ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 62, № 1, 2016, с. 91–105

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 62, No. 1, 2016, pp. 91–105

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УСТРОЙСТВ

MODELING OF PROCESSES AND DEVICES

УДК 519.248

Марковские модели в задачах оценивания транспортных корреспонденций*

В.И. ХАБАРОВ[1], А.А. ТЕСЕЛКИН[2]

[1] *630049, РФ, г. Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191, Сибирский государственный университет путей сообщения, доктор технических наук, профессор. E-mail: khabarov51@mail.ru*
[2] *630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант. E-mail: a.tesselkin@gmail.com*

Рассматриваются вопросы оценивания транспортных корреспонденций по данным наблюдений за транспортными потоками. Эта проблема становится актуальной в контексте задач математического моделирования транспортных потоков, используемых для поддержки принятия управленческих решений в транспортной отрасли. В работе приводится классификация моделей наблюдения за потоками в транспортной сети в зависимости от способов получения данных. Модели наблюдения основаны на различных представлениях графа транспортной сети. Предлагается модель представления потоков в транспортной сети: каждый микрообъект этой сети в определенный момент времени с некоторой вероятностью переходит из одной вершины графа в другую. Такая модель описывается стационарной марковской цепью с дискретным временем и соответствующей матрицей переходных вероятностей, причем вершины графа ассоциируются с состояниями цепи. Ограничения при наблюдениях за сетью порождают проблему оптимального планирования наблюдений, формализуемую как задача распределения ресурса. Приводится постановка задачи планирования экспериментов для оценки переходных вероятностей цепи Маркова с использованием D-оптимальных планов. Для оценивания транспортных корреспонденций граф транспортной сети приводится к канонической форме на основе разбиения вершин графа на исходные, внутренние и конечные. С точки зрения теории марковских процессов состояния цепи разделяются на поглощающие и невозвратные. Задача оценки корреспонденций сводится к задаче оценивания опосредованных переходных вероятностей на основе фундаментальной матрицы марковской цепи. Предложенный метод оценки корреспонденций иллюстрируется на примере конкретной транспортной сети, а также предлагаются рекомендации по применению метода в практических задачах.

Ключевые слова: матрица корреспонденций, марковские цепи, планирование экспериментов, транспортная сеть, оценивание переходных вероятностей, метод максимального правдоподобия, модель наблюдения, информация Фишера

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-1-91-105

* *Статья получена 20 октября 2015 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели равновесных транспортных потоков используются для поддержки принятия решений в управлении транспортными комплексами крупных городов, агломераций [1]. При построении таких моделей ключевым моментом является нахождение матриц корреспонденций соответствующей транспортной сети. Элементом матрицы корреспонденции является общий объем пользователей, переместившихся из одной точки транспортной сети в другую. Проблема получения корреспонденций заключается в том, что они в явном виде ненаблюдаемы, и их приходится находить опосредованно. Для оценивания корреспонденций принято использовать различные эвристические и статистические методы. В данной работе предлагается подход к оцениванию матрицы корреспонденции по наблюдениям за транспортными потоками.

В разделе 1 вводится понятие транспортного графа как модели физической транспортной сети и приводится классификация моделей наблюдения за потоками в сети для задач оценивания транспортных корреспонденций. В разделе 2 рассматривается возможность представления транспортной сети в виде марковской цепи. Раздел 3 посвящен задаче планирования наблюдений за потоками в сети. В разделе 4 представлен метод получения корреспонденций на основе их марковских свойств и канонической формы матрицы переходов. В разделе 5 рассматривается пример применения предложенных результатов.

1. МОДЕЛИ НАБЛЮДЕНИЯ

Рассматривается модель физической транспортной сети и ее описание на языке теории графов. Представим транспортную сеть как ориентированный взвешенный граф $G(V, E)$, где V – множество вершин, а E – множество ребер. Каждое ребро графа $(u, v) \in E$ характеризуется функцией $f : E \to R$, называемой интенсивностью потока $f(u, v)$ [2]. Далее такую конструкцию будем называть *транспортным графом*.

Транспортный граф $G(V, E)$ ассоциируется с некоторой физической транспортной сетью. Вершины графа – это узлы транспортной сети (перекрестки, развязки, исходные и конечные пункты поездок), а ребра – это отрезки сети, т. е. некоторые пути сообщения. По транспортной сети перемещаются некоторые микрообъекты, например автомобили, которые образуют транспортный поток. Существуют физические и технологические ограничения при наблюдении за транспортной сетью. Эти ограничения порождают 5 основных моделей наблюдения в графе G.

1. *Модель наблюдения в узле сети*. Наблюдается общее количество микрообъектов, фиксируемых в вершине $v \in V$ в момент времени (или за промежуток) t: $n_v(t)$.

2. *Модель наблюдения на ребре сети*. Наблюдается количество микрообъектов на ребре $e \in E$ транспортного графа G за время t: $n_e(t)$.

3. *Модель наблюдения за перетоком в сети*. Для такой модели наблюдения необходимо ввести понятие *двойственного*, или реберного, графа $L(G)$ [2]. Вершины двойственного графа $L(G)$ ассоциируются с ребрами графа G. Соответственно, ребра двойственного графа $L(G)$ соединяют вершины, кото-

рые соответствуют смежным ребрам графа G (рис. 1). Наблюдается число микрообъектов на ребре $e_l \in L(E)$ двойственного графа $L(G)$ за время t: $n_{el}(t)$. Это можно интерпретировать как интенсивность перетоков между смежными ребрами для заданного узла сети.

4. *Модель наблюдения за маршрутом*. Маршрутом назовем «переток k-й степени». Под перетоком k-й степени, где $k > 1$, понимается количество микрообъектов, проходящих через цепочку k смежных ребер графа G. Аналогично представлению двойственного графа для $k = 2$ перетоком k-й степени является ребро графа $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$ (см. рис. 1). Наблюдается количество микрообъектов на части маршрута (ребре) $q \in L^k(G)$ за время t: $n_q(t)$. Интерпретация: интенсивность перетоков k-й степени.

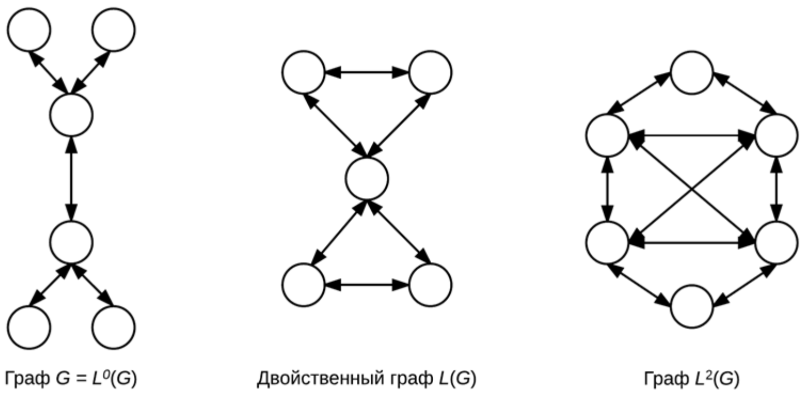

Рис. 1. Преобразования транспортных графов

5. *Модель наблюдения за корреспонденцией*. При такой модели наблюдения строится полный граф $F(G)$ на основе графа G. Наблюдается количество микрообъектов на ребре графа $F(G)$, переместившихся из вершины i в вершину j за время t: $\rho_{ij}(t)$. Интерпретация: размер корреспонденции.

Важно отметить, что графы $L(G)$, $L^k(G)$, $F(G)$ *тоже можно считать транспортными графами*. Это позволяет подойти с единых позиций к рассмотрению моделей 2–4 с точки зрения оценивания корреспонденций.

Исходными данными к задаче оценки корреспонденций является некоторая выборка, полученная с помощью той или иной модели наблюдения, а также некоторая априорная информация о передвижениях населения. Тогда рассматривается следующая задача. *Необходимо оценить размер корреспонденций между точками транспортного графа, используя выборку данных согласно некоторой модели наблюдения*. В моделях наблюдений 2–4 измерения осуществляются на ребрах некоторого транспортного графа, поэтому могут быть применены различные статистические методы оценки корреспонденций [3–6].

Для рассмотренных моделей наблюдения встает вопрос о физической реализуемости способа наблюдения. В этой связи важно отметить, что модели наблюдения 1–3 *можно реализовать посредством одного наблюдателя*. Все остальные модели предполагают сетевую распределенную модель наблюдения, которую достаточно сложно осуществить физически.

Если в распоряжении имеются только наблюдения согласно модели 1, то задача является недоопределенной, т. е. количество оцениваемых параметров в виде корреспонденций равно n^2, в то время как наблюдений всего n. В работах [7–9] рассмотрены возможности применения неполных данных для оценки корреспонденций путем введения различных дополнительных ограничений в виде эвристик. В работе [10] для такого типа модели наблюдений предлагается использовать агрегированные данные и варианты марковских моделей для них. Агрегированные данные и их использование для марковских цепей подробно рассмотрены в [11].

В данной работе рассматривается метод для моделей наблюдений 2–4, использующий марковские свойства транспортных корреспонденций.

2. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Транспортный граф $G(V, E)$ можно ассоциировать с графом переходов апериодической цепи Маркова с дискретным временем [10] и матрицей переходных вероятностей P:

$$P = \left\{ \hat{p}_{ij} \right\},\ 0 \le \hat{p}_{ij} \le 1\ \forall i, j \text{ и } \sum_j \hat{p}_{ij} = 1\,. \tag{1}$$

В этом случае марковская цепь может быть интерпретирована следующим образом. Некоторый микрообъект транспортной сети, например автомобиль, находящийся в вершине сети с номером i (состояние i), с вероятностью p_{ij} переходит в вершину транспортного графа j в момент времени t. Такая модель применима для моделей наблюдения 2–4.

Рассмотрим задачу оценивания вероятностей перехода по наблюдениям за марковской цепью в моменты времени $t = \{0, 1,\ldots, T\}$ на основе статистики

$$n_{ij} = \sum_{t=0}^{T} n_{ij}(t)\,, \tag{2}$$

где $n_{ij}(t)$ – количество переходов цепи из состояния i в состояние j в момент времени t; n_i – общее число переходов цепи из состояния i за время T,

$$n_i = \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij}\ . \tag{3}$$

Переход цепи из состояния i в состояние j определяется полиномиальным законом распределения с вероятностью p_{ij}. Используя метод максимального правдоподобия [11], оценки p_{ij} можно получить в виде

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}\,,\quad i = 1,\ldots,m,\quad j = 1,\ldots,m_i\,. \tag{4}$$

Такая оценка состоятельна и асимптотически нормальна [12].

3. ПЛАНИРОВАНИЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Наблюдения, соответствующие моделям 2–4, являются распределенными в пространстве и во времени, что усложняет процесс сбора наблюдений. Измерения должны быть максимально информативными. Это приводит к необходимости планирования наблюдений, поскольку стоимость наблюдений довольно высока.

Задачу планирования наблюдений для выбранной модели наблюдений можно интерпретировать следующим образом [13]: наблюдатели фиксируют переходы микрообъектов, находясь в состояниях $\{v_1,\ldots, v_m\}$ в моменты времени $t = \{0, 1,\ldots, T\}$. На весь эксперимент отведен ресурс в N наблюдений. Каждый наблюдатель получает часть этого ресурса $\{n_i,\ i = 1,\ldots, m\}$ таким образом, что

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N .$$

Требуется найти распределение ресурса $n = \{n_i,\ i = 1,\ldots, m\}$, максимизирующее некоторый функционал от информационной матрицы Фишера

$$I(P,\ n) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(n,\ P)}{\partial P^2}\right), \tag{5}$$

при этом функция правдоподобия $L(n, P)$ равна

$$L(n,\ P) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{\ n_{ij}} = \prod_{i=1}^{m} p_{i1}^{n_{i1}}\, p_{i2}^{n_{i2}} \ldots p_{im_i-1}^{n_{im_i-1}} \left(1-\sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}\right)^{n_i-\sum\limits_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}} .$$

D-оптимальный план минимизирует обобщенную дисперсию ОМП-оценок параметров, что эквивалентно максимизации (5) [14]. Следует, однако, ожидать (см. ниже), что информационная матрица Фишера будет зависеть от истинных значений параметров P. Для исключения этой зависимости рассматриваются минимаксные D-оптимальные планы, для которых

$$n^* = Arg \max_{n} \min_{P} \log\det I(P,\ n) . \tag{6}$$

Рассмотрим структуру информационной матрицы Фишера более детально. Для этого сначала необходимо найти элементы матрицы вторых производных

$$\frac{\partial^2 \log L(n,\ P)}{\partial p_{ij}^2} = \begin{cases} -\dfrac{n_{ij}}{p_{ij}^2} - \dfrac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2},\ i = j, \\ -\dfrac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2},\ i \neq j, \end{cases} \qquad i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,m_i} . \tag{7}$$

Далее согласно выражению (5)

$$I(P,n) = E\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{n_{i1}}{p_{i1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i-1}}{p_{im_i-1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

для всех $i = 1,\ldots, m$ и учитывая, что

$$p_{im_i} = 1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}, \quad n_{im_i} = n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}.$$

Согласно [13], решением задачи (6) является выражение

$$n_i^* = \frac{N(m_i - 1)}{\sum_{i=1}^{m}(m_i - 1)} \forall i = 1,\ldots,m. \qquad (10)$$

Таким образом, план эксперимента (распределение ресурса) можно интерпретировать следующим образом: общий объем наблюдений N перераспределяется между наблюдателями марковской цепи пропорционально $m_i - 1$ ($i = 1,\ldots, m$), где m_i – количество возможных переходов в состоянии v_i.

Интерпретация результата (10) может быть следующей: если дана транспортная сеть с некоторым количеством узлов не меньше, чем m, то для получения наблюдений следует ограничиться m узлами. В этих узлах N возможных наблюдений за микрообъектами следует перераспределить согласно (10). Очевидно, согласно (10), наиболее информативными являются те вершины транспортного графа, из которых исходит больше дуг.

4. ОЦЕНКА ТРАНСПОРТНЫХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ

Рассмотрим задачу оценки матриц корреспонденций при условии, что для выбранных моделей наблюдения матрица переходных вероятностей марковской цепи оценена согласно (4). Далее целесообразно транспортный граф $G(V, E)$ привести к *канонической* форме (см. ниже). Для этого проведем разбиение множества вершин V на три подмножества: элементы первого подмножества $S \subseteq V$ называются исходными вершинами; второе подмножество $M \subseteq V$ состоит из промежуточных, или внутренних, вершин; третье подмножество $D \subseteq V$ содержит так называемые конечные вершины. Любой путь в транспортном графе начинается в некоторой исходной вершине $s \in S$, проходит через различные внутренние вершины и заканчивается в конечной вершине $d \in D$.

Выделим четыре важных свойства транспортного графа:

1) $S \cap M \cap D = \varnothing$;

2) $S \cup M \cup D = V$;

3) $\forall s \in S,\ d \in D$ ребро $(s,d) \notin E$;

4) сумма потоков (интенсивностей потоков) из всех исходных вершин равна сумме потоков в конечные вершины:

$$\sum_{u \in S} f(u,*) = \sum_{v \in D} f(*,v).$$

Необходимо также пояснить интерпретацию разбиения множества вершин V графа G на три подмножества. Для этого рассмотрим понятие *транспортного района*. Транспортным районом называется область карты, объединяющая, например, места проживания либо места работы населения. Транспортный район характеризуется координатами центра района и является исходным либо конечным пунктом любой поездки.

Таким образом, множество S может быть рассмотрено как множество центров транспортных районов – источников поездок; множество D – как множество центров транспортных районов – конечных точек поездок. Множество M объединяет внутренние узлы транспортной сети (перекрестки, развязки).

Далее будут приведены некоторые особенности марковской цепи, описывающей транспортный граф $G(V, E)$ размерности m. Для удобства дальнейшего изложения приведем некоторые определения [15].

- Состояние i принадлежит *минимальному* множеству состояний, если $\forall j$ из $i \to\to j$, следует, что $j \to\to i$. Здесь и далее отношение $i \to\to j$ означает, что из состояния i можно попасть в состояние j, необязательно за один шаг.
- Если из множества состояний марковской цепи V исключить все минимальные множества $M_{\min}$, то минимальное множество по отношению к $U \setminus M_{\min}$ называется *множеством «первого уровня»* по отношению к минимальным. Аналогичным образом можно определить *множество «второго уровня»* и т. д.

Проведем разбиение матрицы на блоки. Первый блок соответствует подграфу, вершины которого образуют минимальное множество, второй блок образует подграф, который образует множество «первого уровня». Такое представление далее, согласно [15], будем называть *каноническим разложением* транспортного графа.

Исходя из специфики транспортного графа $G(V, E)$, матрица делится на три блока. Матрицу переходных вероятностей соответствующей цепи Маркова можно записать в блочном каноническом виде

$$P = \begin{pmatrix} P_D & 0 & 0 \\ R_{MD} & P_M & 0 \\ R_{SD} & R_{SM} & P_S \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где P_D, P_M, P_S – матрицы переходных вероятностей внутри множеств D, M, S соответственно; R_{MD} есть матрица вероятностей перехода из состояний множества M в состояния множества D; R_{SD}, R_{SM} – матрицы вероятностей перехода из состояний множества S в состояния множества M и D соответственно.

Учитывая специфику транспортного графа G, следует отметить, что множество D целиком состоит из поглощающих состояний, а из любого состояния множества S невозможно попасть в другое состояние этого множества, поэтому

$$\begin{aligned} P_D &= I, \\ P_S &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из свойства 3 транспортного графа следует, что

$$R_{SD} = 0\,. \tag{13}$$

Используя (12) и (13), матрицу (11) можно переписать в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ R_{MD} & P_M & 0 \\ 0 & R_{SM} & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Таким образом, все состояния множеств M и S являются невозвратными. Используя разделение состояний на поглощающие и невозвратные, преобразуем (14) в блочный вид

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & P_T \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где T – множество невозвратных состояний.

Процесс оценивания объемов транспортных корреспонденций можно условно разделить на два этапа. На первом необходимо получить матрицу опосредованных вероятностей перехода, на втором – с ее помощью финальную матрицу корреспонденций.

Обозначим B как матрицу опосредованных вероятностей перехода. Опосредованную вероятность перехода b_{ij} из некоторого невозвратного состояния i в поглощающее j можно получить следующим образом:

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} b_{kj}\,, \tag{16}$$

или в матричном виде

$$B = R + P_T B\,. \tag{17}$$

Отсюда следует

$$B = (I - P_T)^{-1} R\,. \tag{18}$$

Известно [15], что матрица $(I - P_T)^{-1}$ является *фундаментальной* матрицей марковской цепи.

На первом этапе необходимо получить матрицу опосредованных переходных вероятностей между множествами S и D – матрицу $B_{SD} = \{b_{ij}\}$. Из свойства 3 транспортного графа известно, что из состояния i множества S в состояние j множества D попасть напрямую невозможно, поэтому

$$B_{SD} = B_{SM} B_{MD}\,. \tag{19}$$

Вернемся к каноническому виду матрицы переходов (14) для транспортного графа. Опосредованные вероятности переходов из множества M и D, согласно (18), составляют матрицу B_{MD}:

$$B_{MD} = (I - P_M)^{-1} R_{MD} . \quad (20)$$

Поскольку множество S состоит из невозвратных состояний, для них состояния множества M можно считать поглощающими. Используя (14) и (15), матрица переходных вероятностей выглядит как

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_{SM} & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

тогда

$$B_{SM} = (I - 0)^{-1} R_{SM} = R_{SM} . \quad (22)$$

Из выражений (19), (20) и (22) следует, что матрица опосредованных переходных вероятностей B_{SD} (далее опустим индекс) равна

$$B = R_{SM} (I - P_M)^{-1} R_{MD} . \quad (23)$$

Введем матрицу корреспонденции ρ как фундаментальную характеристику транспортного графа. Элементом матрицы ρ_{ij} является количество микрообъектов, переместившихся из i-й вершины множества S в j-ю вершину множества D.

Чтобы получить матрицу корреспонденции, введем диагональную матрицу S_M, элементы которой s_{ii} равны общему числу микрообъектов (суммарному потоку), выезжающему из i-й исходной вершины. Поскольку была принята гипотеза о том, что суммарный поток выезжающих из всех исходных вершин равен суммарному потоку въезжающих во все конечные вершины, результирующая матрица корреспонденций ρ(G) равна

$$\rho = B \cdot S_M . \quad (24)$$

Аналогично с точностью до перестановки можно рассмотреть матрицу потока, въезжающего в конечные вершины, D_M:

$$\rho = D_M \cdot B . \quad (25)$$

Таким образом, уравнения (24) и (25) позволяют получить матрицу корреспонденции, используя только априорные данные об объемах транспортного потоках в источниках и стоках и матрицу переходных вероятностей соответствующей цепи Маркова.

Преимущество предложенного метода заключается в том, что используются только наблюдаемые данные об объемах потоков. Предложенный метод позволяет использовать известный аппарат теории цепей Маркова для расчета транспортных корреспонденций.

5. ПРИМЕР ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим задачу оценки корреспонденций на транспортном графе G_1, представленном на рис. 2. Известно, что из узла 8 выезжает N_8 автомобилей (микрообъектов), из узла 9 – N_9 автомобилей, из узла 10 – N_{10} автомобилей.

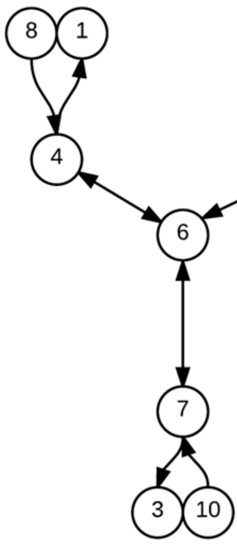

Рис. 2. Транспортный граф G_1

В транспортном графе G_1 вершины 1, 2, 3 являются конечными вершинами (т. е. принадлежат множеству D), вершины 8, 9, 10 являются исходными (т. е. принадлежат множеству S), а вершины 4, 5, 6, 7 являются промежуточными (т. е. принадлежат множеству M). Ненулевые вероятности переходов между вершинами заданы в матрице P_1. Матрица переходных вероятностей для графа P_1 равна

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & f & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как матрица P_1 стохастическая:

$$\begin{aligned} a+b&=1\\ c+d&=1\\ e+f+g&=1\\ h+q&=1 \end{aligned} \tag{26}$$

Блоки матрицы в каноническом виде, соответственно, равны

$$R_{SM}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ R_{MD}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&c&0\\0&0&0\\0&0&h\end{pmatrix},$$

$$P_M=\begin{pmatrix}0&0&b&0\\0&0&d&0\\e&f&0&g\\0&0&q&0\end{pmatrix}.$$

$$(I-P_M)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-b&0\\0&1&-d&0\\-e&-f&1&-g\\0&0&-q&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{be+df+gq-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}df+gq-1&-bf&-b&-bg\\-de&be+gq-1&-d&-dg\\-e&-f&1&-g\\-eq&-fq&-q&be+df-1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица B равна

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{be+df+gq-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}df+gq-1&-bf&-b&-bg\\-de&be+gq-1&-d&-dg\\-e&-f&1&-g\\-eq&-fq&-q&be+df-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&c&0\\0&0&0\\0&0&h\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{be+df+gq-1}\begin{pmatrix}a(df+gq-1)&-cbf&-hbg\\-ade&c(be+gq-1)&-hdg\\-aeq&-cfq&h(be+df-1)\end{pmatrix}.$$

Если учесть (26), то сумма каждой строки в матрице B остается равна единице. Воспользуемся выражением (24):

$$\rho = \frac{1}{be+df+gq-1}\begin{pmatrix} N_8 a(df+gq-1) & -N_9 cbf & -N_{10} hbg \\ -N_8 ade & N_9 c(be+gq-1) & -N_{10} hdg \\ -N_8 aeq & -N_9 cfq & N_{10} h(be+df-1) \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица ρ описывает корреспонденции (т. е. общий объем транспортного потока) между транспортными районами. Представленный транспортный граф – аналитический, реальные же задачи, сопоставимые по размерам с г. Новосибирском, требуют применения численных методов для расчета матриц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены методы оценки матрицы корреспонденции для различных моделей наблюдения. Уточнено понятие модели наблюдений, и для ряда моделей сформулированы условия наиболее информативных наблюдений на основе классических результатов из теории планирования эксперимента (10). Предложена марковская модель транспортных потоков. Параметры марковской цепи оцениваются на основе наблюдений согласно выбранной модели (4).

Предложен метод оценивания матрицы корреспонденции на основе канонического разложения матрицы переходов марковской цепи (14). При наличии измерений согласно моделям наблюдения 2–4 представляется возможным применить предложенный метод для оценки транспортных корреспонденций (24) и (25), которая сводится к оценке опосредованных переходных вероятностей цепи с использованием ее фундаментальной матрицы (23).

Предложенный метод позволяет вычислить корреспонденции на основе марковских переходных вероятностей, что существенно упрощает задачу, особенно для матриц большого размера.

Планируется дальнейшее исследование эффективности предложенного метода в сравнении с другими существующими статистическими методами.

Данный метод был апробирован для получения матриц транспортных корреспонденций при разработке транспортной модели г. Новосибирска. В практических задачах оценка (4) не всегда может быть получена на основе наблюдений (2), особенно для больших сетей, поэтому иногда целесообразно использовать величины потоков, соответствующие распределению транспортных потоков [1] при первом приближении.

Результат (10) позволит повысить информативность собираемых данных при организации обследований транспортных потоков на сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / А.В. Гасников, С.Л. Кленов, Е.А. Нурминский, Я.А. Холодов, Н.Б. Шамрай, М.Л. Бланк, Е.В. Гасникова, А.А. Замятин, В.А. Малышев, А.В. Колесников, А.М. Райгородский; под ред. А.В. Гасникова. – М.: Изд-во МФТИ, 2010. – 360 с.

2. *Харари Ф.* Теория графов / пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

3. *Zuylen H.J. van, Willumsen L.G.* The most likely trip matrix estimated from traffic counts // Transportation Research Part B. – 1980. – Vol. 14, iss. 3. – P. 281–293.

4. *Vardi Y.* Network tomography: estimating source-destination traffic intensities from link data // Journal of the American Statistical Association. – 1996. – Vol. 91. – P. 365–377.

5. *Hazelton L.M.* Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction, and reconstruction // Transportation Research Part B. – 2001. – Vol. 35, iss. 7. – P. 667–676.

6. *Li B.* Bayesian inference for origin-destination matrices of transport networks using the EM algorithm // Technometrics. – 2005. – Vol. 47, iss. 4. – P. 399–408.

7. *Швецов В.И.* Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.

8. *Вильсон А.Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 248 с.

9. *Теселкин А.А., Теселкина К.В.* Оценка параметров модели транспортных корреспонденций по данным сотовых операторов // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2015. – № 4. – С. 10–14.

10. *Хабаров В.И., Молодцов Д.О., Хомяков С.В.* Марковская модель транспортных корреспонденций // Доклады ТУСУР. – 2012. – № 1, ч. 1. – С. 113–117.

11. *Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А.* Оценивание параметров марковских процессов по агрегированным временным рядам. – М.: Статистика, 1977. – 221 с.

12. *Kendall M.G., Stuart A.* The advanced theory of statistics. Vol. 2. Inference and relationship. – London: Carles Griffin & Company, 1961. – 758 p.

13. *Хабаров В.И., Теселкин А.А., Косолапов К.П.* Планирование экспериментов для оценки матрицы транспортных корреспонденций // Доклады АН ВШ РФ. – 2015. – № 3 (28). – С. 109–116. – doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-109-116.

14. *Сирл С., Госман У.* Матричная алгебра в экономике / пер. с англ. и науч. ред. Е.М. Четыркина и Р.М. Энтова. – М.: Статистика, 1974. – 368 с.

15. *Kemeny J.G., Snell J.L.* Finite Markov chains. – Princeton, NJ: Van Nostrand, 1960. – 210 p.

Хабаров Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий транспорта Сибирского государственного университета. Основные направления научных исследований: искусственный интеллект, планирование эксперимента, статистические методы анализа данных, математическое моделирование транспортных потоков. Имеет более 120 публикаций. E-mail: khabarov51@mail.ru

Теселкин Александр Александрович, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: статистические методы анализа данных, математическое моделирование транспортных потоков. Имеет 11 публикаций. E-mail: a.tesselkin@gmail.com

*Using Markov models in problems of origin-destination matrix estimation**

V.I. KHABAROV[1], *A.A. TESSELKIN*[2]

[1] *Siberian StateTransport University, 191, Dusi Kovalchuk St., Novosibirsk, 630049, Russian Federation, D. Sc.(Eng.), professor. E-mail: khabarov51@mail.ru*
[2] *Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt., Novosibirsk, 630073, Russian Federation, postgraduate student. E-mail: a.tesselkin@gmail.com*

Issues of estimating transport origin-destination (OD) flows are considered based on observations of traffic flows. This problem is relevant in the context of the problems of mathematical modelling of traffic flows used to support management decision-making in the transport industry. In this paper the classification of observation models of flows in a transportation network is provided depending on methods of data obtaining. Observation models are based on various representations of the graph of the transportation network. The following model represents flows in a transportation network. Each microobject of the network moves from one vertex to another with a certain probability at a certain time. This model is described by a stationary Markov chain with discrete time and the corresponding transition probability matrix, with vertices associated with states of the chain. Restrictions on the observations of the network pose an optimal observation planning problem formalized as the problem of resource allocation. The statement of the experimental design problem is presented to estimate transition probabilities of the Markov chain with D-optimal designs. To estimate a transport OD count, the transportation network can be reduced to some canonical form by the decomposition of vertices into origins, internals and destinations. In terms of the Markov theory, states of the chain are divided into absorbing and transient states. The problem of estimating OD counts is reduced to the problem of estimating indirect transition probabilities based on the fundamental matrix of the Markov chain. The proposed method of estimating OD flows is illustrated on a concrete transportation network as well as some recommendations on the method application in practice are provided.

Keywords: Origin-destination matrix; Markov chains; experiment design; transport network; estimation of transition probabilities; maximum likelihood estimation; observation model; Fisher information

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-1-91-105

REFERENCES

1. Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskii E.A., Kholodov Ya.A., Shamrai N.B, Blank M.L., Gasnikova E.V., Zamyatin A.A., Malyshev V.A., Kolesnikov A.V., Raigorodskii A.M. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnyh potokov* [Introduction to the mathematical modelling of traffic flows]. Moscow, MFTI Publ., 2010. 360 p.

2. Harary F. *Graph Theory*. Reading, MA, Addison-Wesley Publ., 1969. 274 p. (Russ. ed.: Kharari F. *Teoriya grafov*. Translated from English V.P. Kozyrev. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. 296 p.).

3. Zuylen H.J. van, Willumsen L.G. The most likely trip matrix estimated from traffic counts. *Transportation Research Part B*, 1980, vol. 14, iss. 3, pp. 281–293.

4. Vardi Y. Network tomography: estimating source-destination traffic intensities from link data. *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, pp. 365–377.

5. Hazelton L.M. Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction, and reconstruction. *Transportation Research Part B*, 2001, vol. 35, iss. 7, pp. 667–676.

6. Li B. Bayesian inference for origin-destination matrices of transport networks using the EM algorithm. *Technometrics*, 2005, vol. 47, iss. 4, pp. 399–408.

7. Shvetsov V.I. Matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Mathematical modelling of transport flows]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2003, no. 11, pp. 3–46. (In Russian)

* *Received 20 October 2015.*

8. Wilson A.G. *Entropy in urban and regional modeling*. London, Pion, 1970. 166 p. (Russ. ed.: Vil'son A.Dzh. *Entropiinye metody modelirovaniya slozhnykh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 248 p.).

9. Tesselkin A.A., Tesselkina K.V. Otsenka parametrov modeli transportnykh korrespondentsii po dannym sotovykh operatorov [Estimation of the parameters of an Origin-Destination movement model from cellular operator data]. *Intellektual'nye tekhnologii na transporte – Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 4, pp. 10–14.

10. Khabarov V.I., Molodtsov D.O. Khomyakov S.V. Markovskaya model' transportnykh korrespondentsii [Model Markov chains for transport correspondence]. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*, 2012, no. 1, pt. 1, pp. 113–117.

11. Lee T.C., Judge G.G., Zellner A. *Estimating the parameters of the Markov probability model from aggregate time series data*. Amsterdam, London, North-Holland, 1970. 254 p. (Russ. ed.: Li Ts., Dzhadzh D., Zel'ner A. *Otsenivanie parametrov markovskikh protsessov po agregiro-vannym vremennym ryadam*. Moscow, Statistika Publ., 1977. 221 p.).

12. Kendall M.G., Stuart A. *The advanced theory of statistics*. Vol. 2. *Inference and relationship*. London, Carles Griffin & Company, 1961. 758 p.

13. Khabarov V.I., Tesselkin A.A. Kosolapov K.P. Planirovanie eksperimentov dlya otsenki matritsy transportnykh korrespondentsii [Design of experiments for transport correspondence matrix estimation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. 109–116. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-109-116

14. Searle S.R., Hausman W.H. *Matrix algebra for business and economics*. New York, Wiley, 1970. 362 p. (Russ. ed.: Sirl S., Gosman U. *Matrichnaya algebra v ekonomike.* Translated from English and sci. eds. E.M. Chetyrkin, R.M. Entov. Moscow, Statistika Publ., 1974. 368 p.).

15. Kemeny J.G., Snell J.L. *Finite Markov chains*. Princeton, NJ, Van Nostrand, 1960. 210 p.

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 62, No 1, 2016, pp. 91–105