальное множество решений  $P = \{\lambda^s, \beta^s, \tilde{x}_{i,j}^s \mid i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}\}$  и определяем наилучшее из них в терминах задачи (1)–(5), (12)–(15), (9). Конец алгоритма. ■

Можно показать, что множество Парето-оптимальных решений упрощенной задачи (1)–(5), (17), (18) является допустимыми решениями общих задач (1)–(9) и (1)–(5), (12)–(15), (9).

Покажем, что все решения из множества  $P$  допустимы для (1)–(9) и (1)–(5), (12)–(15), (9).

$\tilde{x}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$  удовлетворяют ограничениям (1)–(5) по определению, и любой их комбинации соответствует некоторый единственный набор значений  $\tilde{u}_{i,j,k}^s$  булевых переменных  $u_{i,j,k}^s$  из (12), а следовательно, выполняются и ограничения (13). В свою очередь, зная  $\tilde{u}_{i,j,k}^s$ , из (14) и (15) можно всегда вычислить значения  $y_{i,j}^s \left( \tilde{y}_{i,j}^s \right)$ , что влечет допустимость ограничений (12)–(15).

Поэтому все  $\tilde{x}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$  из  $P$  допустимы для (1)–(5), (12)–(15), (9).

Совершенно аналогично, так как  $\tilde{x}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$  по определению удовлетворяют условиям (1)–(5), используя соотношения (6), можно последовательно вычислить все фактические задержки  $\tau_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$ . Из (4) и (6) вычисляются  $\tilde{y}_{i,j}^s$  и  $\tilde{\tau}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$ .

Поэтому все  $\tilde{x}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$  из  $P$  допустимы для (1)–(9).

Приведенные рассуждения раскрывают механизм поиска условных оптимумов задач (1)–(9) и (1)–(5), (12)–(15), (9) на множестве Парето-оптимальных решений задачи (1)–(5), (17), (18).

В частности, из условий (1)–(5), (12)–(15), (9) и наборов  $\tilde{x}_{i,j}^s, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, s = \overline{1, S}$  прямой подстановкой вычисляются  $\tilde{u}_{i,j,k}^s, \tilde{y}_{i,j}^s, \tilde{\lambda}^s$ . Далее из всех вариантов выбирается вариант с минимальным значением  $\tilde{\lambda}^s \left( \tilde{Z}^* = \min_s \{\tilde{\lambda}^s\} \right)$ . Этот вариант и определяет наилучшее приближенное решение  $\tilde{x}_{i,j}^*, \tilde{y}_{i,j}^*, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$  задачи (1)–(5), (12)–(15), (9).

Количество элементов множества Парето-оптимальных решений задачи (1)–(5), (17), (18)  $S$ , а следовательно, и число шагов алгоритма  $A_1$  достаточ-

но просто оценить. Действительно, из (18) следует, что число  $M$  (максимально возможное значение правой части  $\beta$  любого из данных неравенств) не превосходит величины  $\sum_{j=1}^J \tau_j^0$ . Далее из алгоритма  $A_1$  следует, что на каждом его шаге  $s$  текущее значение  $\beta$  уменьшается на величину  $\tau_j^0$ , а поскольку  $J$  – число элементов  $\tau_j^0$ , то  $S \leq J-1$ . Однако, принимая во внимание смысл (17) и (18) как условий обеспечения равномерного распределения задержек заявок по приборам, можно утверждать, что фактическое значение  $S$  близко к  $\left\lceil \frac{J}{I} \right\rceil$  (целой части отношения  $\frac{J}{I}$ ).

Таким образом, прямая подстановка множества решений задачи (1)–(5), (17), (18) в условия (12)–(15) позволяет определить наилучшее из них с точки зрения точной постановки. Алгоритм, реализующий эту процедуру, является алгоритмом приближенного решения исходной задачи (1)–(9) и редуцированной (1)–(5), (12)–(15), (9).

### *Декомпозиция условий задач*

Второй подход заключается в декомпозиции условий исходной задачи с разбиением на ряд последовательно решаемых подзадач, связь между которыми осуществляется либо с помощью жадной стратегии, либо стратегии динамического программирования (ДП). Все подробности его вычислительных процедур можно найти в работах [1, 2, 6]. Приведем краткое описание основных постулатов и алгоритмов, реализующих данный подход.

Применим декомпозиционную схему решения, разбив исходные данные, упорядоченные по возрастанию задержек  $\tau_j^0$ ,  $j = \overline{1, J}$ , на ряд непересекающихся подмножеств скважин. Разбиение множества скважин на кластеры и последующая декомпозиция полезны также для реализаций задачи (1)–(5), (17), (18) большой (более 500 булевых переменных) размерности.

Пусть все скважины упорядочены по возрастанию задержек  $\tau_j^0$  и разбиты на  $Q$  непересекающихся подмножеств  $q = \overline{1, Q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ ,  $J^q$  – количество элементов  $q$ -го подмножества. Обозначим через  $\tau_{j^q}^0$  задержки начала бурения скважин, принадлежащих подмножеству  $q$ ,  $q = \overline{1, Q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ . Через  $\tau_{j^q}^{q,s}$  обозначим расписание на выходе системы по завершении бурения скважин из подмножества  $q$  на шаге  $s$ . Оно же является расписанием на входе системы для скважин из подмножества  $q+1$  ( $s$  – номер шага алгоритма построения Парето-оптимального множества решений для текущего подмножества  $q$ ). Соответственно, через  $x_{i,j^q}^{q,s}$  обозначим булевы переменные назначе-

ния для  $s$ -го шага  $q$ -го подмножества, через  $\tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}$  – оптимальные назначения для  $q$ -го подмножества скважин. Обозначим также  $\beta^{q,s}$  – пороговое значение суммарных входных задержек для  $q$ -го подмножества скважин на  $s$ -м шаге для любой БУ,  $\lambda^{q,s}$  – время завершения последней операции бурения на  $s$ -м шаге для  $q$ -го подмножества скважин.

Пусть в результате последовательного решения  $q-1$  подзадач получены оптимальные решения  $\tilde{x}_{i,j^1}^{1,s}, \tilde{x}_{i,j^2}^{2,s}, \dots, \tilde{x}_{i,j^{q-1}}^{q-1,s}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $s = \overline{1, S^l}$ ,  $j^l = \overline{1, J^l}$ ,  $l = \overline{1, q-1}$ . Тогда подзадача  $q$  на шаге  $s$  должна удовлетворять условиям:

$$x_{i,j^q}^{q,s} = \begin{cases} 1, & \text{если на шаге } s \text{ заявка } j^q \text{ назначается на прибор } i, \\ 0 & \text{в противном случае, } i = \overline{1, I}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{i,j^q}^{q,s} = 1, \quad q = \overline{1, Q}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad (20)$$

$$\sum_{j^q=1}^{J^q} d_{j^q} \sum_{i=1}^I x_{i,j^q}^{q,s} \geq D^q, \quad q = \overline{1, Q}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad (21)$$

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j^q=1}^{J^q} x_{i,j^q}^{q,s} \leq \bar{b}_i - \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{j^l=1}^{J^l} \tilde{x}_{i,j^l}^{l,s}, \quad i = \overline{1, I}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad (22)$$

$$\sum_{j^q=1}^{J^q} \tau_{j^q}^0 x_{i,j^q}^{q,s} \leq \beta^{q,s}, \quad i = \overline{1, I}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad (23)$$

$$\sum_{j^q=1}^{J^q} t_{i,j^q}^q x_{i,j^q}^{q,s} \leq \lambda^{q,s}, \quad i = \overline{1, I}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad (24)$$

$$\lambda^{q,s} \rightarrow \min. \quad (25)$$

Парето-оптимальное множество решений задачи (19)–(25)  $\tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $s = \overline{1, S^q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$  позволяет найти оценку фактической длины оптимального расписания. Для этого последовательно вычисляем:

$$\tilde{u}_{i,j^q,k^q}^{q,s} = \begin{cases} 1 & \text{при истинности выражения } \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} \tilde{x}_{i,k^q}^{q,s} \bigcap_{l^q=k^q+1}^{j^q-1} \tilde{x}_{i,l^q}^{q,s}, \quad i = \overline{1, I}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$j^q = \overline{1, J^q}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad s = \overline{1, S^q},$$

$$\tilde{y}_{i,j^q}^{q,s} = \begin{cases} \sum_{k^q=1}^{j^q-1} (\tau_{k^q}^0 + t_{i,k^q}) \tilde{u}_{i,j^q,k^q}^{q,s} - \tau_{j^q}^0, & \text{если } \tau_{j^q}^0 - \sum_{k^q=1}^{j^q-1} (\tau_{k^q}^0 + t_{i,k^q}) \tilde{u}_{i,j^q,k^q}^{q,s} < 0 \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$i = \overline{1, I}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad s = \overline{1, S^q},$$

$$\lambda^{q,s} = \max_i \left\{ \sum_{j^q=1}^{J^q} (\tau_{j^q}^0 + t_{i,j^q}) \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} + \sum_{j=1}^{J^q} \tilde{y}_{i,j^q}^{q,s} - \sum_{j^q=1}^{J^q} \sum_{k^q=1}^{j^q-1} (\tau_{k^q}^0 + t_{i,k^q}) \tilde{u}_{i,j^q,k^q}^{q,s} \right\},$$

$$i = \overline{1, I}, \quad q = \overline{1, Q}, \quad s = \overline{1, S^q},$$

$$\tilde{Z}^q = \min_s \{ \lambda^{q,s} \}, \quad s = \overline{1, S^q}.$$

$\tilde{Z}^q$  является фактической оценкой локально наилучшего из наборов  $\tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $s = \overline{1, S^q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$  в смысле задачи (1)–(5), (12)–(15), (9). Обозначим такое решение как  $\tilde{x}_{i,j^q}^q$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ .

Через  $\tilde{X}^q = \|\tilde{x}_{i,j}\|$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $q = \overline{1, Q}$ , обозначим промежуточный результат решения  $q$  подзадач (19)–(25) ( $J = J^1 + J^2 + \dots + J^Q$ ). Матрица  $\tilde{X}^q$  содержит  $q$  подматриц  $\tilde{X}^q = \|\tilde{x}_{i,j^q}^q\|$ . То есть  $\tilde{x}_{i,J^1+J^2+\dots+J^{q-1}+j^q}^q = \tilde{x}_{i,j^q}^q$ , а также

$$(\tilde{X}^q)^T = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,1} & \dots & \tilde{x}_{1,J^1} & \tilde{x}_{1,J^1+1} & \dots & \tilde{x}_{1,J^1+J^2} & \dots & \tilde{x}_{1,J^1+J^2+\dots+J^q} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{I,1} & \dots & \tilde{x}_{I,J^1} & \tilde{x}_{I,J^1+1} & \dots & \tilde{x}_{I,J^1+J^2} & \dots & \tilde{x}_{I,J^1+J^2+\dots+J^q} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска некоторого приближения к оптимальному решению  $\tilde{x}_{i,j}$  на всей совокупности  $\tilde{x}_{i,j^1}^{1,s}$ ,  $\tilde{x}_{i,j^2}^{2,s}$ , ...,  $\tilde{x}_{i,j^Q}^{Q,s}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $s = \overline{1, S^l}$ ,  $j^l = \overline{1, J^l}$ ,  $l = \overline{1, Q}$  можно применить различные стратегии, в зависимости от которых видоизменяется алгоритм решения задачи (1)–(5), (17), (18). Рассмотрим две такие схемы и соответственно два алгоритма  $A_2$  и  $A_3$ .

Простейшей и самой быстрой является жадная стратегия решения. В данном случае ей соответствует последовательный выбор локально оптимальных назначений  $\tilde{x}_{i,j^q}^q$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$  на каждом шаге  $q = \overline{1, Q}$ . Алгоритм, реализующий жадную стратегию, обозначим как  $A_2$ .

**Алгоритм  $A_2$  (на основе жадной стратегии)**

1. Пусть исходные данные  $\tau_j^0$  и  $t_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$  разбиты на  $Q$  подмножеств  $\tau_{j^q}^{q,0}$ ,  $t_{i,j^q}^q$ ,  $q = \overline{1, Q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ ,  $i = \overline{1, I}$ . Задаем начальное значение номера шага алгоритма  $q := 0$ , начальное состояние текущей матрицы назначений  $(\tilde{X}^q)^T$ , все элементы которой равны нулю ( $\tilde{X}^0 = 0$ , т. е.  $\tilde{x}_{i,j} = 0$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ ).

2. Увеличиваем номер шага алгоритма  $q := q + 1$ . Проверяем условие окончания алгоритма. Если  $q = Q + 1$ , переход к п. 5. Иначе п. 3.

3. Формируем очередную  $q$ -ю подзадачу (19)–(25). С помощью алгоритма  $A_1$  находим Парето-оптимальное множество ее решений  $P = \left\{ \lambda^{q,s}, \beta^{q,s}, \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} \mid i = \overline{1, I}, j^q = \overline{1, J^q}, s = \overline{1, S^q} \right\}$ , а также определяем локально оптимальное решение  $\tilde{x}_{i,j^q}^q$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$  с оценкой  $\tilde{Z}^q$ .

4. Корректируем текущую матрицу назначений  $\tilde{X}^q := \tilde{X}^{q-1}$  и дополнительно  $\tilde{x}_{i,j^1+j^2+\dots+j^{q-1}+j^q}^q = \tilde{x}_{i,j^q}^q$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ . Переходим к п. 2.

5. Формируем результат. Назначения буровых на скважины:  $\tilde{x}_{i,j} := \tilde{x}_{i,j^q}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$  и итоговые расписания  $\tau_j^Q$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $\tau_i^Q$ ,  $i = \overline{1, I}$ . ■

Жадная стратегия определяется п. 3 алгоритма, благодаря которому всякое локально оптимальное решение любой подзадачи (19)–(25) декларируется как часть оптимального решения всей задачи (1)–(5), (17), (18).

Другой, существенно более трудоемкой, но и более обоснованной является стратегия динамического программирования.

Этапы ДП однозначно определяются разбиением (1)–(5), (17), (18) на  $Q$  подзадач (19)–(25). Для поиска фактических значений критерия качества расписания воспользуемся соотношениями (6)–(9), которые вычисляются последовательно по этапам, вследствие чего рекурсии (6) не являются препятствием для метода ДП.

**Стратегия динамического программирования**

В данном случае во внимание принимаются все компоненты Парето-оптимальных решений подзадач (19)–(25). По терминологии, принятой в динамическом программировании,  $q = \overline{1, Q}$  и  $s = \overline{1, S^q}$  определяют этапы (шаги) метода ДП.

Определим расписание на шаге  $q$  как локальную функцию быстродействия ОС  $\tau^{q,s} = f\left(\tau_{j^q}^{q,0}, \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}, t_{i,j^q}^q, \tau^{q-1,s}\right)$ , полагая известным Парето-оптимальное множество  $P = \left\{ \lambda^{q,s}, \beta^{q,s}, \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} \mid i = \overline{1, I}, j^q = \overline{1, J^q}, s = \overline{1, S^q} \right\}$ ,

$\tau^{q,s} = \|\tau_i^{q,s}\|$  – расписание высвобождения БУ после строительства скважин подмножества  $q, s$ . Компонента  $\tau_i^{q,s}$  – время высвобождения буровой  $i$  для  $s$ -го варианта решения на подмножестве скважин (шаге)  $q$ , она же является фактической задержкой начала бурения БУ  $i$  скважин из подмножества  $q+1$ , если превосходит значение  $\tau_{j^q}^{q,0}$ .

Для любого  $q$  определим следующее отношение порядка:

$$\tau^{q,s} \geq \tau^{q,p} \text{ тогда и только тогда, когда } \tau_{i,J^q}^{q,s} \geq \tau_{i,J^q}^{q,p}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (26)$$

Условие (26) означает, что  $p$ -е расписание на шаге  $q$  предпочтительней  $s$ -го, если имеет меньшую (не большую) длительность для каждого из приборов.

Другое, более сильное, отношение зададим посредством правила:

на любом шаге  $q$   $p$ -е расписание короче (не длиннее)  $s$ -го ( $\tau^{q,s} \geq \tau^{q,p}$ ) тогда и только тогда, когда

$$\max_i \left\{ \tau_{i,J^q}^{q,s} \right\} \geq \max_i \left\{ \tau_{i,J^q}^{q,p} \right\}. \quad (27)$$

Условие (27) означает, что  $p$ -е расписание на шаге  $q$  предпочтительней  $s$ -го, если имеет меньшее время завершения самой продолжительной операции бурения для всех БУ.

Выведем зависимость расписания любой скважины (любой буровой) от сделанных ранее назначений. Для этого будем полагать известными назначения  $\tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}$  как координаты оптимальных решений подзадач (19)–(25).

Положим  $q=1, s=1$ . При этом выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \tau_{i,1}^{1,1} &= (\tau_1^{1,0} + t_{i,1}^1) \tilde{x}_{i,1}^{1,1}, \quad i = \overline{1, I}, \\ \tau_{i,2}^{1,1} &= \max \left\{ \tau_2^{1,0} \cdot \tilde{x}_{i,2}^{1,1}, \tau_{i,1}^{1,1} \right\} + t_{i,2}^1 \cdot \tilde{x}_{i,2}^{1,1}, \quad i = \overline{1, I}, \text{ далее по индукции:} \\ \tau_{i,j^1}^{1,1} &= \max \left\{ \tau_{j^1}^{1,0} \cdot \tilde{x}_{i,j^1}^{1,1}, \tau_{i,j^1-1}^{1,1} \right\} + t_{i,j^1}^1 \cdot \tilde{x}_{i,j^1}^{1,1}, \quad i = \overline{1, I}, \\ \tau_i^{1,1} &= \tau_{i,j^1}^{1,1} = \max \left\{ \tau_{j^1}^{1,0} \tilde{x}_{i,j^1}^{1,1}, \tau_{i,j^1-1}^{1,1} \right\} + t_{i,j^1}^1 \tilde{x}_{i,j^1}^{1,1}, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned}$$

В общем виде рекуррентное соотношение на любом подмножестве  $q$ , в расписании  $s$ , буровой  $i$  для скважин  $j^q-1$  и  $j^q$  может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j^q}^{q,s} &= \max \left\{ \tau_{j^q}^{q,0} \cdot \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}, \tau_{i,j^q-1}^{q,s} \right\} + t_{i,j^q}^q \cdot \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}, \\ i &= \overline{1, I}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad j^q = \overline{1, J^q}, \quad q = \overline{1, Q}, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\tau_{i,0}^{1,1} = 0, \quad i = \overline{1, I}$ .

Запишем также рекуррентное соотношение Беллмана для расписания завершения работы буровых на шаге  $q$  (подмножестве решений  $q, s$ ):

$$\tau_i^{q,s} = \tau_{i,J^q}^{q,s} = \min_s \left\{ \max \left\{ \tau_{J^q}^{q,0} \cdot \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}, \tau_{i,J^q-1}^{q,s} \right\} + t_{i,J^q}^q \cdot \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} \right\},$$

$$i = \overline{1, I}, \quad s = \overline{1, S^q}, \quad q = \overline{1, Q}.$$
(29)

Условие (29) определяет минимум в смысле (26) по всем вариантам расписания (для разных значений  $s$ ) на подмножестве (шаге)  $q$ .

Соотношение, определяющее связь между расписаниями на подмножествах скважин (шагах)  $q$  и  $q+1$   $\left( \tau_{i,J^q}^{q,\sigma} \text{ и } \tau_{i,1}^{q+1,s} \right)$ :

$$\tau_{i,1}^{q+1,s} = \max \left\{ \tau_1^{q+1,0} \cdot \tilde{x}_{i,1}^{q+1,s}, \tau_{i,J^q}^{q,\sigma} \right\} + t_{i,1}^{q+1} \cdot \tilde{x}_{i,1}^{q+1,s},$$

$$i = \overline{1, I}, \quad \sigma = \overline{1, S^q}, \quad s = \overline{1, S^{q+1}}, \quad s1 = \overline{1, S1}, \quad S1 = S^q \times S^{q+1},$$
(30)

где  $\tau_i^{0,\sigma} = 0$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $\sigma = \overline{1, S^0}$ .

Наконец, на завершающем шаге (этапе)  $Q$  определяется безусловный минимум в смысле (27) функции (29) и оптимальное расписание для подмножества  $Q$ :

$$\tau_i^Q = \tau_{i,J^Q}^Q = \min_{s=\overline{1, S^Q}} \left\{ \max \left\{ \tau_{J^Q}^{Q,0} \cdot \tilde{x}_{i,j^Q}^{Q,s}, \tau_{i,J^Q-1}^{Q,s} \right\} + t_{i,J^Q}^Q \cdot \tilde{x}_{i,j^Q}^{Q,s} \right\}, \quad i = \overline{1, I},$$
(31)

$\tau_i^Q = \max_i \{ \tau_i^Q \}$  – длина расписания.

Зная  $\tau_i^Q$ , обратным ходом процедуры ДП из соотношений (28)–(31) легко определить прочие компоненты искомого расписания.

Заметим, что в случае равенства  $Q = J$  (число этапов равно числу заявок в ОС), рассмотренная вычислительная схема полностью совпадает с методом динамического программирования решения задачи (1)–(9). Его трудоемкость превышает трудоемкость любого другого комбинаторного метода решения редуцированной задачи (1)–(5), (12)–(15), (9). Поэтому вариант  $Q = J$  здесь не рассматривается. Во всех остальных случаях имеем смешанный численный метод приближенного решения задачи (1)–(9). Опишем его, обозначив как  $A_3$ .

#### Алгоритм $A_3$ (на основе стратегии ДП)

1. Пусть исходные данные  $\tau_j^0$  и  $t_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$  разбиты на  $Q$  подмножеств  $\tau_{j^q}^{q,0}$ ,  $t_{i,j^q}^q$ ,  $q = \overline{1, Q}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$ ,  $i = \overline{1, I}$ . Задаем начальное значение

номера шага алгоритма  $q := 0$ , начальное состояние матрицы назначений  $(\tilde{X}^q)^T = 0$  ( $\tilde{\chi}_{i,j}^q = 0$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $q = \overline{1, Q}$ ).

2. Переход к следующему шагу алгоритма  $q := q + 1$ . Проверяем условие окончания алгоритма. Если  $q = Q$ , переход к п. 5. Иначе п. 3.

3. Формируем очередную  $q$ -ю подзадачу (19)–(25). С помощью алгоритма  $A_1$  находим Парето-оптимальное множество ее решений  $P = \left\{ \lambda^{q,s}, \beta^{q,s}, \tilde{x}_{i,j^q}^{q,s} \mid i = \overline{1, I}, j^q = \overline{1, J^q}, s = \overline{1, S^q} \right\}$ . Посредством (28)–(30) определяем локально оптимальные в смысле (26) расписания  $\tau_i^{q,s}$ ,  $i = \overline{1, I}$ .

4. Запоминаем расписания  $\tau_i^{q,s}$ , соответствующие им назначения  $\tilde{x}_{i,j^q}^{q,s}$   $i = \overline{1, I}$ ,  $j^q = \overline{1, J^q}$  и переходим к п. 2.

5. Формируем завершающую  $Q$ -ю подзадачу (19)–(25). С помощью алгоритма  $A_1$  находим Парето-оптимальное множество ее решений  $P = \left\{ \lambda^{Q,s}, \beta^{Q,s}, \tilde{x}_{i,j^Q}^{Q,s} \mid i = \overline{1, I}, j^Q = \overline{1, J^Q}, s = \overline{1, S^Q} \right\}$ . Посредством (30)–(31) определяем оптимальные в смысле (27) итоговые расписания  $\tau_j^Q$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $\tau_i^Q$ ,  $i = \overline{1, I}$ . Обратным ходом метода ДП формируем результат, т. е. назначения заявок на приборы  $\left( \text{итоговую матрицу } (\tilde{X}^Q)^T \tilde{\chi}_{i,j^Q}^Q = \tilde{x}_{i,j}^{q,*} \right)$  и расписания  $\tau_j^{q,*}$ ,  $\tau_i^{q,*}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J^q}$ ,  $q = \overline{1, Q}$ , ■

Легко обнаружить, что жадный алгоритм  $A_2$  является частным случаем  $A_3$ ;  $A_3$  трансформируется в  $A_2$ , если вместо отношений порядка (26) всюду в (28)–(30) используется отношение (27).

### **Динамическое программирование с поэтапным отсевом вариантов**

Третий подход основан на прямом применении алгоритма динамического программирования к задаче (1)–(9) с отсеком части вариантов на каждом этапе ДП. Подробности можно найти в работе [4]. Однако в этом случае возникают трудности, связанные с учетом в ДП дополнительных ресурсных ограничений (2).

Для построения эффективного приближенного алгоритма воспользуемся общей схемой ДП, производя отсев локально наихудших вариантов на ряде шагов (этапов) динамического программирования.

Будем считать упорядоченными все скважины  $j = \overline{1, J}$  по величинам исходных задержек (входному расписанию  $\|\tau_j^0\|$ ). Тогда в соответствии с процедурой ДП определим номера этапов  $s = \overline{1, J}$ . Обозначим через



$f_{i,s}(\tau_s^0, t_{i,s}, x_{i,s})$ ,  $i = \overline{1, I}$  время завершения бурения установкой  $i$  скважины  $s$  на этапе  $s$ , а через  $\phi_s(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, s}$  условно минимальное время завершения бурения всех назначенных скважин на этапах с первого по  $s$ -й.

$$f_{i,s}(\tau_s^0, t_{i,s}, x_{i,s}) = \max \left\{ 0, \left[ \tau_s^0 x_{i,s} - \phi_{i,s-1}(\tau_{s-1}^0, t_{i,j}, x_{i,j}) \right] \right\} + t_{i,s} x_{i,s},$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, s-1}. \quad (32)$$

Рекуррентное соотношение Беллмана для этой задачи:

$$\phi_{i,s}(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j}) = \left\{ f_{i,s}(\tau_s^0, t_{i,s}, x_{i,s}) + \phi_{i,s-1}(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j}) \right\}, j = \overline{1, s-1}, \quad (33)$$

$$\phi_s(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j}) = \max_i \left\{ \phi_{i,s}(\tau_s^0, t_{i,j}, x_{i,j}) \right\}, j = \overline{1, s}, i = \overline{1, I}. \quad (34)$$

Для достижения максимального быстродействия по критерию (8)–(9) на последнем шаге следует выбрать минимальное значение  $\phi_J(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$ , т. е. найти  $\min \left\{ \phi_J(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j}) \right\}$ .

Отсев части промежуточных расписаний на этапах ДП возможен в различных вариациях. Если отбрасывать все варианты расписания на шаге  $s$ , кроме локально наилучшего, то такой способ построения расписания совпадает с жадным алгоритмом. Если оставлять все промежуточные расписания, это приведет к полному перебору вариантов. При этом на первом этапе будем иметь  $I \cdot 2^0$ , на втором этапе  $I \cdot 2^1$ , на этапе  $s - I \cdot 2^{s-1}$  вариантов промежуточного расписания. Если же пытаться найти компромисс между точностью и быстродействием, то с учетом стремления построить эффективный алгоритм, число промежуточных расписаний должно полиномиально зависеть от количества переменных задачи (1)–(9).

Рассмотрим одну из таких компромиссных вариаций. Определим максимально возможное число вариантов  $S$ , оставляемое на этапе  $s$  для дальнейшего анализа. Для удобства изложения примем  $S = 2^{K'}$ , где  $K'$  – некоторая константа. Например, положим  $K' = 10$ , тогда  $S = 1024$ . Поскольку на каждом этапе ДП число вариантов промежуточных расписаний удваивается, произведем отсев половины локально наихудших из генерируемых вариантов на всяком этапе, начиная с  $K'+1$ -го. Подсчитаем общее число генерируемых алгоритмом вариантов расписаний. На первом этапе  $I$  вариантов, на этапе  $K' - I \cdot 2^{K'-1}$  вариантов, на этапах с  $K'+1$  по  $J$ -й –  $I \cdot 2^{K'}$  вариантов. Тогда общее число промежуточных расписаний  $N'$  составит

$$N' = I(1 + 2 + \dots + 2^{K'-1} + 2^{K'} \dots + 2^{K'}) = I[2^{K'} - 1 + (J - K')2^{K'}] \Rightarrow$$

$$N' = I \cdot 2^{K'}(J - K' + 1) - I, \quad (35)$$

Поскольку  $S = 2^{K'}$  – некоторая константа, (35) отображает полиномиальную зависимость трудоемкости ДП с отсевом вариантов от размерности задачи (1)–(9). Для наглядности сравним  $N$  с  $N'$ , положив  $K' = 10$ ,  $J = 1000$ ,  $I = 100$ . Тогда  $N = 100(2^{1000} - 1)$ ,  $N' = 100 \cdot 1024(1000 - 10 + 1) - 100 = 101\,478\,300$ . Данные обстоятельства опосредуют вполне заурядную трудоемкость гибридного алгоритма, которая кратна  $N'$ , и фактически бесконечную трудоемкость ДП, кратную  $N$ . Опишем гибридный алгоритм ДП с отсевом вариантов.

#### Алгоритм $A_4$

1. Ввод исходных данных  $(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j}, j = \overline{1, J}, i = \overline{1, I})$  и параметров  $K', S = 2^{K'}$ . Положим  $\phi_{i,0}(\tau_0^0, t_{i,j}, x_{i,j}) \equiv 0$ , определим начальный номер шага  $s := 0$ .
2.  $s := s + 1$ .
3. Проверка номера этапа. Если  $s > J$ , переход к этапу 7, если нет, следующий пункт.
4. На этапе  $s$  в соответствии с (32)–(34) генерируем все допустимые варианты расписания, вычисляем  $f_{i,s}(\tau_s^0, t_{i,s}, x_{i,s})$ ,  $\phi_{i,s}(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$ , длины расписаний  $\phi_s(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$ .
5. Проверка  $N^s$  – числа вариантов  $\phi_{i,s}(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$  на этапе  $s$ . Если  $N^s \leq S$ , переход к п. 2. В противном случае следующий пункт.
6. Отсев половины вариантов  $\phi_{i,s}(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$  с наибольшими значениями длины расписания  $\phi_s(\tau_j^0, t_{i,j}, x_{i,j})$ . Переход к п. 2.
7. Выбор вариантов кратчайших расписаний. Составление расписаний обратным ходом ДП. ■

#### 4. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Приведем пример расчета календарного плана строительства скважин с учетом ограничения по совокупному дебиту и спросу (2).

Пример 1. Параллельная система состоит из двух неидентичных БУ, которые назначаются на обслуживание на семь кустов скважин с задержками поступления. Данные о нормах времени обслуживания заявок и задержках поступления заявок в систему приведены в табл. 1. Там же приведены данные по дебитам кустов скважин  $d_j$ . Положим спрос не менее величины  $D = 50$ .

Таблица 1

Исходные данные примера 1

Номер куста ( $j$ )	Время строительства $t_{i,j}$ (месяцев)		Технологическая задержка начала бурения $\left(\tau_i^0\right)$	Дебит куста скважин $d_j$ (млн м <sup>3</sup> в сут.)
	(номер буровой( $i$ ))			
	1	2		
1	2	4	0	8
2	3	2	0	9
3	5	4	2	7
4	2	4	3	8
5	4	2	4	6
6	3	3	5	9
7	4	3	6	8
Задержка начала работы БУ $\left(\tau_i^0\right)$	0	2	—	Итого 55

Решение данного примера (оптимальные назначения и расписание на выходе), полученное посредством применения разработанного инструментария с применением первого и второго подхода, приведено в табл. 2.

Таблица 2

Решение примера 1

Номер куста ( <i>j</i> )	<i>D</i> = 50		Расписание на выходе
	Назначения (номер БУ( <i>i</i> ))		
	1	2	
1	1	0	2
2	1	0	5
3	0	1	6
4	1	0	7
5	0	1	8
6	1	0	10
7	0	1	11

Как видно из табл. 2, быстродействие системы (минимальное время ввода всех кустов скважин в эксплуатацию) – 11 месяцев, при фактическом совокупном дебите 55 млн м<sup>3</sup> в сутки.

Оптимальный график работы БУ при строительстве скважин для примера 1 представлен на рис. 2.

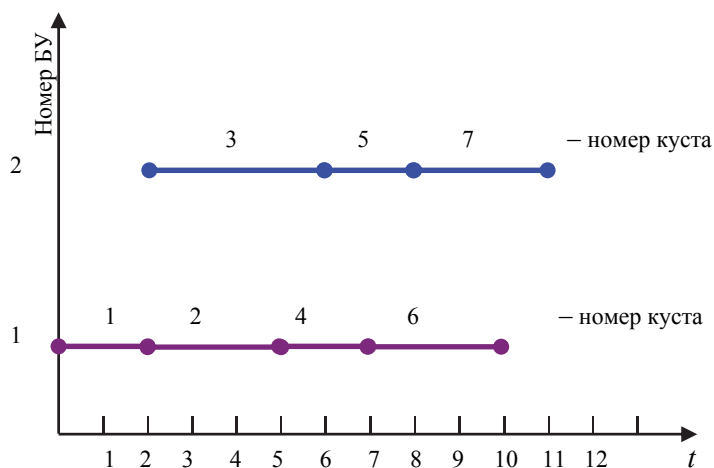


Рис. 2. График загрузки буровых установок при оптимальном решении примера 1

Если же положить совокупный спрос равным  $D = 46$  млн м<sup>3</sup> в сутки, то получим следующие результаты (оптимальные по быстродействию назначения и расписание приведены в табл. 3).

Таблица 3

Решение примера 1 для  $D = 46$

Номер куста ( $j$ )	$D = 46$		Расписание на выходе (месяц ввода в эксплуатацию)
	Назначения (номер БУ( $i$ ))		
	1	2	
1	1	0	2
2	0	1	4
3	1	0	7
4	1	0	9
5	0	1	6
6	0	1	9
7	0	0	0

Как видно из табл. 3, минимальное время ввода всех кустов скважин в эксплуатацию – 9 месяцев при фактическом совокупном дебите 47 млн м<sup>3</sup> в сутки. В этом случае не строится 7-й куст скважин, однако все ограничения

задачи выполняются, сроки строительства сократились на 2 месяца, соответственно должны снизиться и затраты.

Построенный на основании полученных оптимальных назначений график работы буровых установок представлен на рис. 3.

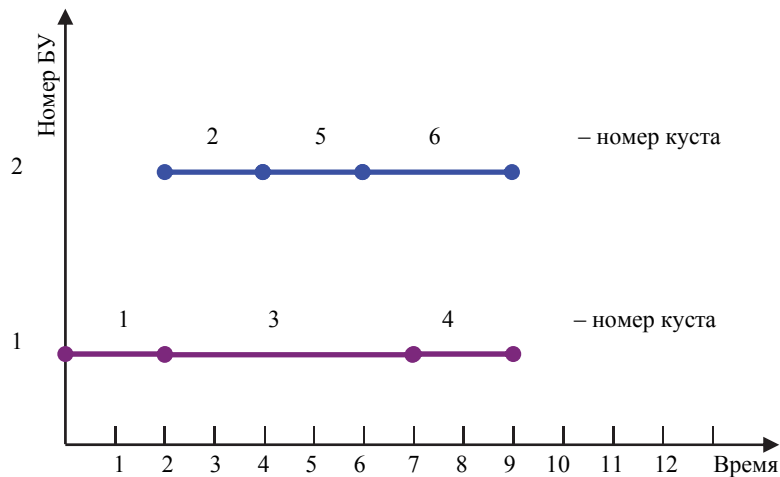


Рис. 3. График оптимальной загрузки буровых установок при ограничении по дебиту

## 5. СРАВНЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ

Исходные данные тестовых примеров для задач (1)–(5), (17), (18), (1)–(5), (12)–(15), (9) и (1)–(9), были сгенерированы датчиками случайных чисел. Размерность всех тестов одинакова (30 БУ, 100 кустов скважин) и ограничена фактической размерностью, позволяющей найти точное решение задачи (1)–(5), (12)–(15), (9).

Таблица 4

Сравнительные характеристики алгоритмов

№	$\lambda_{мч}$	$t_{км}$	$\lambda_{км}$	$t_{оп}$	$\lambda_{оп}$	$p_{км}$	$\Delta_{км}$	$p_{оп}$	$\Delta_{оп}$
1	13	8,5	13	2,5	13	0	0	0,00	0
2	24	10	26	2,5	25	8,33	2	4,17	1
3	30	10,5	32	2,5	30	6,67	2	0,00	0
4	28	20	30	2,5	28	7,14	2	0,00	0
5	25	18	28	2,5	26	12	3	4,00	1
6	19	13	19	2,5	20	0	0	5,26	1
7	22	12	25	2,5	23	13,64	3	4,55	1
8	24	13	27	2,5	24	12,5	3	0,00	0
9	19	27,5	19	2,5	20	0	0	5,26	1
10	18	17	19	2,5	19	5,56	1	5,56	1
11	17	11	18	2,5	17	5,88	1	0,00	0
12	18	9,5	20	2,5	19	11,11	2	5,56	1
13	17	12	19	2,5	17	11,76	2	0,00	0
14	13	11,5	15	2,5	13	15,38	2	0,00	0
15	15	14	16	2,5	15	6,67	1	0,00	0
16	21	11	22	2,5	21	4,76	1	0,00	0

Окончание табл. 4

№	$\lambda_{mч}$	$t_{км}$	$\lambda_{км}$	$t_{он}$	$\lambda_{он}$	$p_{км}$	$\Delta_{км}$	$p_{он}$	$\Delta_{он}$
17	25	15	26	2,5	26	4	1	4,00	1
18	25	19	25	2,5	26	0	0	4,00	1
19	27	11	27	2,5	29	0	0	7,41	2
20	23	14	23	2,5	23	0	0	0,00	0
Среднее		13,9	–	2,5	–	6,27	1,30	2,49	0,55

При расчетах использованы постоянные параметры алгоритма  $A_4$ :  $K'=10$ ,  $J=100$ ,  $I=30$ . Тогда  $N=30(2^{100}-1)$ ,  $N'=30 \cdot 1024(100-10+1)-30=2795517$ . В табл. 4  $\lambda_{mч}$  – значение целевой функции (критерия быстройдействия) для точного решения;  $\lambda_{км}$  – значение целевой функции компромиссного решения, полученного алгоритмом  $A_1$ ;  $t_{км}$  – время счета этим алгоритмом (с);  $\lambda_{он}$  – значение целевой функции решения, полученного алгоритмом  $A_4$ ;  $t_{он}$  – время счета алгоритмом  $A_4$  (с);  $\Delta_{он} = \lambda_{он} - \lambda_{mч}$ ;  $\Delta_{км} = \lambda_{км} - \lambda_{mч}$ ; № – номер теста;  $p_{он} = (\lambda_{он} / \lambda_{mч} - 1)100$  – процент отклонений от оптимума решений, полученных алгоритмом  $A_4$ .  $p_{км} = (\lambda_{км} / \lambda_{mч} - 1)100$  – процент отклонений от оптимума решений, полученных алгоритмом  $A_1$  [4]. Одинаковые значения  $t_{он}$  объясняются одинаковыми параметрами алгоритма  $A_4$ . Следует отметить также, что время счета до гарантированного получения оценки  $\lambda_{mч}$  (точного решения) для рассмотренных тестов в ряде случаев на несколько порядков превосходит время  $t_{км}$ .

Полученные результаты наглядно демонстрируют преимущества последнего подхода ( $A_4$  перед  $A_1$ ) как в точности (в среднем), так и в быстродействии для рассмотренных тестов.

В качестве развития темы в направлении уточнения решений задачи на основе наиболее перспективного алгоритма  $A_3$  теоретически с увеличением детализации (и размерностей подзадач смешанного программирования), позволяющего получать решения сколь угодно близкие к оптимальным, можно предложить также использование алгоритма бинарных отсечений [15] в качестве решателя последовательностей подзадач булева программирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом применения разработанного математического и программного инструментария является оптимизация выбора оборудования и календарных планов строительства скважин, а обустройства в целом крупных и крупнейших НГКМ. Размерности поставленных задач позволяют эффективно использовать разработанные алгоритмы для приближенного решения актуальной практической задачи управления производством добывающего предприятия, принадлежащей теоретически к числу труднорешаемых проблем дискретной оптимизации. Вычислительные эксперименты выявили приемлемую точность ее решения. На тестах относительно малых размерностей (на

реальных размерностях подобная проверка невозможна) приближенные решения совпали с оптимальными более чем в 60 процентах случаев. В 25 процентах отклонения от оптимумов не превысили пяти процентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мезенцев Ю.А.* Эффективные вычислительные методы решения дискретных задач оптимизации управления производственными процессами. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – 275 с.
2. *Мезенцев Ю.А.* Оптимизация расписаний параллельно-последовательных систем в календарном планировании // Информационные технологии. – 2009. – № 6. – С. 35–41.
3. *Pinedo M.* Scheduling: theory, algorithms, and systems. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York, London: Springer, 2008. – 672 p.
4. *Avdeenko T.V., Mezentsev Yu.A.* Efficient hybrid algorithm for optimal scheduling of unrelated parallel machines // The 10<sup>th</sup> International Forum on Strategic Technology (IFOST 2015): proceedings, Indonesia, Bali, 3–5 June 2015. – Yogyakarta, 2015. – P. 66.
5. *Lin Y.K.* Particle swarm optimization algorithm for unrelated parallel machine scheduling with release dates // Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013, art. 409486. – P. 1–9.
6. *Мезенцев Ю.А.* Оптимизация расписаний параллельных динамических систем в календарном планировании // Информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 16–23.
7. *Bank J., Verner F.* Heuristic algorithms for unrelated parallel machine scheduling with a common due date, release dates, and linear earliness and tardiness penalties // Mathematical and Computer Modelling. – 2001. – Vol. 33 (4–5). – P. 363–383.
8. *Brucker P.* Scheduling algorithms. – 5<sup>th</sup> ed. – Berlin; New York: Springer, 2007. – 372 p.
9. *Gharbi A., Haouari M.* Minimizing makespan on parallel machines subject to release dates and delivery times // Journal of Scheduling. – 2002. – Vol. 5 (4). – P. 329–355.
10. *Kaabi J., Harrath Y.* A survey of parallel machine scheduling under availability constraints // International Journal of Computer and Information Technology. – 2014. – Vol. 03, iss. 02. – P. 238–245.
11. *Kashan A.H., Karimi B.* A discrete particle swarm optimization algorithm for scheduling parallel machines // Computers and Industrial Engineering. – 2009. – Vol. 56, no. 1. – P. 216–223.
12. *Lee W.C., Wu C.C., Chen P.* A simulated annealing approach to makespan minimization on identical parallel machines // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2006. – Vol. 31, no. 3–4. – P. 328–334.
13. *Lin Y.K., Hsieh H.T., Hsieh F.Y.* Unrelated parallel machine scheduling problem using an ant colony optimization approach // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2012. – Vol. 6. – P. 1798–1803.
14. *Santos F.C., Vilarinho P.M.* The problem of scheduling in parallel machines: a case study // Proceedings of the World Congress on Engineering, WCE–2010, London, UK, 30 June – 2 July 2010. – London, 2010. – Vol. 3.
15. *Мезенцев Ю.А.* Метод бинарных отсечений и ветвлений целочисленного программирования // Доклады АН ВШ РФ. – 2011. – № 1 (16). – С. 12–25.

*Мезенцев Юрий Анатольевич*, доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: системный анализ, теория расписаний, математические методы дискретной оптимизации. Имеет более 70 публикаций. E-mail: mesyan@yandex.ru

## ***Applications and algorithms for optimal scheduling of unrelated parallel service systems\****

*Yu.A. MEZENTSEV*

*Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D.Sc. (Eng.), professor. E-mail: mesyan@yandex.ru*

In this paper we propose approaches to optimal scheduling of unrelated parallel machines with service initiation delays. One approach is based on the scheme of modified dynamic programming with adaptive narrowing of the search domain that provides its computational performance. We discuss the complexity of exact schedule synthesis and compare it with approximate, close to optimal, solutions. Also, we explain how the algorithm works on the example of two unrelated parallel machines and seven jobs with specified release dates. Performance results of the proposed approach that show its efficiency are presented.

**Keywords:** Control; optimization of control; makespan criterion; optimum scheduling; discrete optimization; unrelated parallel machines; release dates; single-stage systems; relaxation; decomposition; dynamic programming; elimination; hybrid algorithm; oil-gas condensate fields; drilling schedules

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-1-49-73

## **REFERENCES**

1. Mezentsev Yu.A. *Effektivnye vychislitel'nye metody resheniya diskretnykh zadach optimizatsii upravleniya proizvodstvennymi protsessami* [Effective numerical methods for solution of discrete optimization problems management]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2015. 275 p.
2. Mezentsev Yu.A. Optimizatsiya raspisanii parallel'no-posledovatel'nykh sistem v kalendar'nom planirovanii [Optimization of schedules in parallel-serial systems for scheduling]. *Informatsionnye tekhnologii – Information Technology*, 2009, no. 6, pp. 35–41.
3. Pinedo M. *Scheduling: theory, algorithms, and systems*. 3<sup>rd</sup> ed. New York, London, Springer, 2008. 672 p.
4. Avdeenko T.V., Mezentsev Yu.A. Efficient hybrid algorithm for optimal scheduling of unrelated parallel machines. *The 10<sup>th</sup> International Forum on Strategic Technology (IFOST 2015)*: proceedings, Bali, Indonesia, 3–5 June 2015, p. 66.
5. Lin Y.K. Particle swarm optimization algorithm for unrelated parallel machine scheduling with release dates. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, vol. 2013, art. 409486, pp. 1–9.
6. Mezentsev Yu.A. Optimizatsiya raspisanii parallel'nykh dinamicheskikh sistem v kalendar'nom planirovanii [Optimization of schedules for dynamic parallel service systems]. *Informatsionnye tekhnologii – Information Technology*, 2008, no. 2, pp. 16–23.
7. Bank J., Verner F. Heuristic algorithms for unrelated parallel machine scheduling with a common due date, release dates, and linear earliness and tardiness penalties. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, vol. 33 (4–5), pp. 363–383.
8. Brucker P. *Scheduling algorithms*. 5<sup>th</sup> ed. Berlin, New York, Springer. 372 p.
9. Gharbi A., Haouari M. Minimizing makespan on parallel machines subject to release dates and delivery times. *Journal of Scheduling*, 2002, vol. 5 (4), pp. 329–355.
10. Kaabi J., Harrath Y. A survey of parallel machine scheduling under availability constraints. *International Journal of Computer and Information Technology*, 2014, vol. 03, iss. 02, pp. 238–245.
11. Kashan A.H., Karimi B. A discrete particle swarm optimization algorithm for scheduling parallel machines. *Computers and Industrial Engineering*, 2009, vol. 56, no. 1, pp. 216–223.

---

\* Received 12 October 2015.

A research done with the financial support of the NSTU (thematic plan NIR NSTU), project TP-El-I\_15.



12. Lee W.C., Wu C.C., Chen P. A simulated annealing approach to makespan minimization on identical parallel machines. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, vol. 31, no. 3–4, pp. 328–334.
13. Lin Y.K., Hsieh H.T., Hsieh F.Y. Unrelated parallel machine scheduling problem using an ant colony optimization approach. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2012, vol. 6, pp. 1798–1803.
14. Santos F.C., Vilarinho P.M. The problem of scheduling in parallel machines: a case study. *Proceedings of the World Congress on Engineering, WCE–2010*, London, UK, 30 June – 2 July 2010, vol. 3.
15. Mezentsev Yu.A. Metod binarnykh otsechenii i vetvlenii tselochislennogo programmirovaniya [Branch and binary cuts approach of integer programming]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2011, no. 1 (16), pp. 12–25.